K. K. Mokrishchev

Об однозначной определённости некоторых произвольно искривленных поверхностей

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 5 (1964), No. 4, 203--208

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104975`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

5, 4 (1964)

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ ПРОИЗВОЛЬНО ИСКРИВЛЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

К.К. МОКРИЩЕВ, Ростов на Дону .

§ 1. Рассмотрим регулярную прверхность F

$$\bar{r} = \bar{r}(u^1, u^2), \qquad (u^1, u^2) \in \mathcal{D} .$$

Обозначим единичный вектор нормали, первый (метрический) и второй тензоры и среднюю кривизну этой поверхности соответственно через

$$\xi , \; g_{ik} , \; B_{i,k} , \; H .$$

Пусть $F^{\times}$ есть поверхность, изометричная F и отнесенная к тем же координатам u^1, u^2 (устанавливаемым по изометрии). Аналогичные с $F^{\times}$ связанные величины обозначим

$$\xi^{\times} , \; g_{ik} , \; B^{\times}_{ik} , \; H^{\times} .$$

Если в каждой точке $(u^1, u^2) \in \mathcal{D}$ будет

$$B^{\times}_{ik} = B_{ik}$$

тогда по основной теореме теории поверхностей [1] F и $F^{\times}$ будут или конгруентны, или симметричны.

Обозначим

$$A_{ik} = B_{ik} - B^{\times}_{ik}$$

Справедлива следующая, принадлежащая К.Р. Гротемейеру [2]

<u>Лемма</u>: если в каждой паре соответственных точек изометричных поверхностей F и $F^{\times}$ имеет место равенство $H = H^{\times}$, то справедливо соотношение

$$\| A_{ik} \| \leq 0$$

и из равенства $\| A_{ik} \| = 0$ следует $A_{ik} = 0$.

Если F и $F^{\times}$ будут замкнутыми рода нуль, то имеет место формула Г. Герлотца [3], которую можно рпедставить в виде

$$\iint\limits_{F} \frac{\|A_{ik}\|}{g} P d\sigma = \iint\limits_{F^{\times}} H^{\times} d\sigma^{\times} - \iint\limits_{F} H d\sigma ,$$

где $g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 > 0$, $P = (\bar{\tau} \xi)$, $d\sigma = d\sigma^{\times}$ – соответьтственные элементы площади на F и $F^{\times}$.

§ 2. Будем рассматривать ограниченную замкнутую, регулярную поверхность вращения F, меридиан которой пересекает ось вращения только в двух точках S (южный полюс) и N (северный ролюс) и образует с нею в этих точках рпямой угол.

1. Предположим, что меридиан имеет только две точки перегиба A и B. Дугу AB меридиана, обращенную выпуклостью к оси вращения, будем называть участком вогнутости меридиана. На этом участке кривизна поверхности F –отрицательна, на параллелях, описиваемых точками A и B – равна нулю, а во всех остальных точках – положительна.

Могут представиться три случая.

1) Касательные a и b к меридиану соответственно в точках A и B пересекают ось вращения в точках A_1 и B_1 так, что $A_1 \overset{\times}{C} A$ и $B_1 \overset{\times}{C} B$, где $C \equiv a \times b$, а символ $A_1 \overset{\times}{C} A$ означает, что точка C лежит между A_1 и A (рис. 1).

2) Касательные a и b пересекают ось вращения в точках A_1 и B_1 так, что $C \overset{\times}{A_1} A$ и $C \overset{\times}{B_1} B$ (рис. 2).

3) $A_1 \equiv B_1 \equiv C$, т-е $C \in Ox$.

В первом из этих случаев общую часть отрезков $A_1 B_1$ и SN обозначим через ω_1 и назовем отрезком глобальной жесткости, а поверхность F через F_1. Все внутенние точки отрезка ω_1 обладают тем свойством, что любой луч, исходящий из такой точки и встречающий меридиан, пересекнет его только в одной точке и образует с соответствующей нормалью к F_1, угол φ, удовлетворяющий или тольео условию $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, или только условию $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$.

Теорема 1. Если две трижды непрерывно дифференийруемые изометрические поверхности F_1 и F^* имеют в соответственных по изометрии точках $H_1 = H^*$, тогда эти поверхности или конгруентны, или симметричны.

Систему координат $Oxyz$ выберем так, чтобы $O \in \omega_1$ и ось Oz совпадала с осью вращения поверхности F_1. Отнесем поверхности F_1 и F^* к таким общим координатам u^1, u^2, что $u^1 = const$, будут параллелями на F_1, а $u^2 = const$. - ее меридианами. Пусть

$$\bar{r} = \bar{r}(u^1, u^2)$$

есть уравнение F_1. Предположим, что направления на линиях u^1 и u^2 выбраны так, что единичный вектор нормали $\bar{\xi}$ к F_1 направлен внутрь этой поверхности. Тогда

$$P = (\bar{r}\,\bar{\xi}) \leq 0$$

во всех точках поверхности F_1. Формула Герглотца непосредственно дает

$$\iint\limits_{F_1} \frac{\|A_{ik}\|}{g} P d\sigma = 0 .$$

Отсюда, в силу леммы следует $A_{ik} = 0$, т - е $B^*_{ik} = B_{ik}$. Теорема доказана.

Эту теорему (как и все последующие) можно рассматривать как теорему о глобальной жесткости [4], или однозначной определенности [5] поверхности F_1.

II. Предположим терер, что меридиан поверхности F имеет не один, а n участков вогнутости и каждий из них обладает отрезком глобальной жесткости ω_k, $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Если общая часть всех этих отрезков есть отрезок ω_0 (отличный от нулевого), тогда поверхность F будем обозначать через F_n.

Теорема II. Если две трижды непрерывно дифференцируемые изометрические поверхности F_n и F^* имеют в соответственных по изометрии точках $H_n = H^*$, тогда эти поверхности или конгруентны, или симметричны.

Доказательство аналогично доказательству теоремы I.

III. Предположим, что меридиан поверхности F имеет только одну точку перегиба и "вмят" по направлению оси, т-е имеет форму, изображенную на рисунке 3.

Здесь дуга ABS, как и дуга NA - выпуклая. Точка B - точка максимума, A - точка перегиба.

В случае, когда касательня a к меридиану в точке A встречает отрезок SN во внутренней точке A_1, тогда поверхность F обозначаем F'. Отрезок $A_1 S$ будет отрезком глобальной жесткости. Имеет место

<u>Теорема III</u>. Если две трижды непрерывно дифференцируемые изометрические поверхности F' и F^* имеют в соответственных по изометрии точках $H' = H^*$, тогда эти поверхности или конгруентны, или симметричны.

IУ. Рассмотрим поверхнось F меридиан которой имеет две точки перегиба, но "вмят" у обоих полюсов, т-е имеет вид, изображенный на рис. 4.

Если общая часть отрезков $A_1 S$ и $B_1 N$ есть отрезок, отличный от нулевого, тогда F, обозначаем F''. Справедлива

<u>Теорема IУ</u>. Если две трижды непрерывно дифференцируемые изометрические поверхности F'' и F^* имеют в соответственных по изометрии точках $H = H^*$, тогда эти поверхниости или конгруентны или симметричны.

У. Комбинируя надлежащим образом рассмотренные выше случаи приходим к поверхности F^0, меридиан которой имеет, например, вид, изображенный на рис. 5. Нетрудно видеть, что если, любую внутреннюю точку отрезка B, C принять за начало координат, тогда функция P для всех точек поверхности F^0 будет иметь значения одного знака и потому верна

Теорема У. Если две трижды непрерывно дифференцируемые изометрические поверхности F^0 и F^* имеют в соответственных по изометрии точках $H^0 = H^*$, тогда эти поверхности или конгруентны, или симметричны.

Отметим, наконец, что если вместо отрезков глобальной жесткости ввести надлежащим образом трехмерные области, то предыдущие теоремы можно распространить на некоторые поверхности не являющиеся поверхностями вращения.

Литература:

1. В.Ф. КАГАН, Основы теории поверхностей, ч.II, Москва-Ленинград, (1948).
2. K.P. GROTEMEYER, Über die Verbiegung konvexer Flächen mit Rand, Math.Zeitschr., Bd.58 (1953), стр. 41-45.
3. G. HERGLOTZ, Über die Starrheit der Einflächen, Abh. math. Semin., Hansische Univ., 15 (1943), стр.127-129.
4. S. BAUDOIN-GOIBER, Ridigités des surfaces convexes à bords, Ann.Ec.Norm., LXXV, fasc.(3) (1954), ctp.167-199.
5. Н.В. Ефимов, Качественные вопросы теории деформации поверхностей, УМН III, вып. 2(24), (1948).

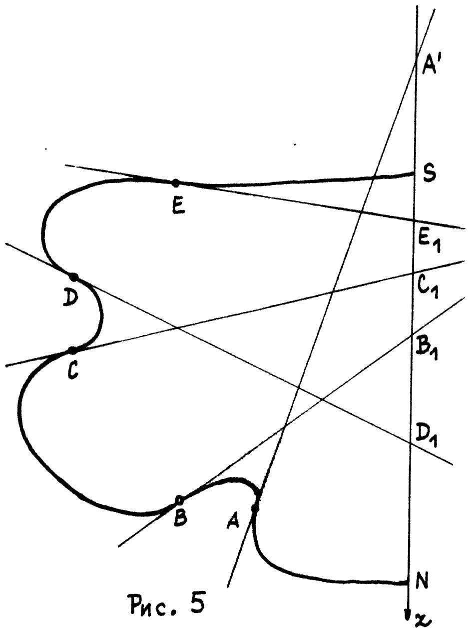

Рис. 5

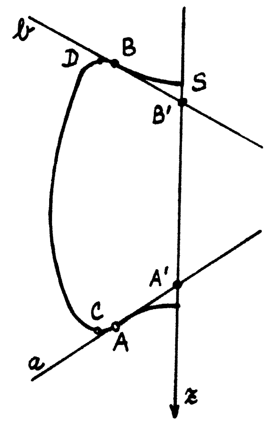

Рис. 4

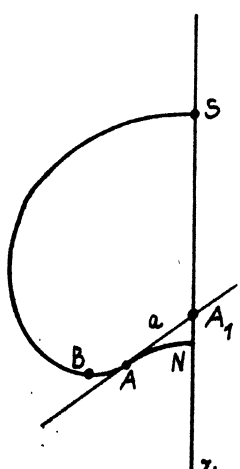

Рис. 3

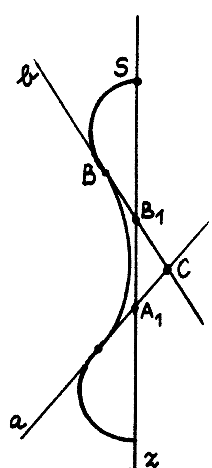

Рис. 2

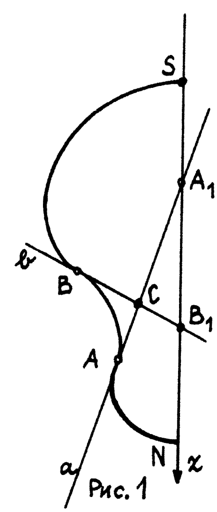

Рис. 1