Václav Havel
Die Čechschen Kollineationen eines Flächenpaares

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 5 (1964), No. 3, 133--143

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104969`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
5, 3 (1964)

DIE ČECHSCHEN KOLLINEATIONEN EINES FLÄCHENPAARES

Václav HAVEL, Brno

Es werden die Begriffe und die Methode verwendet, welche A. Švec in [3] und [4] eingeführt hat. Das begleitende Tetraeder $\bar{A}_0\,\bar{A}_1\,\bar{A}_2\,\bar{A}_3$ einer Fläche $\mathcal{P}$ (vom Typus $\mathcal{P}^2_{0,3}$) nennen wir nun spezielI, wenn

(I) $$d\,\bar{A}_0 = \bar{\omega}^0_0\,\bar{A}_0 + du\,\bar{A}_1 + dv\,\bar{A}_2,$$

$$d\,\bar{A}_1 = \bar{\omega}^0_1\,\bar{A}_0 + \bar{\omega}^1_1\,\bar{A}_1 + \bar{\beta}\,du\,\bar{A}_2 + (1-h)dv\,\bar{A}_3,$$

$$d\,\bar{A}_2 = \bar{\omega}^0_2\,\bar{A}_0 + \bar{\gamma}\,dv\,\bar{A}_1 + \bar{\omega}^2_2\,\bar{A}_2 + (1+h)du\,\bar{A}_3\,,$$

$$d\,\bar{A}_3 = \bar{\omega}^0_3\,\bar{A}_0 + \bar{\omega}^1_3\,\bar{A}_1 + \bar{\omega}^2_3\,\bar{A}_2 + \bar{\omega}^3_3\,\bar{A}_3\,,$$

wobei u, v asymptotische Parameter sind und $\omega^j_i = a^j_i\,du + b^j_i\,dv$ für entsprechende i, j ; weitere Einzelheiten siehe [6], S. 387.

Für die Dualisation $\tilde{\mathcal{P}}$ der Fläche $\bar{\mathcal{P}}$ konstruieren wir das spezielle begleitende Tetraeder $\tilde{A}_0\,\tilde{A}_1\,\tilde{A}_2\,\tilde{A}_3$ mit

(II) $$d\,\tilde{A}_0 = \tilde{\omega}^0_0\,\tilde{A}_0 + du\,\tilde{A}_1 + dv\,\tilde{A}_2\,,$$

$$d\,\tilde{A}_1 = \tilde{\omega}^0_1\,\tilde{A}_0 + \tilde{\omega}^1_1\,\tilde{A}_1 + \tilde{\beta}\,du\,\tilde{A}_2 + (1-\tilde{h})\,dv\,\tilde{A}_3,$$

$$d\,\tilde{A}_2 = \tilde{\omega}^0_2\,\tilde{A}_0 + \tilde{\gamma}\,dv\,\tilde{A}_2 + \tilde{\omega}^2_2\,\tilde{A}_2 + (1+\tilde{h})\,du\,\tilde{A}_3,$$

$$d\,\tilde{A}_3 = \tilde{\omega}^0_3\,\tilde{A}_0 + \tilde{\omega}^1_3\,\tilde{A}_1 + \tilde{\omega}^2_3\,\tilde{A}_2 + \tilde{\omega}^3_3\,\tilde{A}_3\,,$$

wo $\tilde{\omega}^j_i = \tilde{a}^j_i\,du + \tilde{b}^j_i\,dv$ für entsprechende i, j.

Setzen wir $\tilde{A}_0 = -[\bar{A}_0\bar{A}_1\bar{A}_2]$, $\tilde{A}_1 = -(1+\bar{h})[\bar{A}_0\bar{A}_1\bar{A}_3]$, $\tilde{A}_2 = (1-\bar{h})[\bar{A}_0\bar{A}_2\bar{A}_3]$, $\tilde{A}_3 = [\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3]$, dann bekommen wir für die Dualisation $\tilde{\mathcal{P}}$ der Fläche $\bar{\mathcal{P}}$ das <u>zugeordnete</u> spezielle begleitende Tetraeder $\tilde{A}_0\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3$ mit

$$
\begin{aligned}
(1)\quad d\tilde{A}_0 &= -\bar{\omega}_3^3\,\tilde{A}_0 + du\,\tilde{A}_1 + dv\,\tilde{A}_2\,,\\
d\tilde{A}_1 &= (1+\bar{h})\,\bar{\omega}_3^2\,\tilde{A}_0 + (d\ln|1+\bar{h}| - \bar{\omega}_2^2)\,\tilde{A}_1 - \frac{1+\bar{h}}{1-\bar{h}}\,\bar{\beta}\,du\,\tilde{A}_2 +\\
&\quad + (1+\bar{h})\,dv\,\tilde{A}_3,\\
d\tilde{A}_2 &= (1-\bar{h})\,\bar{\omega}_3^1\,\tilde{A}_0 - \frac{1-\bar{h}}{1+\bar{h}}\,\bar{\gamma}\,dv\,\tilde{A}_1 + (d\ln|1-\bar{h}| -\\
&\quad - \bar{\omega}_1^1)\,\tilde{A}_2 + (1-\bar{h})\,du\,\tilde{A}_3\,,\\
d\tilde{A}_3 &= -\bar{\omega}_3^0\,\tilde{A}_0 + \frac{1}{1+\bar{h}}\,\bar{\omega}_2^0\,\tilde{A}_1 + \frac{1}{1-\bar{h}}\,\bar{\omega}_1^0\,\tilde{A}_2 - \bar{\omega}_0^0\,\tilde{A}_3\,;
\end{aligned}
$$

vgl.[6], S. 392. Es ist also $\tilde{a}_0^0 = -\bar{a}_3^3$, $\tilde{b}_0^0 = -\bar{b}_3^3$, $\tilde{a}_1^0 = (1+\bar{h})\,\bar{a}_3^2$, $\tilde{b}_1^0 = (1+\bar{h})\,\bar{b}_3^2$, $\tilde{a}_1^1 = \frac{\bar{h}_u}{1+\bar{h}} - \bar{a}_2^2$, $\tilde{b}_1^1 = \frac{\bar{h}_v}{1-\bar{h}} - \bar{b}_2^2$,

$\tilde{a}_1^2 = -\frac{1+\bar{h}}{1-\bar{h}}\,\bar{\beta}$, $\tilde{b}_1^3 = 1+\bar{h}$, $\tilde{a}_2^0 = (1-\bar{h})\,\bar{a}_3^1$, $\tilde{b}_2^0 = (1-\bar{h})\,\bar{b}_3^1$,

$\tilde{b}_2^1 = -\frac{1-\bar{h}}{1+\bar{h}}\,\bar{\gamma}$, $\tilde{a}_2^2 = -\frac{\bar{h}_u}{1-\bar{h}} - \bar{a}_1^1$, $\tilde{b}_2^2 = -\frac{\bar{h}_v}{1-\bar{h}} - \bar{b}_1^1$, $\tilde{a}_2^3 = 1-\bar{h}$,

$\tilde{a}_3^0 = -\bar{a}_3^0$, $\tilde{b}_3^0 = -\bar{b}_3^0$, $\tilde{a}_3^1 = \frac{1}{1+\bar{h}}\,\bar{a}_2^0$, $\tilde{b}_3^1 = \frac{1}{1+\bar{h}}\,\bar{b}_2^0$, $\tilde{a}_3^2 = \frac{1}{1-\bar{h}}\,\bar{a}_1^0$,

$\tilde{b}_3^2 = \frac{1}{1+\bar{h}}\,\bar{b}_1^0$, $\tilde{a}_3^3 = -\bar{a}_0^0$, $\tilde{b}_3^3 = -\bar{b}_0^0$.

<u>Satz 1</u>. Es seien $\bar{\mathcal{P}}$, $\mathcal{P}$ die Flächen mit speziellen begleitenden Tetraedern $\bar{A}_0\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$, $A_0A_1A_2A_3$ bezüglich den asymptotischen Parametern $\bar{u}$, $\bar{v}$, bzw. u, v. Die Gleichheit $\bar{u} = u$,

$\bar{v} = v$ vermittelt zwischen $\bar{\mathcal{P}}$, $\mathcal{P}$ eine Korrespondenz $\mathcal{C}$. Setzen wir weiter voraus, dass eine Berührungskollineation $\mathbb{K}$ der Korrespondenz $\mathcal{C}$ im Punkte $\bar{A}_0 \in \bar{\mathcal{P}}$ folgende Bedingung erfüllt:

<u>Bedingung 1.</u> Ist $\bar{a}$ die Asymptotik im Punkte $\bar{A}_0 \in \bar{P}$, für welche $dv = 0$ gilt, ist $\bar{a}^*$ ihre Entwicklung im lokalen Raume bezüglich $\bar{A}_0$ und haben a, a^* analogische Bedeutung für $\mathcal{P}$, so projizieren sich die Kurven a^*, $\mathbb{K}\bar{a}^*$ vom willkürlichen Punkte der Gerade A_0A_2 in die Kurven mit der analytischen Berührung zweiter Ordnung. Eine solche Kollineation $\mathbb{K}$ ist durch die Relationen bestimmt:

$$
\begin{aligned}
(2) \qquad \mathbb{K}\bar{A}_0 &= A_0, \\
\mathbb{K}\bar{A}_1 &= \frac{1}{2}(s_1^1 - s_0^0)A_0 + A_1, \\
\mathbb{K}\bar{A}_2 &= \frac{1}{2}(t_2^2 - t_0^0)A_0 + A_2, \\
\mathbb{K}\bar{A}_3 &= \alpha_0 A_0 + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3,
\end{aligned}
$$

wo

$$(3) \qquad s_i^j = \bar{a}_i^j - a_i^j, \quad t_i^j = \bar{b}_i^j - b_i^j$$

und wo $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ willkürliche Koefiziente $(\alpha_3 \neq 0)$ sind.

Beweis. Jede Berührungskollineation $\mathbb{K}$ der Korrespondenz $\mathcal{C}$ hat die Form

$$
\begin{aligned}
\mathbb{K}\bar{A}_0 &= A_0, \\
\mathbb{K}\bar{A}_1 &= l A_0 + A_1, \\
\mathbb{K}\bar{A}_2 &= m A_0 + A_2, \\
\mathbb{K}\bar{A}_3 &= \alpha_0 A_0 + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3, \quad \alpha_3 \neq 0.
\end{aligned}
$$

Durch direkte Rechnung folgt nun

$$\mathbb{K}\,\bar{A}_o = A_o\,,$$

$$\mathbb{K}\,d\,\bar{A}_o = d\,A_o + (\bar{\omega}_o^o - \omega_o^o + \ell\,du + m\,dv)\,A_o\,,$$

$$\mathbb{K}\,d^2\,\bar{A}_o = d^2\,A_o + 2(\bar{\omega}_o^o - \omega_o^o + \ell\,du + m\,dv)\,d\,A_o +$$
$$+ \Phi_1\,A_1 + \Phi_2\,A_2 + \Phi_3\,A_3 \quad (\mathrm{mod}\ A_o)\,,$$

wo

$$\Phi_1 = (s_1^1 - s_o^o - 2\ell)du^2 + (t_1^1 - t_o^o + s_2^1 - 2m + 2\alpha_1)du\,dv +$$
$$+ (\bar{\gamma} - \gamma)\,dv^2\,,$$

$$\Phi_2 = (\bar{\beta} - \beta)du^2 + (s_2^2 - s_o^o + t_1^2 - 2\ell + 2\alpha_2)\,du\,dv +$$
$$+ (t_2^2 - t_o^o - 2m)\,dv^2\,,$$

$$\Phi_3 = 2(\alpha_3 - 1)\,du\,dv\,.$$

Die Projektionen der Kurven a^*, $\mathbb{K}\,\bar{a}^*$ vom beliebigen Punkte der Gerade A_oA_2 sollen nun die analytische Berührung zweiter Ordnung haben; eine solche Situation tritt gerade dann ein, wenn der Punkt $\Phi_1A_1 + \Phi_2A_2 + \Phi_3A_3$ für $dv = 0$ das Vielfache von A_2 ist, d.h. wenn $\Phi_1 = \Phi_3 = 0$, oder anders $s_1^1 - s_o^o - 2\ell = 0$. Analogische Relation gilt beim Austausch von u, v. Die Bedingung 1 ist also durch

(4) $\quad \ell = \frac{1}{2}(s_1^1 - s_o^o),\quad m = \frac{1}{2}(t_2^2 - t_o^o)$

charakterisiert und der Beweis ist damit beendet.

Folgerung. Die Berührungskollineation $\mathbb{K}$ aus Satz 1 fixiert die Punkte A_o, A_1, A_2 gerade dann, wenn

(5) $\quad s_1^1 = s_o^o\,,\quad t_2^2 = t_o^o\,.$

Satz 2. Setzen wir voraus, dass für die Berührungskollineation $\mathbb{K}$ aus Satz 1 die Relation

(6) $\quad \mathbb{K}\,(\bar{\theta}_1\bar{A}_1 + \bar{\theta}_2\bar{A}_2 + \bar{A}_3) = \theta_1A_1 + \theta_2A_2 + A_3$

für gewisse $\bar\Theta_1, \bar\Theta_2, \Theta_1, \Theta_2$ gilt. Dann folgt es

(7) $$\alpha_0 = \frac{1}{2}\bar\Theta_1(s_1^1 - s_0^0) + \frac{1}{2}\bar\Theta_2(t_2^2 - t_0^0) ,$$

$$\alpha_1 = \Theta_1 - \bar\Theta_1 ,$$

$$\alpha_2 = \Theta_2 - \bar\Theta_2 ,$$

$$\alpha_3 = 1 .$$

Beweis. Aus (2) und (6) folgt sofort $\bar\Theta_1 \ell + \bar\Theta_2 m + \alpha_0 = 0$, $\bar\Theta_1 + \alpha_1 = \Theta_1$, $\bar\Theta_2 + \alpha_2 = \Theta_2$, $\alpha_3 = 1$ und daraus dann (7).

<u>Folgerungen</u>. Ist besonders $\bar h = h = 0$, $|\bar\beta| = |\beta|$, $|\bar\gamma| = |\gamma|$,

$$\bar\Theta_1 = \frac{1}{2}(\bar b_1^1 - \bar b_2^2 + (\ell n\ |\beta^{2\lambda-1}\gamma^{\lambda}|)_v),\quad \bar\Theta_2 = \frac{1}{2}(\bar a_2^2 - \bar a_1^1 +$$
$$+ (\ell n\ |\beta^{\lambda}\gamma^{2\lambda-1}|)_u) ,$$

$$\Theta_1 = \frac{1}{2}(b_1^1 - b_2^2 + (\ell n\ |\beta^{2\lambda-1}\gamma^{\lambda}|)_v),\quad \Theta_2 = \frac{1}{2}(a^2{}_2 - a_1^1 +$$
$$+ (\ell n\ |\beta^{\lambda}\gamma^{2\lambda-1}|)_u) ,$$ d.h. sind $\bar\Theta_1\bar A_1 + \bar\Theta_2\bar A_2 + \bar\Theta_3\bar A_3$, $\Theta_1 A_1 + \Theta_2 A_2 + \Theta_3 A_3$ die Einheitspunkte der kanonischen Geraden vom Index λ (vgl. [2], S.594), so folgt

(8) $$\alpha_0 = \frac{1}{4}((s_1^1 - s_0^0)(\bar b_1^1 - \bar b_2^2 + (\ell n\ |\beta^{2\lambda-1}\gamma^{\lambda}|)_v) +$$
$$+ (t_2^2 - t_0^0)(\bar a_2^2 - \bar a_1^1 + (\ell n\ |\beta^{\lambda}\gamma^{2\lambda-1}|)_u)) ,$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(t_2^2 - t_1^1) ,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}(s_1^1 - s_2^2) .$$

Gilt noch (5), so hat die Kollineation $\mathbb{K}$ die Form

$$\mathbb{K}\,\bar A_0 = A_0 ,$$

$$\mathbb{K}\,\bar{A}_1 = A_1\,,$$
$$\mathbb{K}\,\bar{A}_2 = A_2\,,$$
$$\mathbb{K}\,\bar{A}_3 = \frac{1}{2}\,(t_2^2 - t_1^1)\,A_1 + \frac{1}{2}\,(s_1^1 - s_2^2)\,A_2 + A_3$$

und $\mathbb{K}$ erhält kanonische Gerade vom jeden Index λ. Die Relation $\mathbb{K}\,\bar{A}_3 = A_3$ gilt dann gerade im Falle

$$(9) \qquad t_1^1 = t_2^2\,, \quad s_1^1 = s_2^2\,.$$

Speziell für $P = \tilde{P}$, $A_i = \tilde{A}_i$ $(i = 0,1,2,3)$, $\bar{h} = 0$, $\bar{a} = \bar{a}_0^0 - \bar{a}_1^1 - \bar{a}_2^2 + \bar{a}_3^3 = 0$, $\bar{b} = \bar{b}_0^0 - \bar{b}_2^2 - \bar{b}_1^1 + \bar{b}_3^3 = 0$ ist (9) erfüllt und $\mathbb{K}$ erhält jeden Punkt $\bar{A}_i$ $(i = 0,1,2,3)$ und kanonische Gerade vom jeden Index λ.

Satz 3. Die Kollineation $\mathbb{K}$ aus Satz 1 soll die Relation (2) erfüllen. Für alle Punkte $\bar{\theta}_1\bar{A}_1 + \bar{\theta}_2\bar{A}_2 + \bar{A}_3$, $\theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 + A_3$, für welche

$$(10) \qquad \mathbb{K}\,(\bar{\theta}_1\bar{A}_1 + \bar{\theta}_2\bar{A}_2 + \bar{A}_3) = \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 + A_3$$

gilt, folgt dann

$$(11) \qquad \frac{1}{2}\,(s_1^1 - s_0^0)\,\bar{\theta}_1 + \frac{1}{2}\,(t_2^2 - t_1^0)\,\bar{\theta}_2 = \alpha_0\,,$$

$$\frac{1}{2}\,(s_1^1 - s_0^0)\,\theta_1 + \frac{1}{2}\,(t_2^2 - t_0^0)\,\theta_2 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2}(s_1^1 - s_0^0) + \frac{\alpha_2}{2}\,(t_2^2 - t_0^0)$$

$$\theta_1 = \bar{\theta}_1 + \alpha_1\,, \quad \theta_2 = \bar{\theta}_2 + \alpha_2\,.$$

Der Beweis ergibt sich sofort aus (7).

Folgerungen. Gilt besonders (5), so sind die Gleichungen (11_{1-2})

identisch erfüllt und alle Punkte $\bar{\theta}_1\bar{A}_1 + \bar{\theta}_2\bar{A}_2 + \bar{A}_3$, $\bar{\theta}_1 \in (-\infty, \infty)$, $\bar{\theta}_2 \in (-\infty, \infty)$, erfüllen auch (11_3). -
Ist aber (5) nicht gültig, so liegen die Punkte $\bar{\theta}_1\bar{A}_1 + \bar{\theta}_2\bar{A}_2 + \bar{A}_3$, bzw. $\theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 + A_3$, welche (10) erfüllen, immer auf der Gerade, die durch (11_1) bzw. (11_2) bestimmt ist.

<u>Satz 4</u>. Es existiert gerade eine Kollineation $\mathbb{K}$ aus Satz 1, welche folgende Bedingung erfüllt:

<u>Bedingung 2</u>. Es seien $\bar{R}, \bar{\bar{R}}$ die Strahlflächen mit erzeugenden Geraden $\bar{A}_0\bar{A}_2$, bzw. A_0A_2 , wo $\bar{A}_0 \in \bar{a}$, $A_0 \in a$.
Die Korrespondenz $\mathbb{C}^*$ zwischen $\bar{R}, \bar{\bar{R}}$ sei so bestimmt, dass sich die Geraden $\bar{A}_0\bar{A}_2$, $A_0 A_2$ für $A_0 = \mathbb{C}\bar{A}_0$ in $\mathbb{C}^*$ entsprechen und dass $\mathbb{K}$ und $\mathbb{C}^*$ zwischen diesen Geraden dieselbe Abbildung vermitteln. Die Kollineation $\mathbb{K}$ ist eine Berührungskollineation für $\mathbb{C}^*$ gleichzeitig in allen Punkten der entsprechenden Geraden.

Beweis. Es seien also $\bar{R}, \bar{\bar{R}}$ die Strahlflächen mit Erzeugenden $\bar{A}_0\bar{A}_2$, A_0A_2 , wo $\bar{A}_0$, A_0 die entsprechenden Asymptotiken v = const beschreiben. Der laufende Punkt der Fläche $\bar{R}$ bzw. $\bar{\bar{R}}$ hat die Form $\bar{B} = \tau\bar{A}_0 + \bar{A}_2$ bzw. $\bar{\bar{B}} = \bar{\tau} A_0 + A_2$. Die Kollineation $\mathbb{K}$ induziert zwischen den Geraden $\bar{A}_0\bar{A}_2$, A_0A_2 $(\mathbb{C}\bar{A}_0 = A_0)$ die Abbildung $\bar{B} = \tau\bar{A}_0 + \bar{A}_2 \rightarrow F = (m + \tau)A_0 + A_2$ und damit ist nun $\mathbb{C}^*$ als Korrespondenz zwischen $\bar{R}$ und $\bar{\bar{R}}$ volkommen bestimmt. Die Kollineation $\mathbb{K}$ ist eine Berührungskollineation bezüglich $\mathbb{C}^*$ simultan in allen Punkten der entsprechenden Geraden $\bar{A}_0\bar{A}_2$, A_0A_2 dann und nur dann, wenn

$$(12) \qquad \mathbb{K}\bar{B} = F ,$$

$$\mathbb{K}\, d\bar{B} = dF + (\lambda_1 du + \lambda_2\, d\tau) F$$

identisch in du, $d\tau$, τ gilt. Dabei ist

$$d\bar{B} = (\bar{a}_2^0\, du + \tau\, \bar{a}_0^0\, du + d\tau)\bar{A}_0 + \tau du\, \bar{A}_1 + \bar{a}_2^2\, du A_2 + (1+\bar{h}) du\, A_3 ,$$

$$dF = (a_2^0\, du + m_1 du + d\tau + (m+\tau)\; a_0^0\, du)\; A_0 + (m+\tau) du\; A_1 +$$

$$+ a_2^2\, du\, A_2 + (1+h)\, du\, A_3 \;,$$

wo $dm = m_1 du$ für $dv = 0$ gesetzt wurde nach

(13) $$d\,\ell = \ell_1\, du + \ell_2\, dv \;,$$

$$dm = m_1\, du + m_2\, dv \;.$$

Durch Einsetzen in (12_2) bekommt man

$$(\bar{a}_2^0\, du + \tau\, \bar{a}_0^0\, du)A_0 + \ell\tau\, du A_0 + m\, \bar{a}_2^2\, du\, A_0 + \bar{a}_2^2\, du\, A_2 +$$

$$+ (1+\bar{h})\; \alpha_0\, du\, A_0 + (1+\bar{h})\; \alpha_1\, du\, A_1 + (1+\bar{h})\; \alpha_2\, du\, A_2 +$$

$$+ (1+\bar{h})\alpha_3\, du\, A_3 = (a_2^0\, du + (m+\tau)\; a_0^0\, du + m_1\, du)\; A_0 +$$

$$+ m\, du\, A_1 + a_2^2\, du\, A_2 + (1+h)\, du\, A_3 + \lambda_1\, du\, A_2 + \lambda_2\, dv\, A_2 +$$

$$+ \lambda_1 (m+\tau)\; du\, A_0 + \lambda_2 (n+\tau)\; d\tau\, A_0$$

und weiter vergleicht man die Koeffiziente bei $du\, A_0$, $du\, A_1$, $du\, A_2$, $du\, A_3$, $\tau\, du\, A_0$, $\tau\, d\,\tau\, A_0$; es folgen die Relationen

(14) $$\bar{a}_2^0 + \bar{a}_2^2\, m + (1+\bar{h})\;\; \alpha_0 = a_2^0 + m\, a_0^0 + m_1 + \lambda_1 m \;,$$

$$\bar{a}_0^0 + \ell = a_0^0 + \lambda_1 \;,$$

$$(1+\bar{h})\; \alpha_1 + m = 0 \;,$$

$$\bar{a}_2^2 + (1+\bar{h})\; \alpha_2 = a_2^2 + \lambda_1 \;,$$

$$\lambda_2 = 0 \;,$$

$$(1+\bar{h})\alpha_3 = 1 + h$$

und daraus schrittweise

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\,(s_1^1 + s_0^0), \quad \lambda_2 = 0 \;, \quad \alpha_3 = \frac{1+h}{1+\bar{h}} \;, \qquad \text{so dass}$$

$$(15)\qquad \alpha_0 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\bar h}\,((t_2^2 - t_o^o)\,(a_o^o - \bar a_2^2 + \frac{1}{2}\,(s_1^1 + s_o^o) + (t_2^2 - t_o^o)_u)\,,$$

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}\,\frac{t_2^2 - t_o^o}{1+h}\,,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\bar h}\,(s_1^1 + s_o^o - 2\,s_2^2)\,,$$

$$\alpha_3 = \frac{1+h}{1+h}\,.$$

Der Satz ist damit bewiesen.

Ist nun speziell $P = \widetilde P$, $A_i = \widetilde A_i$ $(i = 0,1,2,3)$ mit $\bar\omega_o^o + \bar\omega_1^1 + \bar\omega_2^2 + \bar\omega_3^3 = 0$ ([3], S. 386), so folgt nach (I),(1),

$$(2)\quad t_2^2 - t_o^o = \bar b_2^2 - \tilde b_2^2 - \bar b_o^o - \tilde b_o^o = \bar b_2^2 + \frac{\bar h_v}{1-\bar h} + \bar b_1^1 - \bar b_o^o - \bar b_3^3 = -\,\bar b + \frac{\bar h_v}{1-\bar h}\,,$$

$$s_1^1 + s_o^o = \bar a_1^1 - \tilde a_1^1 + \bar a_o^o - \tilde a_o^o = \bar a_1^1 - \frac{\bar h_u}{1-\bar h} + \bar a_2^2 + \bar a_o^o + \bar a_3^3 = -\,\frac{\bar h_u}{1+\bar h}\,,$$

$$s_2^2 = \bar a_2^2 - \tilde a_2^2 = \bar a_2^2 + \frac{\bar h_u}{1-\bar h} + a_1^1\,,\quad s_2^o = \bar a_2^o - \tilde a_2^o = \bar a_2^o - (1-\bar h)\bar a_3^1\,,$$

so dass

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\bar h}\,((-\bar b + \frac{\bar h_v}{1-\bar h})\,(-\bar a_3^3 - \bar a_2^2 + \frac{1}{2}\,\frac{\bar h_u}{1+\bar h}\,) - 2\,(\bar a_2^o - (1-\bar h)\,\bar a_3^1) + (-\bar b + \frac{\bar h_v}{1-\bar h}\,)_u)\,,$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\bar h}\,(-\bar b + \frac{\bar h_v}{1-\bar h}\,)\,,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\bar h}\,(-\,\frac{\bar h_u}{1+\bar h} - 2\,(\bar a_2^2 + \frac{\bar h_u}{1-\bar h} + \bar a_1^1))\,,$$

$$\alpha_3 = \frac{1-\bar{h}}{1+\bar{h}} \quad .$$

Die Kollineation $\mathbb{K}$ übergeht nun in eine Korrelation mit der Inzidenzquadrik, welche durch die Gleichung

$$\frac{2}{1+\bar{h}} x^0 x^3 - 2 x^1 x^2 + \left(\alpha_1 - \frac{1}{2} \frac{\bar{h}_u}{1+\bar{h}} - \frac{1}{2} \bar{b}\right) x^1 x^3 +$$
$$+ \left(\alpha_2 - \frac{1}{2} \frac{\bar{h}_u}{1+\bar{h}} - \frac{1}{2} \bar{a}\right) x^2 x^3 + \alpha_3 (x^3)^2 = 0$$

beschrieben wird.

Analogisch kann man schliessen, indem man in Bedingung 2 u, v einander austauscht.

Die Idee, die zur Konstruktion der Kollineation $\mathbb{K}$ aus Satz 4 führt, stammt von E. Čech ([1]). In Artikel [1] wurde diese Idee zu einer neuen Definition der Lieschen Quadrik im Punkte der Fläche des gewöhnlichen Raumes verwendet. Der Fall $\bar{\mathcal{P}}$, $\mathcal{P} = \tilde{\mathcal{P}}$ (nach unseren Bezeichnungen)hat A. Švec für die Flächen vom Typus $\mathcal{P}^2_{0,3}$ in [5] behandelt.

Satz 5. Es gelten die Voraussetzungen des Satzes 4 und $P = \tilde{P}$, $A_i = \tilde{A}_i$ $(i = 0,1,2,3)$, $\bar{h} = 0$. Dann fällt die Kollineation $\mathbb{K}$ aus Satz 4 mit der Grundkorrelation dieser Dualisation (in einer solchen Grundkorrelation gilt $\bar{A}_i \to \tilde{A}_i$ für $i = 0,1,2,3$) gerade dann zusammen, wenn

$$(16) \qquad \bar{a} = 0, \quad \bar{b} = 0, \quad \bar{a}^0_2 = \bar{a}^1_3 \quad .$$

Beweis. Sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, so gilt $\mathbb{K}\bar{A}_i = \tilde{A}_i$ $(i = 0,1,2,3)$ gerade dann, wenn

$$(17) \qquad s^0_0 = s^1_1 = s^2_2 \quad , \quad t^0_0 = t^2_2 \; , \quad s^0_2 = 0 \; ,$$

wie es sofort aus (15) und (2) im Falle $\ell = m = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0 = 0$ folgt. In unserem Falle sind aber die Gleichungen (17) gerade der Form (16), so dass die Behauptung bewiesen ist.

Eine andere Bedeutung der Gleichungen (16) bei $\bar{h} = 0$ ist: Die Quadrik Q_v (0) aus [6], S. 390, fällt mit der sog. "wesentlichen" Oskulationsquadrik mit der Gleichung $x^0 x^3 - x^1 x^2 = 0$ ([2], S.597) zusammen.

Literatur:

[1] E. ČECH - A. ŠVEC, Quadriques de Lie d'une surface, Czech.Math.J. 12(1962),175-177.

[2] B. CENKL, La normale d'une surface dans l'espace à connexion projective, Czech.Mat.J. 12(1962), 582-608.

[3] A. ŠVEC, L'application des variétés à connexion à certains problèmes de la géométrie différentielle, Czech.Mat.J. 10(1960), 523-550.

[4] A. ŠVEC, K výkladu teorie prostorů s konexí, Čas. pěst. mat. 86(1961), 425-432.

[5] A. ŠVEC, Les quadriques de Lie d'une surface plongée dans un surface tridimensionel à connection projective, Czech.Mat.J. 11(1961),134-142.

[6] A. ŠVEC, Sur la géométrie différentielle d'une surface plongée dans un espace à trois dimensions à connexion projective, Czech.Mat.J. 11(1961), 386-397.