Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Vlastimil Pták

Ueber einen Typ von Saetzen ueber abgeschlossene Abbildungen

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 1 (1960), No. 4, 3–7

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104878

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
1, 4 (1960)

UEBER EINEN TYP VON SAETZEN UEBER ABGESCHLOSSENE ABBILDUNGEN

Vlastimil PTÁK, Praha

Die vorliegende Bemerkung ist dem Studium von gewissen Eigenschaften abgeschlossener Unterräume des kartesischen Produktes von zwei topologischen Räumen gewidmet. Mit Hilfe dieser Eigenschaften werden dann für den Fall linearer topologischer Räume Sätze über Offenheit, bzw. Stetigkeit von abgeschlossenen linearen Abbildungen bewiesen.

Die Bemerkung besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil enthält die notwendigen Begriffe und Erklärungen, während im zweiten Teile zuerst rein topologische Ergebnisse angegeben werden, die dann schichtweise verschärft werden im Falle, dass die vorkommenden topologischen Räume noch lineare Struktur besitzen. Der Hauptsatz (2.3) enthält im Wesentlichen zwei Sätze: den Satz über die offene Abbildung und den Satz über den abgeschlossenen Graph. Als spezieller Fall wird ein Satz formuliert, der unlängst von D.A.Rajkov 3 entdeckt wurde.

1. Erklärungen und Bezeichnungen. Es sei T eine Menge. Es sei weiter u ein System von Teilmengen der Menge T derart, dass u erstens die leere Menge und die Menge T und zweitens die Vereinigung jedes Teilsystems von u, sowie den Durchschnitt jedes endlichen Teilsystems von u enthält. Wir bezeichnen dann u als eine Topologie auf T. Ist v eine Topologie auf T derart, dass $v \supset u$, so werden wir sagen, v sei feiner als u. In der vorliegenden Bemerkung werden ausschliesslich Hausdorffsche Topologien behandelt. Ist u eine Hausdorffsche Topologie auf T, so bezeichnen wir mit $K(u)$ das System aller kompakten Teilmengen des topologischen Raumes (T,u). Ist die Topologie v feiner als u, so gilt offenbar $K(v) \subset K(u)$. Wir bezeichnen den Raum (T,u) als einen Raum vom Type (c), falls es keine von u verschiedene

Topologie v gibt, die feiner als u ist und gleichzeitig die Bedingung $K(v) = K(u)$ erfüllt.

Ist f eine beliebige Abbildung eines gegebenen Menge P in eine Menge Q, so verstehen wir unter dem Graph der Abbildung f die Menge aller Paare von Gestalt $[p, f(p)]$, wo p die Menge P verläuft.

Die notwendigen Definitionen und Begriffe aus der Theorie der linearen topologischen Räume, insbesondere die Erklärung der Räume vom Type (LN^*) sind in [1] enthalten. Lokal konvexe topologische lineare Räume werden wir kurz "konvexe Räume" nennen.

Es seien P und Q zwei Mengen. Es sei R eine Untermenge von $P \times Q$; weiter sei $M \subset P$, $N \subset Q$. Dann bezeichnen wir mit $R(N)$ die Menge der $x \in P$, zu denen es ein $y \in N$ gibt derart, dass $[x,y] \in R$. In analoger Weise bezeichnen wir mit $R(M)$ die Menge der $y \in Q$, zu denen es ein $x \in M$ gibt derart, dass $[x,y] \in R$. Ist M eine aus einem einzigen Punkte m bestehende Menge, so schreiben wir $R(m)$ statt $R(M)$; und analog in dem anderen Falle. Schliesslich nennen wir eine Menge $N \subset Q$ gesättigt im Bezug auf R, wenn folgendes gibt: für jedes $x \in P$ mit $R(x) \cap N \neq 0$ ist $R(x) \subset N$.

2. <u>Abgeschlossene Relationen.</u> Weitere Betrachtungen stützen sich auf den folgenden Hilfssatz:

(2,1) Es seien E und Y Hausdorffsche topologische Räume; es sei R eine abgeschlossene Untermenge von $E \times Y$ Es sei $K \subset Y$ kompakt. Dann ist $R(K)$ abgeschlossen in E. Ist $G \subset Y$ offen in Y und gesättigt in Bezug auf R, so ist $R(K) \cap R(G)$ offen in $R(K)$.

B e w e i s . Es sei x ein Element der abgeschlossenen Hülle von $R(K)$, das nicht zu $R(K)$ gehört. Dann liegt der Punkt $[x,k]$ für jedes $k \in K$ ausserhalb von R, sodass es eine Umgebung $U(x,k)$ von x in E und eine Umgebung $V(k)$ von k in Y gibt derart, dass $U(x,k) \times V(k)$ fremd zu R ist. Es gibt Punkte $k_1, \dots, k_n \in K$ mit $V(k_1) \cup \dots \cup V(k_n) \supset K$. Wir wählen ein $b_0 \in R(K) \cap U(x,k_1) \cap \ldots \cap U(x,k_m)$; es gibt also ein $k_0 \in K$, so dass $(b_0, k_0) \in R$. Da $k_0 \in K$, so gilt $k_0 \in V(k_i)$ für ein passendes i. Es gilt also $[b_0, k_0] \in R \cap [U(x,k_i) \times V(k_i)]$, was einen Widerspruch ergibt. Die Menge W ist also abgeschlossen in E.

Um den zweiten Teil des Satzes zu beweisen, weisen wir zunächst darauf hin, dass es gilt:

$$R(K) - R(G) \subset R(K-G)$$

für jede Menge $G \subset Y$. Es sei weiter G gesättigt in Bezug auf R und es sei $x \in R(K-G)$ - Dann ist $R(x) \cap (K-G) \neq 0$; es ergibt sich also zunächst $x \in R(K)$ Wäre nun $R(x) \cap G \neq 0$, so könnten wir (mit Rücksicht auf die Sättigungseigenschaft) daraus folgern, dass $R(x) \subset G$; das ist jedoch unmöglich.

Es gilt daher $R(x) \subset Y - G$, so dass $x \in E - R(G)$ Wir haben also die Beziehung $R(K) - R(G) = R(K-G)$ bewiesen. Da $K-G$ kompakt, ist die Menge $R(K) - R(G)$ abgeschlossen in E, daher $R(K) \cap R(G)$ offen in $R(K)$.

(2.2) Es seien E und Y konvexe Räume, R ein abgeschlossener Unterraum in $E \times Y$. Es sei Y Vereinigung einer wachsenden Folge von absolut konvexen und kompakten Mengen K_n. Es sei $B \subset E$ absolut konvex und kompakt. Dann gibt es eine natürliche Zahl n und eine Zahl $\lambda > 0$ derart, dass $B \subset \lambda R(K_n)$.

B e w e i s. Wir bezeichnen mit E_0 die lineare Hülle der Menge B und betrachten die Topologie b_0 auf E_0, erzeugt durch B als Einheitskugel. Folglich ist (E_0, b_0) ein Banachraum. Die Menge $R(K_n)$ ist abgeschlossen in Bezug auf die Topologie u des Raumes E. Wir zeigen, dass die Menge $R(K_n) \cap E_0$ abgeschlossen ist in Bezug auf die Topologie b_0. Tatsächlich sei $x_0 \in E_0$ ein Punkt der abgeschlossenen Hülle der Menge $R(K_n) \cap E_0$ bei der Topologie b_0. Ist U eine beliebige u-Umgebung des Punktes x_0, so folgt aus der Kompaktheit von B, dass $U \supset x_0 + \varepsilon B$ für ein $\varepsilon > 0$. Da $(x_0 + \varepsilon B) \cap R(K_n) \cap E_0$ sichtbar ist, so ist auch $U \cap R(K_n)$ nichtleer, also $x_0 \in R(K_n) \cap E_0$.

Dennach bilden die Mengen $R(K_n) \cap E_0$ eine wachsende Folge absolut konvexer und abgeschlossener Teilmengen des Banachraumes (E_0, b_0). Wenigstens eine von diesen Mengen muss also einen inneren Punkt enthalten. Es gibt also ein $y_0 \in E_0$, eine Zahl $\sigma > 0$ und ein Index n, so dass $y_0 + \sigma B \subset R(K_n)$. Ist $b \in B$, so $y_0 + \sigma B \in R(K_n)$ und auch $y_0 - \sigma B \in R(K_n)$. Infolge der Symmetrie von $R(K_n)$ gilt auch $-y_0 + \sigma b \in R(K_n)$, so dass $\sigma b = \frac{1}{2}(y_0 + \sigma b) + \frac{1}{2}(-y_0 + \sigma b) \in R(K_n)$. Es gilt daher $B \subset \frac{1}{\sigma} R(K_n)$.

Jetzt können wir den Hauptsatz aussprechen:

(2,3) Satz: Es seien E, Y zwei konvexe Räume; dabei sei E vom Type (c); weiter sei Y Vereinigung einer wachsenden Folge von absolut konvexen kompakten Mengen. Dann gilt:

(1) ist f eine lineare Abbildung von E in Y, deren Graph abgeschlossen in $E \times Y$ ist, so ist f stetig;

(2) ist g eine lineare Abbildung eines Unterraumes $Y_0 \subset Y$ auf E, deren Graph abgeschlossen in $E \times Y$ ist, so ist g offen.

B e w e i s. Wir betrachten zuerst den ersten Fall. Im Satze (2,1) werde für R der Graph der Abbildung f gesetzt. Man stellt leicht fest, dass jede Menge $M \subset Y$ gesättigt in Bezug auf R ist und dass $R(M) = f^{-1}(M)$ gilt. Es sei G eine in Y offene Menge. Ist K_n eine Folge von absolut konvexen kompakten Teilmengen von Y derart, dass $K_n \subset K_{n+1}$ und $Y = \bigcup K_n$, so ergibt sich nach (2,1), dass für jedes K_n die Menge $f^{-1}(G) \cap f^{-1}(K_n)$ relativ offen in $f^{-1}(K_n)$ ist. Ist nun $B \subset E$ absolut konvex und kompakt, so ist nach (2,2) für passende n, λ $B \subset f^{-1}(\lambda K_n)$. Die Menge $B \cap f^{-1}(G)$ ist daher für jedes B relativ offen in B, somit ist $f^{-1}(G)$ offen in E, gemäss der Definition des Raumes vom Type (c).

Im zweiten Falle setzen wir wieder für R im Satze (2,1) den Graph der Abbildung g. Es sei G offen in Y_0. Es gibt eine in Y offene Menge H derart, dass

$G = H \cap Y_0$. Wir bezeichnen $M = H + g^{-1}(0)$, so dass M offen in Y ist. Man bestätigt leicht, dass M gesättigt in Bezug auf R ist. Wenn wir nun zeigen, dass $g(G) = R(M)$, dann ist nach (2,1) die Menge $R(K_n) \cap g(G)$ für jedes n relativ offen in $R(K_n)$, und wir führen den Beweis in derselben Weise zu Ende wie im vorhergehenden Falle. Um die Identität $g(G) = R(M)$ zu beweisen, machen wir uns zunächst klar, dass es offenbar gilt: $g(G) \subset R(G) \subset R(M)$. Es sei $x \in R(M)$. Dann gibt es ein $h \in H$ und ein $z \in g^{-1}(0)$, so dass $[x, h+z] \in R$. Das besagt, dass $h+z \in Y$ und $x = g(h+z)$. Da $h+z \in Y_0$ und auch $z \in Y_0$, so ist $h \in Y_0$, daher $h \in G$. Es gilt also $x = g(h+z) = g(h) \in (G)$.

(2,4) Korollar: Jede stetige lineare Abbildung eines Raumes (LN^*) auf einen Raum vom Type $(\mathfrak{c})$ ist offen.

B e w e i s . Das Korollar ist eine unmittelbare Folge des zweiten Teiles des vorhergehenden Satzes.

L I T E R A T U R .

[1] N.BOURBAKI, Sur certains espaces vectoriels topologiques. Ann.Inst.Fourier,Grenoble 2(1951), 5-16.

[2] J.L.KELLEY, General Topology.

[3] D.A.RAJKOV, O dvuch klassach lokalńo vypuklych prostranstv,važnych v priloženijach. Voroněž, Trudy semin.po funkc.analizu 5(1957), 22-34.