Václav Havel
Kartesisch assoziierte Zerlegungen (Vorläufige Mitteilung)

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 6 (1965), No. 1, 49--51

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104993

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
6, 1 (1965)

KARTESISCH ASSOZIIERTE ZERLEGUNGEN

(vorläufige Mitteilung)

Václav HAVEL, Brno

Es sei M feste nichtleere Grundmenge. Die Zerlegung $\mathfrak{X}$ in M definiert man als nichtleere Menge von paarweise disjunkten nichtleeren Teilmengen aus M, der sog. $\mathfrak{X}$-Blöcke. Fällt dabei die Vereinigung aller $\mathfrak{X}$-Blöcke mit M zusammen, so sprechen wir über Zerlegung $\mathfrak{X}$ auf M. Ist $\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}_\iota)_{\iota \in \mathcal{J}}$ eine Familie von Zerlegungen in M, so bezeichnen wir die Blöcke aller Zerlegungen von $\mathfrak{X}$ gemeinsam als $\mathfrak{X}$-Blöcke. Die Menge $\mathcal{S}(M)$ aller Zerlegungen in M sei üblicherweise halbgeordnet: für $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ aus $\mathcal{S}(M)$ bedeute $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$, dass jeder $\mathcal{A}$-Block in gewissem $\mathcal{B}$-Block enthalten wird. $\mathcal{S}(M)$ ist dann ein vollständiger Halbverband (im Sinne von [2], S.20 und 33), während die Menge aller Zerlegungen auf M vollständigen Unterverband $\mathcal{V}(M)$ in $\mathcal{S}(M)$ bildet.[1)]

Es seien weiter M, N feste nichtleere Grundmengen. Wir definieren die Abbildung soc zwischen $\mathcal{S}(M) \times \mathcal{S}(N)$ und $\mathcal{S}(M \times N)$,[2)] indem wir jedem $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathcal{S}(M) \times \mathcal{S}(N)$

----

1) Vgl.[1], S.14-19.

2) Natürliche Halbordnung des Kardinalproduktes zweier halbgeordneten Mengen wird nach [2], S.14-15 eingeführt.

eine solche Zerlegung aus $\mathcal{Y}(M \times N)$ zuordnen, die eben aus Blöcken $A \times B$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ besteht. Diese Abbildung nennen wir auch <u>kartesisch assoziiert</u> und das Bild bezeichnen wir als <u>Sozius</u>. Ist $\mathcal{F}$ Familie der Paare $(\mathcal{A}_\iota, \mathcal{B}_\iota) \in \mathcal{Y}(M) \times \mathcal{Y}(N)$, $\iota \in \mathcal{J}$ so bezeichnen wir $soc\ \mathcal{F}$ die Familie von Zerlegungen $soc\ (\mathcal{A}_\iota, \mathcal{B}_\iota) \in \mathcal{Y}(M \times N)$, $\iota \in \mathcal{J}$. Sind $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}_\iota)_{\iota \in \mathcal{J}}$, $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}_\iota)_{\iota \in \mathcal{J}}$ willkürliche Familien der Zerlegungen in M bzw. in N, mit gemeinsamer Indexmenge $\mathcal{J}$, so nennen wir die Familie $\mathcal{F} = ((\mathcal{A}_\iota, \mathcal{B}_\iota)_{\iota \in \mathcal{J}}$ <u>zulässig.</u>

<u>Satz 1</u>. Die kartesisch assoziierte Abbildung ist injektiv und beiderseits isoton, aber nicht surjektiv.

<u>Satz 2.</u> Für jede zulässige Familie $\mathcal{F}$ gilt $sup\ soc\ \mathcal{F} \leq$ $\leq soc\ sup\ \mathcal{F}$.

Zulässige Familie $\mathcal{F}$ heisst <u>regulär</u>, wenn zu jedem Paare (a_0, b_0), (a, b) aus willkürlichem $soc\ sup\ \mathcal{Z}$ -Block eine endliche Folge von $soc\ \mathcal{F}$ -Blöcken

$$A_0 \times B_0 \ \mathfrak{X}\ A_1 \times B_1 \ \mathfrak{X}\ \dots \ \mathfrak{X}\ A_n \times B_n \quad {}^{3)}$$

existiert, so dass $(a_0, b_0) \in A_0 \times B_0$, $(a, b) \in A_n \times B_n$. Es ist bekannt, dass nichtreguläre zulässige Familien existieren ([1], S.27.).

<u>Satz 3</u>. Für zulässige Familie $\mathcal{F}$ gilt $sup\ soc\ \mathcal{F} \geq$ $\geq soc\ sup\ \mathcal{F}$ dann und nur dann, wenn $\mathcal{F}$ regulär ist.

<u>Satz 4</u>. Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ die Familien von Zerlegungen auf M bzw. auf N, so ist die entsprechende zulässige Familie $\mathcal{F}$ regulär.

<u>Satz 5</u>. Existiert für zulässige Familie $\mathcal{F}$ die Zerlegung $inf\ \mathcal{Z}$, so gilt $inf\ soc\ \mathcal{F} = soc\ inf\ \mathcal{F}$.

----

3) $\mathfrak{X}$ bezeichnet die Relation nichtleeren Durchschnitts zweier Mengen.

<u>Satz 6</u>. Es gilt $\varkappa\, \mathscr{V}(M) \times \mathscr{V}(N) \subseteq \mathscr{V}(M \times N)$ und die auf $\mathscr{V}(M) \times \mathscr{V}(N)$ verengte kartesisch assoziierte Abbildung ist Verbandsmonomorphismus.

Literatur

[1] O. BORŮVKA, Theorie der Zerlegungen in einer Menge I (tschechisch mit französischer Zusammenfassung), Publ.Fac.Sci.Univ.Brno,No 278,S.1-37(1948).

[2] M.L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR et R.CROISOT, Leçons sur la théorie des treillis, des structures ordonnées et des treillis géométriques, Paris 1953,