Václav Havel

Konjugierte Netze und Axialsysteme eines Flächenpaares

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 5 (1964), No. 1, 1--11

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104954

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
5, 1 (1964)

KONJUGIERTE NETZE UND AXIALSYSTEME EINES FLÄCHENPAARES

Václav HAVEL, Brno

Dieses Artikel stellt eine Fortsetzung der Arbeit [6] vor; es wird die Frage einer geeigneten gemeinsamen Verallgemeinerung der Probleme von E. Bompiani [1] und J. Brejcha [2] behandelt. Wir benützen die Methode "der scheinbaren Einbettung in projektiven Raum" [9].

1. Spezielles begleitendes Tetraeder. Konjugi-ertes Netz, kanonische Geraden und Fubinische Krümmung

Unter einem <u>speziellen begleitenden Tetraeder</u> der Fläche Π mit projektivem Zusammenhang verstehen wir das begleitende Tetraeder $A_0 A_1 A_2 A_3$ mit

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
dA_0 &= \omega_0^0 A_0 + du\, A_1 + dv\, A_2 ,\\
dA_1 &= \omega_1^0 A_0 + \omega_1^1 A_1 + \beta\, du\, A_2 + (1-h)\, dv\, A_3 ,\\
dA_2 &= \omega_2^0 A_0 + \gamma\, dv\, A_1 + \omega_2^2 A_2 + (1+h)\, du\, A_3 ,\\
dA_3 &= \omega_3^0 A_0 + \omega_3^1 A_1 + \omega_3^2 A_2 + \omega_3^3 A_3 ;
\end{aligned}
$$

dabei sind u, v <u>asymptotische Parametern</u>, die Koeffizienten ω_i^j sind der Form $a_i^j du + b_i^j dv$, β und γ sind <u>verallgemeinerte Fubinische Koeffizienten</u> und h ist die <u>Torsion</u> der Fläche. Im weiteren setzen wir immer voraus, dass $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $h \neq 1$, $h \neq -1$. Fixiert man nachträglich die Gerade $[A_0 A_3]$, so haben auch die Punkte A_1, A_2 eine recht bestimmte Lage: es handelt sich dann um die Berührungspunkte der Ebenen $[A_0 A_1 A_3]$,

$[A_0 A_2 A_3]$ bezüglich gewisser Lieschen Quadriken; [10], S. 396.

Ist $v' = \frac{dv}{du} = M(u, v)$ die Differentialgleichung einer Kurvenschar $\mathfrak{M}$ auf Π, so ist $v' = H.M, H = -\frac{1+h}{1-h}$, die Differentialgleichung der zu $\mathfrak{M}$ konjugierten Kurvenschar $\mathfrak{M}^*$; vgl. [6], § 2.

Es sei $a = a_2^2 - a_1^1 - 2x^2$, $b = b_1^1 - b_2^2 - 2x^1$; die Gerade $[A_0, x^1A_1 + x^2A_2 + A_3]$, $a = (\ln|\beta^{-\lambda}\gamma^{1-2\lambda}|)_u$, $b = (\ln|\beta^{1-2\lambda}\gamma^{-\lambda}|)_v$,

bezeichnen wir dann als kanonisch vom Index λ in $A_0 \in \Pi$. Die Wahl der Geraden $[A_0 A_3]$ in kanonischer Geraden vom Index λ ist durch folgende Relationen charakterisierbar:

$$a_2^2 - a_1^1 - (\ln|\beta^{-\lambda}\gamma^{1-2\lambda}|)_u = b_1^1 - b_2^2 - (\ln|\beta^{1-2\lambda}\gamma^{-\lambda}|)_v = 0 .$$

Unter der Fubinischen Krümmung der Fläche verstehen wir

$$K = -\frac{(\ln|\beta\gamma|)_{uv}}{\beta\gamma} \qquad ; \text{vgl. } [6], \S\ 2 .$$

2. Formulation des Problems

Es seien Π, $\bar{\Pi}$ die Flächen mit speziellen begleitenden Tetraedern $A_0A_1A_2A_3$, $\bar{A}_0\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$; die Angaben bezüglich $\bar{\Pi}$ bezeichnen wir mit Streifen. Beide Flächen entsprechen sich in der Punktkorrespondenz $\mathbb{K}$, die durch die Gleichheit der betreffenden asymptotischen Parametern $\bar{u} = u$, $\bar{v} = v$ gegeben wird. Zu Π schliessen wir die Kongruenz Γ der Geraden $[A_0 B]$, $B = x^1A_1 + x^2A_2 + A_3$ und zu $\bar{\Pi}$ analogisch die Kongruenz $\bar{\Gamma}$ der Geraden $[\bar{A}_0 \bar{B}]$, $\bar{B} = \bar{x}^1\bar{A}_1 + \bar{x}^2\bar{A}_2 + \bar{A}_3$, an.

Es sollen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen gefunden werden, damit

(I) eine unendliche Menge der Kurvenscharen $\mathfrak{M}$ auf Π existiert, so dass sie alle dem zu Γ assoziierten Axialsystem

$\mathcal{A}$ gehören und dass die Scharen $\overline{\mathfrak{M}} = (\mathbb{K}\,\mathfrak{M})^*$ analogisch dem zu $\overline{\Gamma}$ assoziierten Axialsystem $\overline{\mathcal{A}}$ gehören.

Die ausgezeichneten besonderen Fälle sind:

(II) $\overline{\beta} = \beta$, $\overline{\gamma} = \gamma$, $\overline{h} = h$,

(III) $\overline{\beta} = -\beta$, $\overline{\gamma} = -\gamma$, $\overline{h} = -h$,

wo (II) weiter bis auf die Identifikation von Π, $\overline{\Pi}$ und (III) bis auf Dualisation zwischen Π, $\overline{\Pi}$ reduzierbar ist.

3. Ein Lehrsatz über die Torsion

Die Differentialgleichung des zu Γ bzw. zu $\overline{\Gamma}$ assoziirten Axialsystems $\mathcal{A}$ auf Π bzw. $\overline{\mathcal{A}}$ auf $\overline{\Pi}$, ist

(2) $v'' = -\beta - a v' + b v'^2 + \gamma v'^3$, bzw.

($\overline{2}$) $v'' = -\overline{\beta} - \overline{a} v' + \overline{b} v'^2 + \overline{\gamma} v'^3$;

mit Strichen sind Ableitungen nach u in der Gleichung $v = v(u)$ einer Axialkurve bezeichnet; [6] § 3 .

Es seien $v' = M(u,v)$, $v' = \overline{H} \cdot M$ die Differentialgleichungen der Schar $\mathfrak{M}$ auf Π und der Schar $\overline{\mathfrak{M}} = (\mathbb{K}\,\mathfrak{M})^*$ auf $\overline{\Pi}$ .Dann ist

$v' = M$, $v'' = M_u + M M_v$ bzw. $v' = \overline{H} M$, $v'' = M \overline{H}_u + \overline{H} M_u + (M \overline{H}_v + \overline{H} M_v) \overline{H} M$

und aus $\mathfrak{M} \subset \mathcal{A}$, $\overline{\mathfrak{M}} \subset \overline{\mathcal{A}}$ es folgt

(3) $M_u + M M_v = -\beta - a M + b M^2 + \gamma M^3$,

($\overline{3}$) $M \overline{H}_u + \overline{H} M_u + M^2 \overline{H} \overline{H}_v + M \overline{H}^2 M_v = -\overline{\beta} - \overline{a}\, \overline{H} M + \overline{b}\, \overline{H}^2 M^2 + \overline{\gamma}\, \overline{H}^3 M^3$.

Daraus ergibt es sich weiter

$$M_u = \frac{1}{\overline{H} - \overline{H}^2}\Big((\beta \overline{H}^2 - \overline{\beta}) M + (-\overline{H}_u + \overline{H}^2 \cdot a - \overline{H}\,\overline{a}) M^2 + \tag{4}$$
$$+ (-\overline{H}\,\overline{H}_v - \overline{H}^2 b + \overline{H}^2 \overline{b}) M^3 + (-\overline{H}^2 \gamma + \overline{H}^3 \overline{\gamma}) M^4 \Big), \quad \text{bzw.}$$

$$M_v = \frac{1}{\bar{H}^2 - \bar{H}}((-\bar{\beta}+\beta\bar{H})M^1 + (-\bar{H}_u + \bar{H}a - \bar{H}\bar{a}) + \tag{$\bar{4}$}$$
$$+ (-\bar{H}_v - b\bar{H} + \bar{b}\bar{H}^2)M^2 + (-\bar{H}\gamma + \bar{H}^3\bar{\gamma})M^3) .$$

Ist die Integrabilitätsbedingung des Gleichungssystems (4), ($\bar{4}$) identisch erfüllt, so folgt insbesondere

$$(\beta\bar{H}^2 - \bar{\beta})(-\bar{\beta} + \beta\bar{H}) = 0, \text{ d.h. } \bar{\beta} = \begin{cases} \bar{H}\beta \\ \bar{H}^2\beta \end{cases} , \qquad \text{bzw.}$$

$$(-\gamma\bar{H} + \bar{\gamma}\bar{H}^3)(-\gamma\bar{H}^2 + \bar{\gamma}\bar{H}^3) = 0, \text{ d.h. } \bar{\gamma} = \begin{cases} \gamma . \bar{H}^{-1} . \\ \gamma . \bar{H}^{-2} . \end{cases}$$

Wir bekamen Lehrsatz 1 : Ist für Π, $\bar{\Pi}$ mit Γ, $\bar{\Gamma}$ die Bedingung (I) erfüllt, so gilt eine der Relationen

a) $\bar{\beta} = \bar{H}^2\beta$, $\bar{\gamma} = \bar{H}^{-2}\gamma$,

b) $\bar{\beta} = \bar{H}\beta$, $\bar{\gamma} = \bar{H}^{-1}\gamma$,

c) $\bar{\beta} = \bar{H}^2\beta$, $\bar{\gamma} = \bar{H}^{-1}\gamma$,

d) $\bar{\beta} = \bar{H}\beta$, $\bar{\gamma} = \bar{H}^{-2}\gamma$.

Insbesondere ist a), $\bar{h} = h \Rightarrow \bar{h} = h = 0$; b), $\bar{h} = -h \Rightarrow \bar{h} = h = 0$; a), $\bar{\beta} = \beta \Rightarrow \bar{h} = 0$; c), $\bar{\beta} = \beta \Rightarrow \bar{h} = 0$; b), $\bar{\beta} = -\beta \Rightarrow \bar{h} = 0$; d), $\bar{\beta} = -\beta \Rightarrow \bar{h} = 0$.

Gelten für Π, $\bar{\Pi}$ mit Γ, $\bar{\Gamma}$ die Bedingungen (I) und (II) bzw. (I) und (III), so ist $\bar{h} = h = 0$.

Im weiteren zeigen wir, dass es tatsächlich genügt $\bar{h} = h = 0$ voraussetzen um eine gemeinsame Verallgemeinerung der Probleme I*, II* ([6]) von E. Bompiani resp. J. Brejcha zu gewinnen. Beide diser Probleme bekommen wir nach der Identifikation von Π, $\bar{\Pi}$ und Γ, $\bar{\Gamma}$, bzw. wenn wir $\bar{\Pi}$ als Dualisation von Π erklären und wenn $\bar{\Gamma}$ der Kongruenz entspricht bei den Korrelationen in denen immer A_0, A_1, A_2, A_3 auf $\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ überführt werden; [6], § 3 .

4. Die Folgen aus der Voraussetzung der Torsion Null

Es seien Π, $\bar{\Pi}$ mit Γ, $\bar{\Gamma}$ gegeben und setzen wir $\bar{h} = h = 0$ voraus. Also ist $\bar{H} = -1$ und (3), $(\bar{3})$ lauten nun

$$(5) \quad M_u + MM_v = -\beta - aM + bM^2 + \gamma M^3 \,,$$

$$(\bar{5}) \quad -M_u + MM_v = -\bar{\beta} + \bar{a}M + \bar{b}M^2 - \bar{\gamma}M^3$$

und daraus

$$(6) \quad 2M_u = -\beta + \bar{\beta} - (a + \bar{a})M + (b - \bar{b})M^2 + (\gamma + \bar{\gamma})M^3 \,,$$

$$(\bar{6}) \quad 2M_v = -(\beta + \bar{\beta})M^{-1} + (-a + \bar{a}) + (b + \bar{b})M + (\gamma - \bar{\gamma})M^2 \,.$$

Die Integrabilitätsbedingung für das Paar der Gleichungen (6), $(\bar{6})$ lautet jetzt

$$(7) \left\{ \begin{aligned} &(-\beta + \bar{\beta})_v - (a + \bar{a})_v M - (a + \bar{a})\tfrac{1}{2}(-(\beta + \bar{\beta})M^{-1} + (-a + \bar{a}) + \\ &+ (b + \bar{b})M + (\gamma - \bar{\gamma})M^2) + (b - \bar{b})_v M^2 + (b - \bar{b})(-(\beta + \bar{\beta}) + \\ &+ (-a + \bar{a})M + (b + \bar{b})M^2 + (\gamma - \bar{\gamma})M^3) + (\gamma + \gamma)_v M^3 + (\gamma + \bar{\gamma}) \\ &\tfrac{3}{2}(-\beta + \bar{\beta})M + (-a + \bar{a})M^2 + (b + \bar{b})M^3 + (\gamma - \bar{\gamma})M^4) = -(\beta + \bar{\beta})_u M^{-1} + \\ &+ (\beta + \bar{\beta})M^{-2}\tfrac{1}{2}((-\beta + \bar{\beta}) - (a + \bar{a})M + (b - \bar{b})M^2 + (\gamma + \bar{\gamma})M^3) + \\ &+ (-a + \bar{a})_u + (b + \bar{b})_u M + (b + \bar{b})\tfrac{1}{2}((-\beta + \bar{\beta}) - (a + \bar{a})M + \\ &+ (b - \bar{b})M^2 + (\gamma + \bar{\gamma})M^3) + (\gamma - \bar{\gamma})_u M^2 + (\gamma - \bar{\gamma})((-\beta + \bar{\beta})M - \\ &- (a + \bar{a})M^2 + (b - \bar{b})M^3 + (\gamma + \bar{\gamma})M^4) \,. \end{aligned} \right.$$

Vergleicht man die Koeffizienten bei M^{-2}, M^4, so bekommt man $0 = (\beta + \bar{\beta})(-\beta + \bar{\beta})$ bzw. $(\gamma - \bar{\gamma})(\gamma + \bar{\gamma}) = 0$, d.h. $\bar{\beta} = \pm\beta$, $\bar{\gamma} = \pm\gamma$.

Lehrsatz 2 : Erfüllen die Flächen Π, $\bar{\Pi}$ der Torsion Null mit Γ, $\bar{\Gamma}$ die Bedingung (I), so ist $|\bar{\beta}| = |\beta|$, $|\bar{\gamma}| = |\gamma|$.

Die einzelnen Fälle sind:

α) $\bar{\beta} = \beta$, $\bar{\gamma} = \gamma$, $\bar{h} = h = 0$,

$$\beta)\quad \bar\beta = -\beta,\quad \bar\gamma = -\gamma,\quad \bar h = h = 0,$$

$$\gamma)\quad \bar\beta = -\beta,\quad \bar\gamma = \gamma,\quad \bar h = h = 0,$$

$$\delta)\quad \bar\beta = \beta,\quad \bar\gamma = -\gamma,\quad \bar h = h = 0.$$

5. Fall α)

Für Π, $\bar\Pi$ mit Γ, $\bar\Gamma$ es gelte α). Die Gleichungen (6), ($\bar 6$), (7) haben die Form

$$(6_\alpha)\quad 2M_u = -(a+\bar a)M + (b-\bar b)M^2 + 2\gamma M^3\ ,$$

$$(\bar 6_\alpha)\quad 2M_v = -2\beta M^{-1} + (-a+\bar a) + (b+\bar b)M\ ;$$

$$(7_\alpha)\left\{\begin{aligned} &-(a+\bar a)_v M - (a+\bar a)\tfrac{1}{2}(-2\beta M^{-1} + (-a+\bar a) + (b+\bar b)M) + \\ &+(b-\bar b)_v M^2 + (b-\bar b)(-2\beta + (-a+\bar a)M + (b+\bar b)M^2) + \\ &+2\gamma_v M^3 + 3\gamma(-2\beta M + (-a+\bar a)M^2 + (b+\bar b)M^3) = \\ &= -2\beta_u M^{-1} + \beta M^{-2}(-a+\bar a)M + (b-\bar b)M^2 + 2\gamma M^3) + \\ &+(-a+\bar a)_u + (b+\bar b)_u M + (b+\bar b)\tfrac{1}{2}(-(a+\bar a)M + (b-\bar b)M^2 + 2\gamma M^3) \end{aligned}\right.$$

oder

$$\begin{aligned} &((a+\bar a)\beta)M^{-1} + (-\tfrac{1}{2}(a+\bar a)(-a+\bar a) - 2(b-\bar b)\beta) + (-(a+\bar a)_v - \tfrac{1}{2} \\ &(a+\bar a)(b+\bar b) + (b-\bar b)(-a+\bar a) - (\beta\gamma)M + ((b-\bar b)_v + (b-\bar b)(b+\bar b) + \\ &+3\gamma(-a+\bar a))M^2 + (2\gamma_v + 3\gamma(b+b^2))M^3 = (-2\beta_u - \beta(a+\bar a))M^{-1} + \\ &+(\beta(b-\bar b) + (-a+\bar a)_u) + (2\beta\gamma + (b+\bar b)_u - \tfrac{1}{2}(a+\bar a)(b+\bar b))M + \\ &+(\tfrac{1}{2}(b+\bar b)(b-\bar b))M^2 + (\gamma(b+\bar b))M^3\ . \end{aligned}$$

Vergleicht man die Koeffizienten bei M^{-1} und M^3 , dann bekommt man

$$(8_{-1})\quad (\ln|\beta|)_u + a + \bar a = 0,$$

$$(8_3)\quad (\ln|\gamma|)_v + b + \bar b = 0,$$

und analogisch für M^0, M^2, M

$$(8_0)\quad \tfrac{1}{2}(a^2 - \bar a^2) - 3\beta(b-\bar b) + (a-\bar a)_u = 0\ ,$$

$(8_2)\quad \frac{1}{2}(b^2-\bar{b}^2)-3\gamma(a-\bar{a})+(b-\bar{b})_v=0,$

$(8_1)\quad (a+\bar{a})_v+(b+\bar{b})_u+(a-\bar{a})(b-\bar{b})+8\beta\gamma=0.$

Die Gleichungen (8_0) und (8_2) sind für einfache Wahl $\bar{a}=a,\ \bar{b}=b$ erfüllt. Die Bedeutung einer solchen Wahl beschreibt

Lehrsatz 3 : Gegeben seien $\Pi, \bar{\Pi}$ mit $\Gamma, \bar{\Gamma}$ und es gelte $|\bar{\beta}|=|\beta|,\ |\bar{\gamma}|=|\gamma|,\ \bar{h}-h=0.$ Die Relationen $\bar{a}=a,$ $\bar{b}=b$ vermitteln dann eine Kollineation $\mathbb{L}$ zwischen Geradenbündeln $[A_0 B],[\bar{A}_0\bar{B}]$, wobei jeder kanonischen Geraden wieder kanonische Gerade desselben Indexes und der asymptotischen u-Tangente (v-Tangente) entspricht. Die Transformation $\mathbb{L}$ ist vollkommen bestimmt, wenn die kanonischen Geraden verschiedener Indexe nicht zusammen fallen.

Beweis. Aus $|\bar{\beta}|=|\beta|,\ |\bar{\gamma}|=|\gamma|$ es folgt $(\ln|\bar{\beta}^{-\lambda}\bar{\gamma}^{1-\lambda}|)=$ $=(\ln|\beta^{-\lambda}\gamma^{1-\lambda}|)_u,\ (\ln|\bar{\beta}^{1-\lambda}\bar{\gamma}^{-\lambda}|)_v=(\ln|\beta^{1-\lambda}\gamma^{-\lambda}|)_v$, sodass aus der Definition der kanonischen Geraden und aus $\bar{a}=a,\ \bar{b}=b$ das Erhalten der kanonischen Geraden jeden Indexes bei $\mathbb{L}$ folgt. Die Transformation $\mathbb{L}$ induziert eine Kollineation zwischen den Ebenen $[A_1A_2A_3]$, $[\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3]$, wobei (in affinen Koordinaten $x^1,\ x^2$) der Geraden $x^1=0$ bzw. $x^2=0$ die Gerade $\bar{x}^1=0$ bzw. $\bar{x}^2=0$ entspricht. Der Rest des Beweises ist schon offensichtlich.

Kehren wir wieder zum System der Gleichungen (8) zurück und setzen wir wieder $\bar{a}=a,\ \bar{b}=b$ voraus. Dann gelten (8_0), (8_2) und die restlichen Gleichungen (8) bekommen die Form $(\ln|\beta|)_u=$ $=-2a,\ (\ln|\gamma|)_v=-2b;\ a_v-b_u=-4\beta\gamma$ und mit Hilfe der Fubinischen Krümmung haben wir also

(9) $\quad(\ln|\beta|)_u=-2a,\ (\ln|\gamma|)_v=-2b,\quad K=-8.$

Daraus und aus umgekehrtem Verlauf unserer Betrachtung folgt

Satz 1 : Für $\Pi, \bar{\Pi}$ mit $\Gamma, \bar{\Gamma} = L\Gamma$ es gelte α). Die Bedingung (I) gilt gerade dann, wenn die beiden Kongruenzen durch die kanonischen Geraden vom Index $\frac{1}{2}$ gebildet sind und wenn die Fubinische Krümmung gleich -8 ist.

6. Fall β)

Es gelte nun für $\Pi, \bar{\Pi}$ mit $\Gamma, \bar{\Gamma}$ die Bedingung β). Die Gleichungen (6), ($\bar{6}$), (7) lauten dann

$$(6_\beta) \quad 2M_u = -2\beta - (a+\bar{a})M + (b-\bar{b})M^2 ,$$

$$(\bar{6}_\beta) \quad 2M_v = (-a+\bar{a}) + (b+\bar{b})M + 2\gamma M^2 ;$$

$$(7_\beta) \quad \begin{cases} -2\beta_v - (a+\bar{a})_v M - (a+\bar{a})\frac{1}{2}((-a+\bar{a}) + (b+\bar{b})M + \\ +2\gamma M^2) + (b-\bar{b})_v M^2 + (b-\bar{b})((-a+\bar{a})M + (b+\bar{b})M^2 + \\ +2\gamma M^3) = (-a+\bar{a})_u + (b+\bar{b})_u M + (b+\bar{b})\frac{1}{2}(-2\beta - (a+\bar{a})M + \\ +(b-\bar{b})M^2 + 2\gamma_u M^2 + 2\gamma(-2\beta M - (a+\bar{a})M^2 + (b-\bar{b})M^3 \end{cases}$$

oder

$$\begin{aligned} &(-2\beta_v - \tfrac{1}{2}(-a^2+\bar{a}^2)) + (-(a+\bar{a})_v - \tfrac{1}{2}(a+\bar{a})(b+\bar{b}) + (b-\bar{b})(-a+\bar{a}))M + \\ &+ (-(a+\bar{a})\gamma + (b-\bar{b})_v + b^2 - \bar{b}^2)M^2 + 2\gamma(b-\bar{b})M^3 = ((-a+\bar{a})_u - \\ &- \beta(b+\bar{b})) + ((b+\bar{b})_u - \tfrac{1}{2}(b+\bar{b})(a+\bar{a}) - 4\beta\gamma)M + (\tfrac{1}{2}(b^2-\bar{b}^2) + \\ &+ 2\gamma_u - 2\gamma(a+\bar{a}))M^2 + 2\gamma(b-\bar{b})M^3 . \end{aligned}$$

Vergleicht man die Koeffizienten bei gleichgelegten Gliedern , so bekommt man

$$(10_0) \qquad -2\beta_v - \frac{1}{2}(-a^2 + a^2) = (-a+\bar{a})_u - \beta(b+\bar{b}),$$

$$(10_1) \qquad -(a+\bar{a})_v + (b-\bar{b})(-a+\bar{a}) = (b+\bar{b})_u - 4\beta\gamma ,$$

$$(10_2) \qquad -(a+\bar{a})\gamma + (b-\bar{b})_v + \frac{1}{2}(b^2-\bar{b}^2) = 2\gamma_u - 2\gamma(a+\bar{a}).$$

Aus $\bar{a} = a, \bar{b} = b$ ergibt sich also $-2\beta_v = -\beta(b+\bar{b}), (a+\bar{a})_v + +(b+\bar{b})_u = 4\beta\gamma, (a+\bar{a})\gamma = 2\gamma_u$, d.h. $(\ln|\beta|)_i = b, (\ln|\gamma|)_u = a,$ $a_v + b_u = 2\beta\gamma$ und nach endlicher Überschreibung der letzten Gleichung

$$(11) \quad (\ln|\beta|)_v = b, \quad (\ln|\gamma|)_u = a, \quad K = -2.$$

Daraus und aus der umgekehrten Betrachtung folgt

Satz 2 : Gilt für Π, $\overline{\Pi}$ mit $\Gamma, \overline{\Gamma} = \mathbb{L}\Gamma$ die Bedingung β), so ist (I) gerade dann erfüllt, wenn die beiden Kongruenzen Γ, $\overline{\Gamma}$ durch die kanonischen Geraden vom Index Null gebildet sind und wenn die Fubinische Krümmung beider Flächen gleich -2 ist.

7. Fall γ)

Es gelte Π, $\overline{\Pi}$ mit Γ, $\overline{\Gamma}$ die Bedingung γ). Die Gleichungen (6), ($\overline{6}$), (7) kann man so überschreiben

$$(6_\gamma) \quad 2M_u = -2\beta - (a+\bar{a})M + (b-\bar{b})M^2 + 2\gamma M^3 ,$$

$$(\overline{6}_\gamma) \quad 2M_v = (-a+\bar{a}) + (b+\bar{b})M ;$$

$$(7_\gamma) \quad \left\{ \begin{aligned} &-2\beta_v - (a+\bar{a})_v M - (a+\bar{a})\tfrac{1}{2}((-a+\bar{a}) + (b+\bar{b})M) + \\ &+ (b-\bar{b})_v M^2 + (b-\bar{b})((-a+\bar{a})M + (b+\bar{b})M^2) + \\ &+ 2\gamma_v M^3 + 3\gamma((-a+\bar{a})M^2 + (b+\bar{b})M^3) = \\ &= (-a+\bar{a})_u + (b+\bar{b})_u M + (b+\bar{b})\tfrac{1}{2}(-2\beta - (a+\bar{a})M + \\ &+ (b-\bar{b})M^2 + 2\gamma M^3) \end{aligned} \right.$$

oder

$$\begin{aligned} &(-2\beta_v + \tfrac{1}{2}(-a^2+\bar{a}^2)) + (-(a+\bar{a})_v - \tfrac{1}{2}(a+\bar{a})(b+\bar{b}) + (b-\bar{b}) \\ &(-a+\bar{a}))M + ((b-\bar{b})_v + (b^2-\bar{b}^2) + 3\gamma(-a+\bar{a}))M^2 + \\ &+ (2\gamma_v + 3\gamma(b+\bar{b}))M^3 = ((-a+\bar{a})_u - \beta(b+\bar{b})) + ((b+\bar{b})_u - \\ &- \tfrac{1}{2}(b+\bar{b})(a+\bar{a}))M + \tfrac{1}{2}(b^2-\bar{b}^2)M^2 + \gamma(b+\bar{b})M^3 . \end{aligned}$$

Führt man die Vergleichung der gleichgelegten Gliedern durch, so bekommt man

$$(12_0) \quad -2\beta_v + \tfrac{1}{2}(-a^2+\bar{a}^2) = (-a+\bar{a})_u - \beta(b+\bar{b}),$$

$$(12_1) \quad -(a+\bar{a})_v + (b-\bar{b})(-a+\bar{a}) = (b+\bar{b})_u ,$$

$$(12_2) \quad (b-\bar{b})_v + (b^2-\bar{b}^2) + 3\gamma(-a+\bar{a}) = \frac{1}{2}(b^2-\bar{b}^2),$$

$$(12_3) \quad \gamma_v + \gamma(b+\bar{b}) = 0.$$

Setzt man wieder $\bar{a} = a, \ \bar{b} = b$ voraus, so folgt

$$(13) \quad (\ln|\beta|)_v = b, \quad a_v + b_u = 0, \quad (\ln|\gamma|)_v = -2b.$$

Daraus und aus umgekehrter Betrachtung ergibt sich

Satz 3 : Erfüllen $\Pi, \bar{\Pi}$ mit $\Gamma, \bar{\Gamma} = \mathbb{L}\,\Gamma$ die Bedingung γ), so ist (I) mit (13) äquivalent.

Die Analyse der geometrischen Bedeutung von (13) haben wir da weggelasen; es handelt sich um gewisse Eigenschaften der Koinzidenzflächen mit projektivem Zusammenhang.

L i t e r a t u r

[1] E.BOMPIANI, Sistemi coniugati e sistemi assiali dii linee sopra una superficie delle spazio ordinario, Boll.Un.Mat.Ital.3(1924),N.1, 1-7.

[2] J. BREJCHA, Über die axialen und dual axialen Kurvensysteme auf einer Fläche in S_3 , welche die konjugierte Netze enthalten (tschechisch), Čas.pěst.mat.79(1954),252-260.

[3] B. ÇENKL, La normale d´une surface dans l´espace à connexion projective, Czech.Math.Journ.12 (1962),582-606.

[4] G. FUBINI - E. ČECH, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces, Paris 1931.

[5] G. FUBINI - E. ČECH, Geometria proiettiva differenziale I-II, Bologna 1126-27.

[6] V. HAVEL - J. KLAPKA, Konjugierte Netze und Axialsysteme der Kurven auf der Fläche mit projektivem Zusammenhang (russisch), vorgelegen zum Druck.

[7] R.N. Schtscherbakoff, Repère der Flächenkurve in der projektiven Differentialgeometrie (russisch), Wissenschaftliche Schriften des Burjat-mongolischen pedagogischen Instituts in Ulan-Ude, 1953, Heft 3, S.41-91.

[8] A. ŠVEC, L'application des variétés à connexion à certains problèmes de la géométrie différentielle, Czech.Math.Journ.10(1960),523-550.

[9] A. ŠVEC, Zur Darlegung der Theorie der Räume mit Zusammenhang (tschechisch), Čas.pěst.mat.86(1961), 425-432.

[10] A. ŠVEC, Sur la géométrie différentielle d'une surface plongée dans un espace à trois dimensions à connexion projective, Czech.Math.Journ.11 (1961),386-397.