Miroslav Fiedler

Über zyklische n-Simplexe und konjugierte Raumvielecke

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 2 (1961), No. 2, 3–26

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104887`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
2, 2 (1961)

UEBER ZYKLISCHE n - SIMPLEXE UND KONJUGIERTE RAUMVIELECKE

Miroslav FIEDLER, Praha

Es ist der Zweck der vorliegenden Arbeit, einige Eigenschaften der sog. zyklischen n-Simplexe im euklidischen Raum zu untersuchen. Weil in den zyklischen n-Simplexen ein bestimmtes Raumvieleck (mit denselben Eckpunkten) eine wichtige Rolle spielt, wird zuerst der Begriff der Konjugiertheit von zwei Rauvielecken eingeführt und seine Eigenschaften untersucht. x)

1. Konjugierte Raumvielecke.

(1,1) Definition. Es sei $\{A_1, A_2, \dots, A_{n+1}\}$ eine zyklisch geordnete Menge (vgl. 2 , S. 294) von $n+1$ linear unabhängigen Punkten im euklidischen n-dimensionalen Raum E_n. Wir nennen diese Menge, zusammen mit der Menge der $n+1$ Strecken $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{n+1}A_1$ das Raumvieleck in E_n und bezeichnen es mit $V = \langle A_1, A_2, \dots A_{n+1}\rangle$. Die Punkte A_i sind Eckpunkte von V, die Strecken $A_i\, A_{i+1}$ Seiten von V.

Es ist klar, dass jedem Raumvieleck $\langle A_1, A_2, \dots, A_{n+1}\rangle$ eine zyklisch geordnete Menge von $n+1$ Vektoren $\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$ zugeordnet werden kann derart, dass $v_i = \overrightarrow{A_i A_{i+1}}$ (mit $A_{n+2} = A_1$) gilt. Also ist $\sum_{i=1}^{n+1} v_i = 0$ und beliebige m $(m < n+1)$ von den Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$ sind linear unabhängig. Ist umgekehrt $\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$ eine zyklisch geordnete Menge von $n+1$ Vektoren im E_n für die $\sum_{i=1}^{n+1} v_i = 0$ gilt, und sind

---

x) Alle in dieser Arbeit auftretenden Zahlen sind reell.

beliebige $m < n+1$ von den Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$ linear unabhängig, so gibt es in E_n ein Raumvieleck $\langle A_1, A_2, \dots, A_{n+1} \rangle$, so dass $v_i = A_i A_{i+1}$ gilt. Es ist auch klar, dass - falls einer der Eckpunkte (z. B. A_1) als Anfangseckpunt angesehen wird - die Gramsche Matrix $M = ((v_i, v_j))$ von diesen Vektoren die charakteristische Eigenschaft hat, dass sie positiv semidefinit vom Range n ist, wobei $Mj = 0$ gilt, wo j der Spaltenvektor mit den Koordinaten $1, 1, \dots, 1$ ist. Umgekehrt ist in der obenerwähnten Zuordnung durch eine solche Matrix ein Raumvieleck $\langle A_1, A_2, \dots, A_{n+1} \rangle$ bis auf die Lage in E_n (d.h. bis auf Orthogonaltransformationen in E_n) und mit einem Anfangspunkt eindeutig bestimmt. Es wird uns die Bezeichnung erleichtern, wenn wir einen Anfangs-Eckpunkt (hier A_1) des Raumvieleckes als den "ersten" betrachten, den benachbarten Eckpunkt (hier A_2) als den "zweiten" usw. In diesem Sinne werden wir das Symbol $V = [A_1, A_2, \dots, A_{n+1}]$ gebrauchen. Man kann jedoch alle Definitionen und Sätze invariant gegenüber dieser Wahl aussprechen.

(1,2) Definition. Es seien $V_1 = [A_1, A_2, \dots, A_{n+1}]$, $V_2 = [B_1, B_2, \dots, B_{n+1}]$ zwei Raumvielecke in E_n. Das Vieleck V_2 heisst zu V_1 von links (bzw. von rechts) konjugiert, falls für $k = 1, 2, \dots, n+1$ $(A_{n+2} = A_1)$ $A_k A_{k+1}$ senkrecht zur Hyperebene β_k (bzw. β_{k+1}) steht, wo mit β_i die durch $A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_{n+1}$ gehende Hyperebene bezeichnet ist.

(1,3) Satz. Es seien V_1, V_2 Raumvielecke in E_n. Ist V_2 zu V_1 von links (bzw. von rechts) konjugiert, so ist V_1 zu V_2 von rechts (bzw. von links) konjugiert.

Beweis. Setzen wir voraus, dass $V_2 = [B_1, B_2, \dots, B_{n+1}]$ zu $V_1 = [A_1, A_2, \dots, A_{n+1}]$ von links konjugiert ist. Dann ist für $k = 1, 2, \dots, n+1$ (wobei $A_{n+2} = A_1$ ist) $A_k A_{k+1}$ senkrecht zu $B_{k+1} B_{k+2}, B_{k+2} B_{k+3}, \dots, B_{n+1} B_1, B_1 B_2, \dots, B_{k-2} B_{k-1}$. Hieraus folgt, dass für $k = 1, 2, \dots, n+1$ (mit $B_{n+2} = B_1$) $B_k B_{k+1}$ senkrecht zu $A_k A_{k-1}, A_{k-1} A_{k-2}, \dots, A_1 A_{n+1}, A_{n+1} A_n, \dots, A_{k+3} A_{k+2}$ steht, also auch zur Hyperebene α_{k+1} durch $A_1, \dots, A_k, A_{k+2}, \dots, A_{n+1}$.

Somit ist V_1 zu V_2 von rechts konjugiert. Der andere Fall kann auf ähnliche Weise bewiesen werden.

(1,4) Satz. Zu jedem Raumvieleck V_1 in E_n gibt es in E_n ein Raumvieleck V_2 (bzw. V_3), das zu ihm von links (bzw. von rechts) konjugiert ist. Sind V, V' zwei gleichzeitig zu V_1 von links (bzw. von rechts) konjugierte Raumvielecke in E_n, so befinden sich V und V' in einer Ähnlichkeitslage, d.h. die zugehörigen Seiten sind zueinander parallel und ihre Längen sind proportional. Die zugehörigen Vektoren der Seiten sind entweder alle gleichsinnig, oder alle entgegengesetzt gerichtet.

Beweis. Es sei $V_1 = [A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}]$. Bezeichnen wir mit ω_i $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ diejenige Hyperebene in E_n, die durch A_i senkrecht zu $A_i A_{i+1}$ geht $(A_{n+2} = A_1)$. Hätten die Hyperebenen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n+1}$ einen Punkt P gemeinsam, so würde für $i = 1, \ldots, n+1$ $PA_i < PA_{i+1}$ gelten, denn $P \in \omega_i$ und A_i ist der Fusspunkt des Lotes von A_{i+1} zu ω_i. Das ist also unmöglich. Auch haben ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_{n+1}$ keine Richtung gemeinsam (sonst würden $A_1, \ldots, A_{n+1}$ in einer Hyperebene liegen). Also sind die Punkte $B_i = \bigcap_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} \omega_k$, $i = 1, \ldots, n+1$, linear unabhängig. Es ist klar, dass das Raumvieleck
$V_2 = [B_1, B_2, \ldots, B_{n+1}]$ (bzw. das Raumvieleck
$V_3 = [B_{n+1}, B_1, B_2, \ldots, B_n]$ zu V_1 von links (bzw. von rechts) konjugiert ist. Sind nun $V = [B_1, B_2, \ldots, B_{n+1}]$ und $V' = [B'_1, B'_2, \ldots, B'_{n+1}]$ zwei zu V_1 von links konjugierte Raumvielecke, so gilt laut (1,3) für die Vektoren $v_i = \overrightarrow{B_i B_{i+1}}$ und $v'_i = \overrightarrow{B'_i B'_{i+1}}$ der zugehörigen Seiten einerseits, dass v_i und v'_i zur gleichen Hyperebene senkrecht sind und somit ist v'_i mit v_i parallel, andererseits, dass $\sum_{i=1}^{n+1} v_i = \sum_{i=1}^{n+1} v'_i = 0$ ist. Es gibt also von Null verschiedene Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ so, dass $v'_i = c_i v_i$ gilt. Hieraus folgt
$\sum_{i=1}^{n+1} c_i v_i = 0$; da aber $\sum_{i=1}^{n+1} v_i = 0$ die einzige lineare Relation zwischen $v_1, \ldots, v_{n+1}$ ist, gilt $c_i = c$

für $i = 1, 2, \ldots, n+1$ und der Satz ist bewiesen.

(1,5) Sei Σ ein n-Simplex, $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ ein System von $n+1$ vom Nullvektor verschiedenen Vektoren, die je zu einer $(n-1)$-dimensionalen Seite von Σ senkrecht sind. Es gibt positive Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ derart, dass

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i v_i = 0$$

gilt, dann und nur dann, wenn die Vektoren v_i mit den zugehörigen Vektoren der äusseren Normalen von Σ entweder alle gleichsinnig parallel oder alle parallel und entgegengesetzt gerichtet sind.

Beweis. Sind $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n+1}$ die $(n-1)$-dimensionalen Seiten von Σ und bezeichnen wir $(i = 1, \ldots, n+1)$ mit ω_i^+ (bzw. ω_i^-) denjenigen (abgeschlossenen) Halbraum mit der Randhyperebene ω_i, der Σ enthält (bzw. nicht enthält), so gilt $\bigcap_{i=1}^{n+1} \omega_i^+ = \Sigma$, $\bigcap_{i=1}^{n+1} \omega_i^- = \emptyset$,

dagegen für jede andere Kombination der Vorzeichen ist $\bigcap_{i=1}^{n+1} \omega_i^{(\varepsilon_i)}$ unendlich und enthält eine Halbgerade. Die gerichteten äusseren (bzw. inneren) Normalen (Halbgeraden) können in keinem Halbraum enthalten sein, da sonst die zur Randhyperebene dieses Halbraums senkrechte und in ihm nicht liegende Halbgerade in $\bigcap_{i=1}^{n+1} \omega_i^+$ (bzw. in $\bigcap_{i=1}^{n+1} \omega_i^-$) enthalten wäre. Dagegen enthält jeder andere $\bigcap_{i=1}^{n+1} \omega_i^{(\varepsilon_i)}$ eine Halbgerade und deswegen sind die zugehörigen Normalen (äussere für (ε_i) Plus, innere für (ε_i) Minus) in einem zu dieser Halbgeraden "senkrechten" Halbraum enthalten.

Wenn also $e_i v_i$ $(e_i = \pm 1)$ die Vektoren der äusseren Normalen sind, so kann eine lineare Kombination $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i (e_i v_i)$ nur dann Nullvektor sein, falls sämtliche λ_i dasselbe Vorzeichen haben. Zu den Vektoren $(e_i v_i)$ gibt es dagegen positive (oder negative) Zahlen λ_i so, dass $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i (e_i v_i) = 0$ ist, wie aus den Eigenschaften der konvexen Gebilde folgt.

(1,6) Es sei $V_1 = [A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}]$ ein Raumvieleck in E_n, $V_2 = [B_1, B_2, \ldots, B_{n+1}]$ ein zu V_1 von links (bzw. von rechts) konjugiertes Raumvieleck. Dann sind alle Vektoren $v_i = \overrightarrow{B_i B_{i+1}}$ $(i = 1, \ldots, n+1;\ B_{n+2} = B_1)$ entweder mit den äusseren Normalen, oder mit den inneren Normalen der $(n-1)$-dimensionalen Seiten des zu V_1 zugehörigen n-Simplexes gleichsinnig parallel.

Beweis. Folgt aus (1,5), da $\sum_{i=1}^{n+1} v_i = 0$ gilt.

(1,7) Sei $V = [A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}]$ ein Raumvieleck in E_n. Lassen wir jedem Punkt X in E_n die Summe der Quadrate $\sum_{i=1}^{n+1} \overline{X_i A_i}^2$ entsprechen, wo X_i den Fusspunkt des von X auf $A_i A_{i+1}$ gefällten Lotes (und $\overline{X_i A_i}$ die Entfernung von X_i und A_i) bedeutet. Es gilt dann, dass diese Summe für den Mittelpunkt der durch die Punkte A_1, $A_2, \ldots, A_{n+1}$ gehenden Hyperkugel minimal ist.

Beweis. Es ist leicht nachzuweisen, dass für $i = 1, 2, \ldots, n+1$ $(A_{n+2} = A_1)$ im Dreieck $A_i A_{i+1} X$

$$\overline{X_i A_i}^2 = \frac{1}{4} \overline{A_i A_{i+1}}^2 + \frac{1}{2}(\overline{A_i X}^2 - \overline{A_{i+1} X}^2) + \frac{1}{4\overline{A_i A_{i+1}}^2} (\overline{A_i X}^2 - \overline{A_{i+1} X}^2)^2$$

gilt. Summiert man für $i = 1, 2, \ldots, n+1$, so ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{n+1} \overline{X_i A_i}^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n+1} \overline{A_i A_{i+1}}^2 + \sum \frac{1}{4\overline{A_i A_{i+1}}^2} (\overline{A_i X}^2 - \overline{A_{i+1} X}^2)^2,$$

woraus der Satz folgt.

(1,8) Ist Σ ein n-Simplex und ist eine zyklische (orientierte) Anordnung seiner Eckpunkte P_i (und somit der gegenüberliegenden $(n-1)$-dimensionalen Seiten ω_i), z. B. $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}, P_1$ usw., gegeben, so gibt es genau ein Raumvieleck $V = \langle A_1, A_2, \ldots, A_{n+1} \rangle$ derart, dass A_i in der Hyperebene ω_i liegt und $A_i A_{i+1}$ zu ω_i senkrecht ist. Dabei ist der Mittelpunkt der Umkugel von Σ mit dem Punkt von Lemoine x) in Σ identisch.

x) Das ist der zum Schwerpunkt von Σ isogonal konjugierte Punkt. Er ist z.B. dadurch charakterisiert, dass für ihn die Summe der Quadrate von seinen Abständen von den $(n-1)$-dimensionalen Seiten von Σ minimal ist. Vgl. [4], Satz 25.

Wenn man in derselben Weise ein Raumvieleck V' zu einer anderen zyklischen Anordnung konstruiert, ist V' aus denselben Vektoren wie V gebildet, höchstens können sie alle zu den entsprechenden Vektoren aus V entgegengesetzt gerichtet sein. x)

Anmerkung. Dieser Satz sagt auch, dass die Seiten jedes solchen eingeschriebenen Raumvielecks Strecken sind, die die Paare von je zwei parallelen $(n-1)$-dimensionalen Seiten des Simplexes Σ und des zum Lemoinschen Punkt symmetrischen Simplexes Σ' verbinden.

Beweis. Der erste Teil folgt sogleich aus (1,4). Der zweite Teil folgt aus der bekannten Eigenschaft des Punktes von Lemoine (s.S.7 dieser Arbeit) und daraus, das in (1,7) XA_i^2 gleichzeitig Quadrat der Entfernung des Punk-tes X von ω_i ist.

Der dritte Teil folgt aus dem zweiten, denn dieser sagt, dass die Länge der Vektoren von V, die zu ω_i senkrecht stehen, grösser ist, als die Entfernung des Punktes von Lemoine von ω_i. Für die Orientierung der Vektoren in V gibt es wegen (1,5) nur zwei Möglichkeiten. Der Satz ist bewiesen.

(1,9) Es sei $V_1 = [A_1, \ldots, A_{n+1}]$ ein Raumvieleck, $V_2 = [B_1, \ldots, B_{n+1}]$ ein zu V_1 von links (bzw. von rechts) konjugiertes Raumvieleck. Sind ω_i die $(n-1)$-dimensionalen Seiten des zu V_1 zugehörigen n-Simplexes Σ (ω_i gegenüber A_i), dann gilt für die Innenwinkel φ_{ij} von ω_i, ω_j $(i \neq j)$ in Σ:

$$(1) \qquad \cos \varphi_{ij} = - \frac{(v_i, v_j)}{\sqrt{(v_i, v_i)}\ \sqrt{(v_j, v_j)}} ,$$

wo $v_i = \overrightarrow{B_{i-1} B_i}$ (bzw. $\overrightarrow{B_i B_{i+1}}$) bezeichnet ist..

Beweis. Aus (1,3) und (1,2) folgt, dass v_i senkrecht zu ω_i ist und aus (1,6), dass der Winkel von v_i und v_j $(i \neq j)$ $\pi - \varphi_{ij}$ beträgt.

---

x) Dieser Satz ist im Falle $n=2$ und $n=3$ bekannt. Vgl. [8], S.165 und [9], S. 156.

(1,10) Es seien $V_1 = [A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}]$, $V_2 = [B_1, B_2, \ldots, B_{n+1}]$ zwei Raumvielecke, wobei V_2 zu V_1 von rechts konjugiert ist. Seien
$a_i = \overrightarrow{A_i A_{i+1}}$, $b_i = \overrightarrow{B_i B_{i+1}}$ $(i = 1, \ldots, n+1;\ A_{n+2} = A_1;\ B_{n+2} = B_1)$
die Vektoren der Seiten und seien $A = ((a_i, a_j))$, $B = ((b_i, b_j))$ die zugehörigen Gramschen Matrizen $(i, j = 1, \ldots, n+1)$.

Hat die Matrix

(2)
$$Z = \begin{pmatrix} 1, & -1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & -1, & \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & \ldots, & 0 \\ - & - & - & - & - \\ -1, & 0, & 0, & \ldots, & 1 \end{pmatrix}$$

die Ordnung $n+1$, so existiert eine Zahl $c \neq 0$ derart, dass die Matrix

(3)
$$\begin{pmatrix} A, & cZ \\ cZ', & B \end{pmatrix}$$

symmetrisch positiv semidefinit vom Rang n ist.

Umgekehrt, sei für eine Zahl $c \neq 0$ (3) (Mit Z in (2)) symmetrisch positiv semidefinit vom Rang n. Dann ist A die Gramsche Matrix eines Raumvielecks $V_1 = [A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}]$ in einem n-dimensionalen euklidischen Raum E_n, B die Gramsche Matrix eines Raumvielecks $V_2 = [B_1, B_2, \ldots, B_{n+1}]$ in E_n, wobei V_2 durch eine passende orthogonale Transformation in eine solche Lage gegenüber V_1 gebracht werden kann, dass es zu V_1 von rechts konjugiert wird.

Beweis. Ist V_2 zu V_1 von rechts konjugiert, so gilt für die Vektoren a_i, b_j, dass

(4)
$$(a_i, b_j) = 0$$

für $i \neq j \neq i+1$ ist. Bezeichnen wir $(a_i, b_i) = c_i$, $(a_i, b_{i+1}) = d_i$ $(i = 1, \ldots, n+1,\ b_{n+2} = b_1)$, so gilt wegen (4) und $\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n+1} b_i = 0$, dass $c_i = c$, $d_i = -c$, $c \neq 0$ für $i = 1, \ldots, n+1$ ist. Also ist (3) die Gramsche Matrix des Systems $a_1, \ldots, a_{n+1}, b_1, \ldots, b_{n+1}$ und ist symmetrisch positiv semidefinit vom Rang n.

Sei umgekehrt für $c \neq 0$ (3) vom Rang n und symmetrisch positiv semidefinit. Da cZ den Rang n hat,

wobei $Zj = 0$ für den Vektor j mit den Koordinaten $1, 1, \dots, 1$ gilt, ist A vom Rang n und $Aj = 0$. Aus demselben Grund gilt, dass B den Rang n hat und $Bj = 0$ ist. Da A und B positiv semidefinit sind, ist A die Gramsche Matrix eines Raumvielecks $V_1' = [A_1', A_2', \dots, A_{n+1}']$ und B die Gramsche Matrix eines Raumvielecks $V_2' = [B_1', B_2', \dots, B_{n+1}']$ in einem n-dimensionalen euklidischen Raum E_n. Sei $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, b_1, b_2, \dots, b_{n+1}$ ein System von Vektoren in E_n, dessen Gramsche Matrix (3) ist. Aus $Aj = 0$ und $Bj = 0$ folgt
$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n+1} b_i = 0$, so dass $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ Vektoren der Seiten $(a_i = \overrightarrow{A_i A_{i+1}})$ eines zu V_1' ähnlichen Raumvielecks $V_1 = [A_1, A_2, \dots, A_{n+1}]$ und $b_1, b_2, \dots, b_{n+1}$ Vektoren der Seiten $(b_i = \overrightarrow{B_i B_{i+1}})$ eines zu V_2' ähnlichen Raumvielecks $V_2 = [B_1, B_2, \dots, B_{n+1}]$ sind. Dabei gilt $(a_i, b_j) = 0$ für $i \neq j \neq i+1$, so dass V_2 zu V_1 von rechts konjugiert ist. Der Satz ist bewiesen.

(1,11) Zu jeder symmetrischen positiv semidefiniten Matrix A der Ordnung $n+1$, die den Rang n hat und für die $Aj = 0$ gilt (j hat die Koordinaten $1, 1, \dots, 1$), existiert genau eine Matrix B so, dass die Matrix aus (3) bei festem $c \neq 0$ positiv semidefinit vom Rang n ist. Ist $c \neq 0$ nicht fest vorgeschrieben, so ist B bis auf einen positiven multiplikativen Faktor eindeutig bestimmt.

Beweis. Folgt aus (1,10) und (1,4).

2. Orthozentrische und zyklische Raumvielecke.

(2,1) Definition. Ein Raumvieleck in E_n heisst orthozentrisch, falls das zugehörige n-Simplex orthozentrisch ist, d.h., falls sich die Höhen des Simplexes in einem Punkte (dem Orthozentrum) treffen.

(2,2) Ein Raumvieleck $V_1 = [A_1, A_2, \dots, A_{n+1}]$ ist dann und nur dann orthozentrisch, falls für die Vektoren $a_i = \overrightarrow{A_i A_{i+1}}$

(5) $$(a_i, a_j) = 0$$

für $j \neq i-1,\ j \neq i,\ j \neq i+1 \mod (n+1),\ i,j = 1,2,\dots,n+1\ (a_{n+2}=a_1)$ gilt. Dabei ist das zugehörige n-Simplex spitzwinklig x), wenn für die Zahlen

(6) $$d_i = -(a_{i-1}, a_i)$$

$d_i > 0$ für $i = 1,\dots,n+1$ gilt, rechtwinklig, wenn für einen Index k $d_k = 0$ gilt und stumpfwinklig, falls für einen Index k $d_k < 0$ gilt. Mehr als für einen Index kann $d_k \leqq 0$ nicht eintreten.

Beweis. Ist V_1 orthozentrisch und ist H das zugehörige Orthozentrum, so ist für $\overrightarrow{HA_i} = v_i$

$$(v_i, v_j - v_k) = 0$$

für $j \neq i \neq k$. Deswegen gilt für $j \neq i-1,\ j \neq i,\ j \neq i+1 \mod (n+1)$

$$(a_i, a_j) = (v_{i+1} - v_i, v_{j+1} - v_j) = 0.$$

Umgekehrt, sei

$$(a_i, a_j) = 0 \text{ für } j \neq i-1,\ j \neq i,\ j \neq i+1 \mod (n+1).$$

Dann gilt, wenn man noch $(a_i, a_i) = c_i$ schreibt,

$$0 = (a_i, \sum_{j=1}^{n+1} a_j) = -d_i + c_i - d_{i+1},$$

also

$$c_i = d_i + d_{i+1}.$$

Es ist leicht einzusehen, dass für $i < k$

$$0 < (a_i + a_{i+1} + \dots + a_{k-1}, a_i + a_{i+1} + \dots + a_{k-1}) =$$

$$= -(a_i + a_{i+1} + \dots a_{k-1}, a_k + a_{k+1} + \dots + a_{n+1} + a_1 + \dots + a_{i-1}) =$$

$$= d_i + d_k$$

gilt. Also höchstens für einen Index k ist $d_k \leqq 0$. Ist $d_k = 0$, so ist der Eckpunkt A_k das Orthozentrum und es gilt, dass $A_k A_i$ senkrecht zu $A_k A_j$ für alle $i, j,\ i \neq k \neq j \neq i$ ist (es handelt sich also um ein rechtwinkliges orthozentrisches n-Simplex): je zwei der n Vektoren

----

x) Vgl. [5], S. 187, wo spitz- bzw. recht- bzw. stumpfwinklige orthozentrische Simplexe als positiv bzw. null- bzw. negativ orthozentrisch bezeichnet werden.

$a_{k-1}, a_k, a_k + a_{k+1}\ (= -(a_{k+2} + \cdots + a_{n+1} + a_1 + \cdots + a_{k-1})),$
$a_k + a_{k+2}\ (= -(a_{k+1} + \cdots + a_{n+1} + a_1 + \cdots + a_{k-1})), \ldots,$
$a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{n+1} + a_1 + \cdots + a_{k-2}\ (= -(a_{k-2} + a_{k-1}))$

sind nämlich zueinander senkrecht.

Sind alle $d_k \neq 0$, so ist die Zahl

(7) $$\gamma = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{d_k} \neq 0$$

und der Punkt

(8) $$H = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\gamma d_k} A_k$$

das Orthozentrum:

Es ist nämlich für $i, j = 1, \ldots, n$

(9) $$0 < \det((a_i, a_j)) = \det \begin{pmatrix} d_1 + d_2, & -d_2, & 0, \ldots, & 0, & 0 \\ -d_2, & d_2 + d_3, & -d_3, \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & -d_3, & d_3 + d_4, \ldots, & 0, & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0, & 0, & 0, \ldots, & -d_n, & d_n + d_{n+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} d_j = \gamma \prod_{j=1}^{n+1} d_j$$

und für die Vektoren $v_i = \overrightarrow{HA_i} =$

$$= -\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\gamma d_j} \overrightarrow{A_i A_j} = \frac{1}{\gamma}\Big[\frac{1}{d_{i+1}} a_i + \frac{1}{d_{i+2}} (a_i + a_{i+1}) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{d_{n+1}} (a_i + \cdots + a_n) + \frac{1}{d_1} (a_i + \cdots + a_{n+1}) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{d_{i-1}} (a_i + \cdots + a_{n+1} + a_1 + \cdots + a_{i-2})\Big] \quad (i = 1, \ldots, n+1)$$

$$(v_i, a_j) = 0$$

für $i-1 \neq j \neq i$, wie man sich wegen $\sum_{k=1}^{n+1} a_k = 0$ leicht überzeugt.

Ist dabei für einen Index k $d_k < 0$, so ist wegen (9) $\gamma < 0$, so dass wegen (8) H ein äusserer Punkt des zugehörigen Simplexes ist. Das Simplex ist dann (vgl. [5], S. 187) stumpfwinklig. Sind dagegen alle $d_k > 0$, so ist $\gamma > 0$ und H ist ein innerer Punkt des Simplexes, das spitzwinklig ist. Der Satz ist bewiesen.

(2,3) Definition. Ein n-Simplex Σ heisst zyklisch, falls es eine solche zyklische Anordnung seiner $(n-1)$-dimensionalen Seiten gibt, dass je zwei in der Anordnung nicht benachbarten $(n-1)$-dimensionalen Seiten orthogonal sind. Sind alle übrigen Innenwinkel (d.h. die den benachbarten Seiten entsprechenden Innenwinkel) spitz, so nennen wir Σ spitzwinklig zyklisch; ist mindestens einer von den übrigen Innenwinkeln stumpf bzw. recht, so nennen wir Σ stumpfwinklig zyklisch bzw. rechtwinklig zyklisch. Das zu einem spitz-, recht- oder stumpfwinklig zyklischen n-Simplex zugehörige Raumvieleck, das aus den Eckpunkten von Σ und den gegenüber den benachbarten Seiten liegenden Kanten gebildet ist, nennen wir spitz-, recht- oder stumpfwinklig zyklisches Raumvieleck.

Anmerkung. Der Graph eines zyklischen n-Simplexes (vgl. [6], S. 464) ist somit entweder ein Kreis, oder ist in einem Kreis enthalten. Er ist ein positiver Kreis im Falle des spitzwinklig zyklischen Simplexes, ein Kreis mit genau einer negativen Kante (bei mehr als einer negativen Kante wäre der positive Teil des Graphen nicht zusammenhängend, vgl. [6], S. 464) im Falle des stumpfwinklig zyklischen Simplexes und ein positiver Weg im Falle des rechtwinklig zyklischen Simplexes. Es ist auch klar, dass es zu einem zyklischen n-Simplex genau zwei (zueinander entgegengesetzte) zyklische Anordnungen der $(n-1)$-dimensionalen Seiten gibt, die die obenerwähnte Bedingung erfüllen. Beide Anordnungen führen zu zyklischen Raumvielecken, die bis auf Orientation gleich sind.

(2,4) Satz. Ein Raumvieleck ist dann und nur dann spitz-, bzw. recht-, bzw. stumpfwinklig zyklisch, falls das zu ihm (von links oder rechts) konjugierte Raumvieleck ein orthozentrisches Raumvieleck ist, dessen zugehöriges n-Simplex spitz-, bzw. recht-, bzw. stumpfwinklig ist.

Beweis. Folgt unmittelbar aus (2,2).

(2,5) Sind die $n+1$ Zahlen $d_1, d_2, \dots, d_{n+1}$ von Null verschieden und entweder alle positiv, oder genau eine von ihnen negativ, wobei dann

$\frac{1}{\sigma} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{d_i} < 0$ ist, so hat die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} P, & Z \\ Z', & Q \end{pmatrix} \tag{10}$$

mit

$$P = \begin{pmatrix} d_1+d_2, & -d_2, & 0, & \dots, & -d_1 \\ -d_2, & d_2+d_3, & -d_3, & \dots, & 0 \\ - & - & - & - & - \\ -d_1, & 0, & \dots, & -d_{n+1}, & d_1+d_{n+1} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} - \frac{\sigma}{d_1^2}, & -\frac{\sigma}{d_1 d_2}, & -\frac{\sigma}{d_1 d_3}, & \dots, & -\frac{\sigma}{d_1 d_{n+1}} \\ -\frac{\sigma}{d_2 d_1}, & \frac{1}{d_2} - \frac{\sigma}{d_2^2}, & -\frac{\sigma}{d_2 d_3}, & \dots, & -\frac{\sigma}{d_2 d_{n+1}} \\ - & - & - & - & - \\ -\frac{\sigma}{d_1 d_{n+1}}, & -\frac{\sigma}{d_2 d_{n+1}}, & -\frac{\sigma}{d_3 d_{n+1}}, & \dots, & \frac{1}{d_{n+1}} - \frac{\sigma}{d_{n+1}^2} \end{pmatrix}$$

und mit Z aus (2) den Rang n und ist positiv semidefinit.

Beweis. Bezeichnen wir mit E die Einheitsmatrix, mit D die diagonale Matrix mit den diagonalen Elementen $d_1, d_2, \dots, d_{n+1}$, mit C die Matrix (der Ordnung $n+1$)

$$C = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & \dots, & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & 1 \\ 1, & 0, & 0, & \dots, & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad j = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist (C' usw. ist die transponierte Matrix)

$$M = \begin{pmatrix} (E-C)D(E-C'), & E-C \\ E-C', & D^{-1} - \sigma D^{-1} j j' D^{-1} \end{pmatrix}.$$

Da aber

$$(E-C)D(D^{-1} - \sigma D^{-1} j j' D^{-1}) = E - C$$

gilt, ist

$$\begin{pmatrix} E, & -(E-C)D \\ 0, & E \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} E, & 0 \\ -D(E-C'), & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & D^{-1} - \sigma D^{-1} j j' D^{-1} \end{pmatrix}.$$

Wegen $(D^{-1} - \sigma D^{-1} j j' D^{-1}) j = D^{-1} j - D^{-1} j \frac{1}{\sigma} (j' D^{-1} j) = 0$ ist der Rang von M höchstens gleich n. Dagegen sind nach (9) die Hauptminoren von $(E-C)D(E-C')$ der

Ordnung $1, 2, \dots, n$ positiv. Der Satz ist bewiesen.

(2,6) Ein Raumvieleck $V = [A_1, A_2, \dots, A_{n+1}]$ ist dann und nur dann spitzwinklig zyklisch, falls es positive Zahlen $p_1, p_2, \dots, p_{n+1}$ gibt derart, dass für die Vektoren $a_i = \overrightarrow{A_i A_{i+1}}$ $(i = 1, \dots, n+1; A_{n+2} = A_1)$ und $p = \sum_{k=1}^{n+1} p_k$

$$(a_i, a_j) = -\frac{1}{p} p_i p_j,$$

$$(a_i, a_i) = \frac{1}{p} p_i (p - p_i) \tag{11}$$

gilt. Es ist dann und nur dann stumpfwinklig zyklisch, falls es Zahlen $p_1, p_2, \dots, p_{n+1}$ gibt, von denen genau eine negativ ist, alle anderen positiv sind und $\sum_{k=1}^{n+1} p_k = p < 0$, wobei wieder die Beziehungen (11) gelten.

Beweis. Folgt sogleich aus (1,8), (2,2) und (2,5), wenn $d_i = \frac{1}{p_i}$ gesetzt wird, denn P, Q in (10) sind dann die Matrizen des orthozentrischen Raumvielecks und des Raumvieleckes aus (11).

(2,7) Satz. Ein Raumvieleck $V = [A_1, A_2, \dots, A_{n+1}]$ ist dann und nur dann spitzwinklig zyklisch, falls es positive Zahlen $p_1, p_2, \dots, p_{n+1}$ gibt, so dass für die Entfernungen $\rho(A_i, A_j)$ $(i < j)$

$$\rho^2(A_i, A_j) = \frac{1}{p}(p_i + p_{i+1} + \dots + p_{j-1})(p_j + p_{j+1} + \dots + p_{n+1} + p_1 + \dots + p_{i-1}) \tag{12}$$

mit $p = \sum_{i=1}^{n+1} p_i$ gilt. Es ist dann und nur dann stumpfwinklig zyklisch, falls es Zahlen $p_1, p_2, \dots, p_{n+1}$ gibt, von denen eine negativ, die anderen positiv und $p = \sum_{i=1}^{n+1} p_i < 0$ ist, wobei wieder (12) gilt.

Beweis. Da in der Bezeichnung von (2,6)

$$\rho^2(A_i, A_j) = (a_i + a_{i+1} + \dots + a_{j-1}, a_i + a_{i+1} + \dots + a_{j-1})$$

gilt, genügt es zu zeigen, dass (11) und (12) äquivalent sind. Das beweist man aber leicht z.B. durch Induktion nach $j - i$.

Anmerkung. Aus der Definition des rechtwinklig zyklischen Raumvielecks folgt, dass das zugehörige n-Simplex dasjenige rechtwinklige n-Simplex ist, dessen sämtliche zweidimensionale Seiten rechtwinklige Dreiecke sind und von dem in [5] (Satz 32) bewiesen wurde, dass analogisch zu (12)

$$\rho^2(A_i, A_j) = |u_i - u_j|$$

für irgendwelche voneinander verschiedenen Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ gilt.

(2,8) Satz. Jede m-dimensionale ($m \geqq 2$) Seite Σ' eines zyklischen n-Simplexes Σ ist wieder zyklisch, und zwar von demselben Typ wie Σ (d.h. gleichzeitig spitz-, stumpf- oder rechtwinklig zyklisch). Dabei wird die zyklische Anordnung der Ecken in Σ' durch diejenige in Σ induziert.

Beweis. Sei $V = [A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}]$ das zu Σ zugehörige zyklische Raumvieleck und seien $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_{m+1}}$ $(k_1 < k_2 < \ldots < k_{m+1})$ Eckpunkte der Seite Σ'. Es genügt zu zeigen, dass $V' = [A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_{m+1}}]$ ein zyklisches Raumvieleck im zugehörigen m-dimensionalen Raum E_m ist. Ist V rechtwinklig zyklisch, ist das Resultat bekannt ([5], Satz 33; vgl. die Anmerkung nach (2,7)). Ist Σ spitz- oder stumpfwinklig zyklisch, so existieren nach (2,7) Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$ (im ersten Fall alle positiv, im zweiten genau eine negativ und $p = \sum_{k=1}^{n+1} p_k < 0$) so, dass (12) gelten. Bezeichnen wir

$$\sum_{k=k_1}^{k_2-1} p_k = q_1, \sum_{k=k_2}^{k_3-1} p_k = q_2, \ldots, \sum_{k=k_m}^{k_{m+1}-1} p_k = q_m,$$

$$p_{k_{m+1}} + \ldots + p_{n+1} + p_1 + \ldots + p_{k_1-1} = q_{m+1}.$$

Da $p = \sum_{i=1}^{n+1} p_i = \sum_{i=1}^{m+1} q_i = q$, sind entweder alle Zahlen q_i positiv (im ersten Falle), oder ist genau eine Zahl $q_k < 0$ (diejenige, in deren Summe im zweiten Fall die negative Zahl p_l auftritt) und $q < 0$ gilt.

Aus (12) folgt nun, dass für $i < j$

$$\rho^2(A_{k_i}, A_{k_j}) = \frac{1}{q}(q_i + q_{i+1} + \ldots + q_{j-1})(q_j + \ldots + q_{m+1} + q_1 + \ldots + q_{i-1})$$

gilt, so dass wirklich V' und Σ' zyklisch von demselben Typ wie Σ ist. Der Satz ist bewiesen

Bevor wir den Hauptsatz (2,10) über zyklische Raumvielecke aussprechen, werden wir den folgenden algebraischen Hilfssatz beweisen:

(2,9) Es seien $c_1, c_2, \ldots, c_m$ $(m \geqq 3)$ positive Zahlen. Bezeichnen wir als eine "zulässige" Lösung $x_0, x_1, \ldots, x_m$ des Systems

$$
(13) \qquad
\begin{aligned}
x_1 (x_2 + x_3 + \ldots + x_m) &= x_0 c_1, \\
x_2 (x_1 + x_3 + \ldots + x_m) &= x_0 c_2, \\
- \; - \; - \; - \; - \; &- \; - \; - \\
x_m (x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1}) &= x_0 c_m, \\
x_0^2 &= 1,
\end{aligned}
$$

für welche entweder alle $x_1, x_2, \ldots, x_m$ positiv sind (und dann ist $x_0 = 1$), oder genau eine von den Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ negativ, die anderen positiv sind und $\sum_{i=1}^{m} x_i < 0$ ist (dann ist $x_0 = -1$). Dann gilt:

1° Ist für irgendeinen Index k, $1 \leqq k \leqq m$,

$$\sqrt{c_k} \geqq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \sqrt{c_j} \qquad \text{odēr} \qquad c_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} c_j,$$

so gibt es keine zugelässige Lösung von (13).

2° Ist für jedes $k = 1, 2, \ldots, m$

$$\sqrt{c_k} < \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \sqrt{c_j}$$

und gleichzeitig

$$c_k \neq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} c_j,$$

so existiert genau eine zulässige Lösung von (13), und zwar ist diese Lösung positiv, falls für jedes k, $1 \leqq k \leqq m$,

$$c_k < \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} c_j$$

gilt, und nichtpositiv (mit $x_0 = -1$), falls für irgendein k

$$c_k > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} c_j$$

gilt. Im letzten Fall ist das zugehörige $x_k < 0$.

Beweis. Wir können annehmen, dass

$$(14) \qquad 0 < c_1 \leqq c_2 \leqq \ldots \leqq c_m \quad \text{gilt.}$$

Setzen wir voraus, dass $x_0, x_1, \dots, x_m$ eine zulässige Lösung von (13) ist, und bezeichnen wir mit x die Zahl

$$x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} x_i \, . \tag{15}$$

Wir werden zuerst einige einfache Behauptungen beweisen.

B.1. Ist $x_0 = 1$, so gilt $0 < x_1 \leqq x_2 \leqq \dots \leqq x_m$.

Beweis. Folgt aus $(x_2 - x_1)(x_3 + \dots + x_m) = c_2 - c_1$ usw.

B.2. Ist $x_0 = 1$, so gilt $x_i < x$ für $i = 1, \dots, m-1$.

Beweis. Falls für $i < m$ $x_i \geqq x$ gilt, so ist

$$2x = \sum_{k=1}^{m} x_k > x_i + x_m \geqq 2x_i \geqq 2x .$$

B.3. Ist $x_0 = 1$, so gilt für $i = 1, \dots, m-1$

$$x_i = x - \sqrt{x^2 - c_i} \, .$$

Beweis. Die i-te Gleichung von (13) kann man in der Form $x_i^2 - 2x x_i + c_i = 0$ schreiben.

B.4. Die Funktion $x - \sqrt{x^2 - c}$ $(c > 0)$ nimmt im Intervall $(\sqrt{c}, \infty)$ ab.

B.5. Es gibt höchstens eine zulässige Lösung von (13) mit $x_0 = 1$.

Beweis. Sei $y_0 = 1, y_1, \dots, y_m$ eine andere zulässige Lösung von (13) und sei $y = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} y_i$. Dann ist $x \neq y$ (sonst wäre $y_i = x_i$ für $i = 1, \dots, m-1$ nach B.3 und $y_m = x_m$). Ist $x > y$, so folgt aus B.4 und B 3, dass $x_i < y_i$ für $i = 1, \dots, m-1$ gilt. Dann kommt man wegen

$$\sum_{i=1}^{m-1} c_i - c_m = x_0 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{m-1} x_i x_j \tag{16}$$

und analogischer Relation für $y_1, \dots, y_{m-1}$ zum Widerspruch

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{m-1} x_i x_j = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{m-1} y_i y_j \, .$$ Ebenso für $x < y$.

B.6. Ist $x_0 = -1$, so gilt $x_i > 0$ für $i = 1, \dots, m-1$, $x_m < 0$; ferner gilt $c_m > \sum_{i=1}^{m-1} c_i$.

Beweis. Ist $x_k < 0 \ (1 \leqq k \leqq m-1)$ und $x_j > 0$ für alle $j \neq k$, $1 \leqq j \leqq m$ so ist
$\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{m} c_i - c_k = -\sum_{\substack{i,j=1\\k\neq i\neq j\neq k}}^{m} x_i \ x_j < 0$. Hieraus und aus (14) folgt
$c_k > \sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{m} c_i \geqq c_m \geqq c_k$. Also $k = m$.

B.7. Ist $x_0 = -1$, so ist für $i = 1, \dots, m-1$

$$x_i = x + \sqrt{x^2 + c_i} \ ,$$
$$x_m = x - \sqrt{x^2 + c_m} \ .$$

Beweis wie in B.3 mit Rücksicht auf B.6 .

B.8. Ist $c > 0$, so ist $x + \sqrt{x^2 + c}$ wachsend.

B.9. Es gibt höchstens eine nichtpositive zulässige Lösung von (13).

Beweis. Wie in B.5 .

B.10. Ist $x_0 = 1$, so gilt $\sum_{i=1}^{m-1} c_i > c_m$. Ist $x_0 = -1$, so gilt $\sum_{i=1}^{m-1} c_i < c_m$.

Beweis. Folgt aus (16).

B.11. Es ist $\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{m} c_i \neq c_k$, $k = 1, \dots, m$.

Beweis. Folgt aus B.10 .

B.12. Sei $c_m < \sum_{i=1}^{m-1} c_i$. Dann hat wenigstens eine der Funktionen

$$\varphi_1(x) = (m-2)x - \sum_{i=1}^{m} \sqrt{x^2 - c_i} \ ,$$
$$\varphi_2(x) = (m-2)x + \sqrt{x^2 - c_m} - \sum_{i=1}^{m-1} \sqrt{x^2 - c_i}$$

eine positive Nullstelle.

Beweis. Es ist $\varphi_1(\sqrt{c_m}) = \varphi_2(\sqrt{c_m})$, wobei für genügend grosse x $\varphi_1(x) < 0$, $\varphi_2(x) > 0$ gilt ~~e~~es ist asymptotisch $\varphi_2(x) \sim \frac{1}{2x}\left(\sum_{i=1}^{m-1} c_i - c_m\right)$.

B.13. Sei $\sqrt{c_m} < \sum_{i=1}^{m-1} \sqrt{c_i}$ und $c_m > \sum_{i=1}^{m-1} c_i$.

Dann hat die Funktion

$$\varphi_3(x) = (m-2)x + \sum_{i=1}^{m-1} \sqrt{x^2+c_i} - \sqrt{x^2+c_m}$$

mindestens eine negative Nullstelle.

Beweis. Es ist $\varphi_3(0) > 0$, wobei für $x \to -\infty$ asymptotisch

$$\varphi_3(x) \sim \frac{1}{2|x|}\left(\sum_{i=1}^{m-1} c_i - c_m\right) < 0$$ gilt.

B.14. Sei $\sqrt{c_m} \geqq \sum_{i=1}^{m-1} \sqrt{c_i}$. Dann hat $\varphi_3(x)$ aus B.13 keine negative Nullstelle.

Beweis. Durch vollständige Induktion folgt leicht für positive Zahlen $k_1, \dots, k_s$ $(s \geqq 1)$ die Ungleichheit

$$\sum_{i=1}^{s} \left(\sqrt{1+k_i^2} - 1\right) \leqq \sqrt{1+\left(\sum_{i=1}^{s} k_i\right)^2} - 1,$$

wobei die Gleichheit genau für $s = 1$ eintritt. Für $x < 0$ ist somit

$$\sum_{i=1}^{m-1}\left(\sqrt{x^2+c_i} + x\right) < \sqrt{x^2+\left(\sum_{i=1}^{m-1}\sqrt{c_i}\right)^2} + x \leqq \sqrt{x^2+c_m} + x,$$

also $\varphi_3(x) < 0$.

Nun werden wir den Satz beweisen. Aus B.3 und (15) folgt, dass positive zulässige Lösungen mit den Lösungen des Systems

$$x_i = x - \sqrt{x^2 - c_i}, \quad (i = 1, \dots, m-1)$$
$$x_m = x + \varepsilon\sqrt{x^2 - c_m},$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 2x,$$
$$\varepsilon^2 = 1$$

identisch sind. Nichtpositive zulässige Lösungen von (13) sind nach B.7 mit denjenigen Lösungen des Systems

$$x_i = x + \sqrt{x^2 + c_i}, \quad (i = 1, \dots, m-1)$$
$$x_m = x - \sqrt{x^2 + c_m},$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 2x$$

identisch, für die $x < 0$ gilt. Hieraus folgt, dass im ersten Fall x eine (positive) Nullstelle von $\varphi_1(x)$ (für $\varepsilon = -1$) oder $\varphi_2(x)$ (für $\varepsilon = 1$) ist, im zweiten Fall eine negative Nullstelle von $\varphi_3(x)$.

So ergibt sich der erste Teil des Satzes aus B.11 , B.14 und daraus, dass im Falle der positiven Lösung nach B.10

$c_{n} < \sum_{i=1}^{n-1} c_i$, also auch $\sqrt{c_n} < \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{c_i}$ gilt.

Die Eindeutigkeit im zweiten Teil ist eine Folgerung von B.5 , B.9 und B.10 . Die Existenz einer zulässigen Lösung unter den angegebenen Voraussetzungen folgt aus B.12 und B.13 . Der Hilfssatz ist vollkommen bewiesen.

(2,10) Satz. Das zyklische Raumvieleck in E_n ist durch die Längen seiner $n+1$ Seiten (Kanten) und ihre Anordnung bis auf die Lage in E_n eindeutig bestimmt. Sind diese Längen $l_1, l_2, \ldots, l_{n+1}$, wobei $l_{n+1} = \max(l_1, \ldots, l_{n+1})$ gilt, so existiert ein solches Raumvieleck dann und nur dann, falls

(17) $$l_{n+1} < \sum_{i=1}^{n} l_i$$

ist. Dabei ist dieses Raumvieleck spitz-, recht- oder stumpfwinklig zyklisch, je nachdem

$$l_{n+1}^2 < \sum_{i=1}^{n} l_i^2 ,$$

(18) $$l_{n+1}^2 = \sum_{i=1}^{n} l_i^2$$

oder

$$l_{n+1}^2 > \sum_{i=1}^{n} l_i^2$$

gilt.

Anmerkung. Die Relationen (17) bzw. (18) gehen für $n = 2$ in die bekannte Dreiecksungleichung bzw. pythagoreische Ungleichung über.

Beweis des Satzes. Die Notwendigkeit von (17) ist klar. Die rechtwinklig zyklischen Raumvielecke erfüllen nach dem Satz 35 aus [5] die zweite Relation in (18) und nach demselben Satz ist dieses Raumvieleck durch die Längen l_i eindeutig bestimmt. Aus der zweiten Relation in (11) folgt, dass einerseits zu jedem spitz- bzw. stumpfwinkligen Raumvieleck eine positive bzw. nichtpositive zulässige Lösung des Systems (13) mit $m = n+1,\ c_i = \ell_i^2$ und $x_i = \frac{p_i}{\sqrt{|\sum p_k|}};\ x_0 = \operatorname{sgn} \sum p_k \quad (i = 1, \ldots, n+1)$

existiert, andererseits zu jeder positiven bzw. nichtpositiven zulässigen Lösung von (13) mit $c_i = \ell_i^2$ ein spitz- bzw. stumpfwinkliges Raumvieleck mit den gegebenen Kantenlängen existiert (wenn man in (11) $p_i = x_i \,|\sum_{k=1}^{n+1} x_k|$ setzt). Die Existenz und Eindeutigkeit folgt somit aus (2,9) und (17).

(2,11) Definition. Wir nennen (für einen Augenblick) zwei Raumvielecke in E_n direkt bzw. indirekt äquivalent, falls es eine eineindeutige Zuordnung ihrer Seitenvektoren gibt derart, dass die entsprechenden Vektoren gleich und alle gleichsinnig bzw. alle entgegengesetzt gerichtet sind.

Anmerkung. In diesem Sinne sind z.B. alle in einen n-Simplex orthogonal eingeschriebenen Raumvielecke untereinander äquivalent. Es ist klar, dass jedes zu einem Raumvieleck V direkt äquivalente Raumvieleck aus V durch Hintereinandersetzen der Seitenvektoren von V (in einer bestimmten Reihenfolge), bzw. noch durch Parallelverschiebung entsteht. Man kann auch leicht feststellen, dass die zu zwei äquivalenten Raumvielecken zugehörigen Simplexe den gleichen Rauminhalt haben. x)

(2,12) Satz. Alle zu einem zyklischen Raumvieleck äquivalenten Raumvielecke sind wieder zyklisch (von demselben Typ) und haben Umkugeln von gleichen Halbmessern. Alle in einen orthozentrischen n-Simplex orthogonal eingeschriebenen (zyklischen) Raumvielecke besitzen eine gemeinsame Umkugel (ihr Mittelpunkt ist im Lemoineschen Punkt des Simplexes). xx)

x) Vgl. [1], S. 103 - 104.

xx) Diese Tatsache ist für den Fall $n = 2$ und $n = 3$ (in einer anderen Formulierung) bekannt. Vgl. [8], S. 165 und [9], S. 158.

Beweis. Der erste Teil folgt aus (1,8) und (2,4). Der zweite Teil ist für rechtwinklig zyklische Raumvielecke eine Folgerung eines bekannten Satzes. Sei also das Raumvieleck spitz- oder stumpfwinklig zyklisch. Die Kantenlängen l_{ij} des zugehörigen zyklischen n-Simplexes sind dann durch (12) gegeben. Die zu der Matrix ($i, j = 1, 2, \ldots, n+1$) $(n+2)$-ter Ordnung $\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & l_{ij}^2 \end{pmatrix}$

inverse Matrix ist, wie man sich leicht überzeugt, (c_{rs}), $r, s = 0, 1, \ldots, n+1$, wo

$$c_{00} = -\frac{1}{2p^2}\Big[\sum_{\substack{i,j=1\\ i \neq j}}^{n+1} p_i^2 p_j + \sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n+1} p_i p_j p_k\Big], \quad c_{0i} = \frac{1}{2p}(p_{i-1} + p_i),$$

$$c_{ii} = -\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p_{i-1}} + \frac{1}{p_i}\Big), \qquad c_{i-1,i} = c_{i,i-1} = \frac{1}{2p_{i-1}}$$

$(i = 1, \ldots, n+1;\ p_0 = p_{n+1})$, $c_{ij} = 0$ für $i, j = 1, \ldots, n+1$

und $j \neq i-1$, $j \neq i$, $j \neq i+1 \mod (n+1)$ gilt.

Laut (1,13) in [7] ist der Halbmesser der Umkugel dieses Simplexes

$$r = \sqrt{-\frac{1}{2} c_{00}}\,,$$

ist also eine symmetrische Funktion von $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$. Hieraus folgt, dass jedes zu dem gegebenen äquivalente Raumvieleck die Umkugel vom gleichen Halbmesser hat, denn die Zahlen p_i hängen nur von den Längen der zugehörigen Seitenvektoren und nicht von ihrer Anordnung ab.

Die letzte Behauptung folgt aus der zweiten und aus (1,8).

3. Netze auf einem Simplex.

In diesem Abschnitt werden wir uns mit der folgenden Frage beschäftigen: Sei Σ ein n-Simplex in E_n mit den Eckpunkten $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ und sei K eine Menge von einigen seinen Kanten. Sei ferner $\mathfrak{M}(K)$ die Menge von allen n-Simplexen mit den Eckpunkten $C_1, C_2, \ldots, C_{n+1}$ in E_n , die die Eigenschaft besitzen, dass für $A_i A_j \in K$ $C_i C_j$ dieselbe Länge wie $A_i A_j$ hat. Das Problem ist, unter den Simplexen aus $\mathfrak{M}(K)$ diejenigen Simplexe aufzufinden, deren Rauminhalt maximal ist (und zu entscheiden, ob solche Simplexe existieren). Um sich kurz ausdrücken zu können, werden wir sagen, dass ein Netz gegeben ist, d.h. eine Menge von Kanten mit vorgegebenen Längen. Dabei werden wir auf die Frage der Existenz irgendeines solchen n-Simplexes nicht eingehen (auch in unserer Problemstellung gehen wir von einem Simplex aus, so dass $\mathfrak{M}(K)$ nicht leer ist). Wir werden in diesem Sinne den folgenden Satz beweisen:

(3,1) Sei ein Netz N auf einem n-Simplex Σ vorgeschrieben. Es existiert ein n-Simplex vom maximalen Rauminhalt mit diesem Netz dann und nur dann, falls das Netz N zusammenhängend ist, d.h. falls man von jedem Eckpunkt in Σ aus zu jedem anderen Eckpunkt von Σ über die (abgeschlossenen) Kanten des Netzes gelangen kann. Dabei hat jeder maximale n-Simplex die Eigenschaft, dass gegenüber jeder in N nicht liegenden Kante ein rechter Winkel liegt.

Beweis. Es ist geometrisch klar, dass, wenn das Netz nicht zusammenhängend ist, zwischen einigen Ecken beliebig grosse Entfernungen vorkommen können und der Rauminhalt beliebig gross werden kann. Ist dagegen N zusammenhängend, und lässt man einen Eckpunkt A_1 aller dieser n-Simplexe fest, so liegen alle übrigen Eckpunkte aller dieser n-Simplexe in einer festen Hyperkugel (z.B. mit dem Halbmesser, der gleich der Summe der Längen von allen Kanten von N ist, und dem Mittelpunkt in A_1). Wenn man somit den Rauminhalt aller solchen Simplexe als Funktion der Längen der übrigen Kanten betrachtet, so ist er eine beschränkte Funktion auf einer kompakten Menge, falls wir auch ausgeartete "Simplexe", deren Eckpunkte in einer Hyperebene oder einem kleineren linearen Raum liegen, zulassen. Also wird dieses Maximum erreicht und es muss nichtausgeartete Simplexe geben, die es erreichen (die ausgearteten haben den Rauminhalt Null). Wegen der bekannten Bedingungen dafür, dass zu gegebenen Kantenlängen ein n-Simplex existiert, ist die Menge dieser nichtausgearteten Simplexe offen. Analytisch bedeutet das, dass in der bekannten Formel für den Rauminhalt V x)

$$V^2 = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n (n!)^2} \Delta,$$

wo

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 0, & 1, & 1, \dots, & 1 \\ 1, & 0, & l_{12}^2, \dots, & l_{1\,n+1}^2 \\ 1, & l_{12}^2, & 0, \dots, & l_{2\,n+1}^2 \\ - & - & - \quad - & - \\ 1, & l_{1\,n+1}^2, & l_{2,n+1}^2, \dots, & 0 \end{pmatrix}$$

und l_{ij} Längen der Kanten $A_i A_j$ im Simplex sind, für das maximale Simplex für $u < v$, $A_u A_v \notin N$,

$$\frac{\partial \Delta}{\partial l_{uv}} = 0$$

ist.

Da jedoch die Inverse zur Matrix $\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & l_{ij}^2 \end{pmatrix}$ auf der Stelle von l_{uv}^2 das Element $\rho \cos \varphi_{uv}$ hat, wo $\rho \neq 0$ und φ_{uv} ist der gegenüber $A_u A_v$ liegende Innenwinkel, muss dieses Element verschwinden. Also gilt $\varphi_{uv} = \frac{\pi}{2}$ und der Satz ist bewiesen.

Wir gehen auf die Eindeutigkeit und andere Fragen nicht mehr ein und werden dieses Resultat auf den speziellen Fall des zyklischen Netzes anwenden.

(3,2) Satz. Ist das Netz aus den Kanten $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_n A_{n+1}, A_{n+1} A_1$ zusammengesetzt, so ist der maximale Simplex ein zyklischer Simplex. Dieser Simplex ist durch das Netz bis auf die Lage in E_n eindeutig bestimmt.

Beweis. Aus (3,1) folgt, dass der maximale n-Simplex zyklisch ist. Das übrige folgt aus (2,10).

---

x) [1], S. 105.

Zum Schluss geben wir noch einen anderen wichtigen Spezialfall an:

(3,3) Ist das Netz zusammenhängend und ohne geschlossene Kantenzüge (also topologisch ein Baum), so ist der zugehörige maximale Simplex rechtwinklig x), wobei die Kanten des Netzes Katheten dieses Simplexes sind. Dieser maximale Simplex ist bis auf die Lage in E_n eindeutig bestimmt.

Beweis. Folgt aus (3,1) und der Definition des rechtwinkligen Simplexes in E_n x).

L i t e r a t u r

[1] Borsuk K., Geometria analityczna w n wymiarach, 1950.

[2] Čech E., Topologické prostory, Praha 1959.

[3] Fiedler M., Geometrie simplexu v E_n, I., Čas. pro pěst. mat. 79(1954), 297-320.

[4] Fiedler M., Geometrie simplexu v E_n, II., Čas. pro pěst. mat. 80(1955), 462-476.

[5] Fiedler M., Geometrie simplexu v E_n, III., Čas. pro pěst. mat. 81(1956), 182-223.

[6] Fiedler M., Über qualitative Winkeleigenschaften der Simplexe, Čech. mat. žurnal 7(1957), 463-478.

[7] Fiedler M., Über die qualitative Lage des Mittelpunktes der umgeschriebenen Hyperkugel im n-Simplex, Comm. math. Univ. Carol. 2,1 (1961).

[8] Jefremov D., Novaja geometrija treugolnika, Oděsa 1902.

[9] Thébault, V., Parmi les belles figures de la géometrie dans l´espace, Paris 1955.

---

x) Vgl. [6].