

A. L. Kuz'mina

О краевой задаче Гильберта с производным смещением

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 5 (1964), No. 3, 117--120

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/104965>

Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1964

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ГИЛЬБЕРТА С ПРОИЗВОДНЫМ СМЕЩЕНИЕМ

А.Л. КУЗЬМИНА, Казань

Пусть L - замкнутая кривая Ляпунова, ограничивающая область D , $\omega(t)$, $t \in L$, - функция, имеющая непрерывную и отличную от нуля производную, отображает взаимно однозначно с сохранением направления обхода кривую L в себя.

Краевая задача Гильберта со смещением формулируется следующим образом.

Требуется найти аналитическую в области D и непрерывную в \bar{D} функцию $\Phi(z) = u(z) + i v(z)$ удовлетворяющую на L условиям

$$(1) \quad a(t) u(\omega(t)) + b(t) v(t) = c(t),$$

где $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ - заданные на L вещественные функции.

Частный случай этой и более общей задачи, когда $\omega(\omega(t)) = t$, рассмотрен в работах И.М. Мельника [1] и С.Г. Литвинчука и Э.Г. Хасабова [2].

В настоящей заметке мы изучим краевую задачу Гильберта с производным смещением $\omega(t)$.

Нетрудно показать, что краевая задача (1) для произвольной области, ограниченной кривой Ляпунова, может быть сведена с помощью конформного отображения к аналогичной задаче для круга.

Поэтому мы ограничимся изучением последней.

Итак, пусть L - единичная окружность.

Перепишем краевое условие (1)

$$(1') \quad \frac{a(t)}{2} [\Phi^+(\omega(t)) + \overline{\Phi^+(\omega(t))}] + \frac{b(t)}{2i} [\Phi^+(t) - \overline{\Phi^+(t)}] = c(t)$$

и будем искать решение краевой задачи (1') в виде:

$$(2) \quad \Phi(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{q(\tau)}{\tau-x} d\tau + iC,$$

где $q(\tau)$ - вещественная функция, C - некоторая вещественная постоянная.

Подставив граничные значения $\Phi(x)$ в (1'), придем к особому интегральному уравнению со смещением

$$(3) \quad a(t)c_f(\omega(t)) - \frac{ib(t)}{\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{q(\tau)}{\tau-t} d\tau = c^*(t),$$

где $c^*(t) = c(t) - 2iCa(t) - [a(t) - ib(t)]C'$,

$$C' = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{q(\tau)}{\tau} d\tau.$$

Очевидно, что каждому решению особого интегрального уравнения (3) соответствует по формуле (2) решение краевой задачи (1') или (1) и обратно.

Рассмотрим особое интегральное уравнение со смещением вида:

$$(4) \quad c_f(t) + \frac{b_1(t)}{\pi i} \int_L \frac{q(\tau)}{\tau - \omega^{-1}(t)} d\tau = c_1(t),$$

где $b_1(t)$ и $c_1(t)$ - комплексные функции, заданные на L , L - гладкая замкнутая кривая.

Обозначим через C_α пространство функций $f(t)$, $t \in L$, удовлетворяющих условию H_α , $0 < \alpha \leq 1$, с нормой

$$C_\alpha(f) = C(f) + H(f, \alpha),$$

где $C(f) = \max_{t \in L} |f(t)|$, $H(f, \alpha) = \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{|f(t_1) - f(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha}$.

C_α - есть B - пространство.

Будем предполагать, что функции $b_1(t)$ и $c_1(t) \in C_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$.

Так как линейный оператор $\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{q(\tau)}{\tau-t} d\tau$ преобразует пространство C_α , $0 < \alpha < 1$, в себя и является

ся ограниченным оператором (см., например, [3]), то оператор

$$Sg = \frac{b_1(t)}{\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{\tau - \omega^{-1}(t)} d\tau$$

в силу сделанных предположений относительно $b_1(t)$ и $\omega(t)$ будет также линейным ограниченным оператором.

При условии, что $C_\alpha(b_1)$ меньше определенной постоянной, зависящей от функции $\omega(t)$, оператор S является оператором сжатия. Тогда особое интегральное уравнение (4) будет иметь единственное решение $g(t)$, $g(t) \in C_\alpha$, если $0 < \alpha < 1$, и $g(t) \in C_{1-\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$ (ε - любое), если $\alpha = 1$.

Очевидно, что особое интегральное уравнение со смещением (3), если функции $a(t)$, $a(t) \neq 0$, $b(t)$ и $c(t) \in C_\alpha$, $0 < \alpha \neq 1$, может быть приведено к особому интегральному уравнению вида (4), а поэтому, если $C_\alpha(\frac{b}{a})$ меньше определенной постоянной, зависящей от $\omega(t)$, будет иметь решение $g(t)$, $g(t) \in C_\alpha$, если $0 < \alpha < 1$, и $g(t) \in C_{1-\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$ (ε - любое), если $\alpha = 1$, линейно зависящее от одной вещественной произвольной постоянной.

Следовательно, и краевая задача (1') или (1) при этих условиях имеет решение, зависящее от одной вещественной произвольной постоянной.

В заключение укажем одну краевую задачу для уравнения смешанного типа

$$(*) \quad u_{x^2} + \operatorname{sgn} y u_{y^2} = 0,$$

приводящуюся к краевой задаче (1) известным способом, предложенным А.В. Вицадзе (см. также [4]).

Требуется найти функцию $u(x, y)$ являющуюся решением уравнения (*) при $y \neq 0$ в области D , ограниченной кривой Липунова \bar{b} , лежащей в полуплоскости $y \geq 0$ и касающейся при Ox в точках $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$ характе-

рестиками уравнения AC и BC , непрерывную в $\bar{D} = (0,1)$, частные производные которой $u'_x(x, y)$ и $u'_y(x, y)$ непрерывно продолжимы на отрезок AB и удовлетворяющую условиям:

$$u|_{\sigma} = \varphi(\tau), \quad u|_{AC} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

и

$$\begin{aligned} a(x)u^+(\omega(x), 0) + b(x)u^-(x, 0) &= c(x), \\ a_1 u^{+y}(x, 0) + b_1 u^{-y}(x, 0) &= c_1(x), \end{aligned}$$

$x \in AB$

где a_1 и b_1 - некоторые постоянные, отличные от нуля, $\omega'(x)$ - функция с непрерывной производной $\omega'(x)$ причем $\omega'(x) \neq 0$ и $\omega'(0) = \omega'(1) = 1$, взаимно однозначно отображающая отрезок AB в себя, $\varphi(\tau)$, $\psi(x)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ и $c_1(x)$ - некоторые заданные вещественные функции.

Л и т е р а т у р а

- [1] И.М. МЕЛЬНИК, ДАН, 138, № 3, 1961.
- [2] Г.С. ЛИТВИНЧУК и Э. ХАСАВОВ, ДАН, 142, № 2, 1962.
- [3] Ф.Д. ГАХОВ, Краевые задачи, М. 1963.
- [4] В.И. БЕГАЛОВ, Ученые записки КГУ, т.122, кн.3, 1962.