Svetla Dimitrova Milusheva

Обоснования метода усреднения для одного класса интегро-дифференциальных уравнении

Archivum Mathematicum, Vol. 8 (1972), No. 4, 195--206

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104779

ARCH. MATH., SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS, 4,
VIII: 195 — 206, 1972

ОБОСНОВАНИЯ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. Д. Милушева

(Поступило в редакцию 28-ого августа 1972 г.)

В настоящей работе, применяя схему усреднения, предложенную в [1], [2], [3] для приближенного решения задачи Коши для нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений стандартного типа, обосновывается метод усреднения для решения задачи Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений содержащих медленные и быстрые переменные.

Надо отметить, что метод усреднения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений содержащих медленные и быстрые переменные был обоснован впервые В. М. Волосовым в [4].

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерры

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \varepsilon X(t, x(t), y(t), \int_0^t \varphi(t, s, x(s), y(s))\,\mathrm{d}s), \\ \dot{y}(t) &= Y(t, x(t), y(t), \int_0^t \varphi_1(t, s, x(s), y(s))\,\mathrm{d}s), \end{aligned} \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x^\circ, \qquad y(0) = y^\circ, \tag{2}$$

где $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}), y = (y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}), X = (X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}),$

$Y = (Y^{(1)}, \ldots, Y^{(m)}), \varphi = (\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)}), \varphi_1 = (\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_1{}^{(\text{ч})})$

а $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Наряду с системой (1) рассмотрим вырожденную ($\varepsilon = 0$) по отношению к ней систему

$$\begin{aligned} x &= \text{const.}, \\ \dot{y}(t) &= Y(t, x, y(t), \int_0^t \varphi_1(t, s, x, y(s))\,\mathrm{d}s), \end{aligned} \tag{3}$$

с начальным условием

$$y(0) = c, \tag{4}$$

где $c = (c^{(1)}, \ldots, c^{(m)})$ произвольная постоянная, $c \in C \subset R_m$.

Пусть решение системы (3), с начальным условием (4) известно и имеет вид

$$y = \psi(t, x, c), \qquad x = \text{const.}, \qquad \psi(0, x, c) = c. \tag{5}$$

Предположим, что в элементарных или специальных функциях можно вычислить интеграл

$$(6) \qquad \int_0^\infty \varphi(t, s, x, \psi(s, x, c))\,\mathrm{d}s = \varphi_2(t, x, c).$$

Тогда, если вдоль интегральных кривых $y = \psi(t, x, c)$ задачи (3), (4), где c рассматривается как векторный параметр существуют независящие от параметра c средние значения

$$(7) \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, \psi(t, x, c), u)\,\mathrm{d}t = \bar{X}(x, u),$$

$$(8) \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^\infty \varphi(T, s, x, \psi(s, x, c))\,\mathrm{d}s = \lim_{T\to\infty} \frac{\varphi_2(T, x, c)}{T} = \bar{\varphi}_2(x),$$

то усредненным уравнением первого приближения для медленных переменных $x(t)$ системы (1) будем называть уравнение

$$(9) \qquad \dot{\xi}(t) = \varepsilon \bar{X}(\xi(t), \int_0^t \bar{\varphi}_2(\xi(s))\,\mathrm{d}s)$$

с начальным условием

$$(10) \qquad \xi(0) = x^\circ.$$

Отметим, что если $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ и $A = (a_{ij})_{m,n}$, то по определению

$$\| x \| = [\sum_{i=1}^n (x^{(i)})^2]^{\frac{1}{2}}, \qquad \| A \| = [\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m A_{ij}^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Докажем теорему о близости компонентов $x(t)$ решения $\{x(t), y(t)\}$ задачи Коши (1), (2) и решение $\xi(t)$ задачи Коши (9), (10).

Теорема 1. Пусть:

1. Функция $X(t, x, y, u)$ непрерывна для всех $t \in \Delta_1 = [0, \infty)$ и $(x, y, u) \in \Omega = \Omega(x, y, u) = \Omega(x) \times \Omega(y) \times \Omega(u)$, где $\Omega(x), \Omega(y)$ открытые области пространств R_n и R_m соответственно, $\Omega(u) = R_n$.

Функция $\varphi(t, s, x, y)$ непрерывна для всех $t \in \Delta_1$, $s \in \Delta_2 = [0, \infty)$ и $(x, y) \in \Omega(x, y)$.

В соответствующих проекциях области $\Omega(t, s, x, y, u) = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \Omega$ выполняются неравенства:

$$\| X(t, x, y, u) \| \leqq M,$$

$$\| X(t, x, y, u) - X(t, x', y', u') \| \leqq \lambda \| x - x' \| + \Theta_1(t) \| y - y' \| + \\ + \nu \| u - u' \|, \Theta_1(t) \leqq \mu,$$

$$\| \varphi(t, s, x, y) - \varphi(t, s, x', y') \| \leqq \sigma(t, s) [\| x - x' \| + \| y - y' \|],$$

$$\| \int_t^\infty \varphi(t, s, x, y)\,\mathrm{d}s \| \leqq \Theta_2(t),$$

где λ, μ, ν положительные постоянные, а функции $\Theta_1(t)$, $\Theta_2(t)$ и $\sigma(t, s)$ удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{t} \int_0^t \Theta_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty,$$

$\Theta_2(t)$ ограничена и монотонно стремится к нулю при $t \to \infty$,

$$\int_0^t \sigma(t, s)\,\mathrm{d}s = \sigma_0(t) \leqq \text{const.}, \qquad \frac{1}{t}\int_0^t \sigma_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

2. Через каждую точку области $\Omega(t, x, y)$ проходит единственная интегральная кривая $y = \psi(t, x, c)$ задачи Коши (3), (4), соответствующая некоторому значению параметра c, причем

а) эта кривая определена и лежит внутри области $\Omega(x, y)$ при всех $t \in \Delta_1$.

б) решение $y = \psi(t, x, c)$ задачи (3), (4) непрерывная по совокупности всех своих переменных t, x и c вектор – функция удовлетворяющая в области $\Omega(t, x) \times C$ неравенствам

$$\| \psi(t, x, c) \| \leqq K, \| \psi(t, x, c) - \psi(t, x', c) \| \leqq K_1 \| x - x' \|,$$

где K и K_1 положительные постоянные.

3. Система (I) имеет единственное, ограниченное и непрерывное решение $\{x(t), y(t)\}$ ($\| x(t) \| \leqq b_1$, $\| y(t) \| \leqq b_2$, b_1 и b_2 – положительные постоянные) удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x^\circ \in \Omega(x), \qquad y(0) = y^\circ \in \Omega(y). \tag{11}$$

4. Для всех $(x, c) \in \Omega(x) \times C$ и для всех $(x, u, c) \in \Omega(x, u) \times C$ существуют независящие от параметра c пределы (8) и (9), причем предельные переходы в (8) и (9) происходят равномерно относительно совокупностей

$$(x, c) \in \Omega(x) \times C \text{ и } (x, u, c) \in \Omega(x, u) \times C.$$

Средние значения $\bar{X}(x, u)$ и $\bar{\varphi}_2(x)$ определены, непрерывны и ограничены для всех $(x, u) \in \Omega(x, u)$ и $x \in \Omega(x)$ и удовлетворяют в этих областях условиям

$$\| \bar{X}(x, u) - \bar{X}(x', u') \| \leqq \lambda_1[\| x - x' \| + \| u - u' \|],$$
$$\| \bar{\varphi}_2(x) \| \leqq c_1.$$

Здесь λ_1, c_1 – положительные постоянные.

5. В силу условия 4 существуют такие монотонно убывающие функции $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ ($\alpha_1(t) \to 0$, $\alpha_2(t) \to 0$ при $t \to \infty$), что для всех $t > 0$ и для всех $x' \in \Omega(x)$ и $(x', u') \in \Omega(x, u)$ выполняются неравенства

$$\left\| \frac{1}{t}\int_0^\infty \varphi(t, s, x', \psi(s, x', c))\,\mathrm{d}s - \bar{\varphi}_2(x') \right\| \leqq \alpha_1(t),$$

$$\left\| \frac{1}{t}\int_0^t [X(\tau, x', \psi(\tau, x', c), u') - \bar{X}(x', u')]\,\mathrm{d}\tau \right\| \leqq \alpha_2(t).$$

Будем предполагать, что $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ удовлетворяют условиям: $\alpha_i(0) \leqq \text{const.}$, ($i = 1, 2$),

$$\frac{1}{t}\int_0^t \tau\alpha_1(\tau)\,d\tau = \alpha_3(t) \text{ монотонно стремится к нулю при } t \to \infty,$$

$$\frac{1}{t}\int_0^t \tau\alpha_i(\tau)\,d\tau \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty \qquad (i = 2, 3)$$

6. Решение $\xi(t)$ усредненного уравнения

$$\dot{\xi}(t) = \varepsilon \bar{X}(\xi(t), \int_0^t \bar{\varphi}_2(\xi(s))\,ds), \tag{12}$$

удовлетворяющее начальному условию $\xi(0) = x^0$, существует, единствено, однозначно определено и ограничено ($\| \xi(t) \| \leqq d$, d — положительная постоянная) для всех $t \in \Delta_1$ и лежит в области $\Omega(x)$ вместе с некоторой ϱ — окрестностью ($\varrho = \text{const.}$, $\varrho > 0$).

Тогда, если $\{x(t), y(t)\}$ решение задачи Коши (1), (2), а $\xi(t)$ решение усредненного уравнения (9) с начальным условием $\xi(0) = x^0$, то для любых $\eta > 0$, $L > 0$, можно указать такое ε^0, что при $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon^0$, на интервале $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$ будет выполняться неравенство

$$\| x(t) - \xi(t) \| < \eta.$$

Доказательство.

Введем функцию

$$v(t, x, u) = \int_{\Omega(x,u)} \Delta a(x - x', u - u') \{ \int_0^t [X(\tau, x', \psi(\tau, x', c), u') - \bar{X}(x', u')]\,d\tau +$$
$$+ \int_0^t d\tau[\int_0^\infty \varphi(\tau, s, x', \psi(s, x', c))\,ds - \tau\bar{\varphi}_2(x')]\}\,dx'\,du',$$

где

$$\Delta_a(x, u) = \begin{cases} A_a\left(1 - \dfrac{\| x \|^2 + \| u \|^2}{a^2}\right) & \text{при } \| x \|^2 + \| u \|^2 \leqq a^2 \\ 0 & \text{при } \| x \|^2 + \| u \|^2 > a^2, \end{cases},$$

$$\int_{R_{2n}} \Delta_a(x, u)\,dx\,du = 1, \qquad R_{2n} = R_n(x) \times R_n(u).$$

В силу условий теоремы 1 для всех точек (x, u) a — окрестность которых принадлежит области $\Omega(x, u)$ и для всех $t \geqq 0$ выполняются неравенства

$$\| v(t, x, u) \| \leqq t[\alpha_2(t) + \alpha_3(t)] = t\beta(t), \tag{13}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} v(t, x, u) \right\| \leqq I_a t\beta(t), \tag{14}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial u} v(t, x, u) \right\| \leqq I_a t\beta(t), \tag{15}$$

$$(16)\qquad \| P(t,x,u) \| = \left\| \frac{\partial}{\partial t} v(t,x,u) - X(t,x,\psi(t,x,c),u) + \bar{X}(x,u) \right\| \leqq$$
$$\leqq 2(\lambda + \mu K_1 + \nu)\, a + t\alpha_1(t),$$

где

$$I_a = \max \left\{ \int_{R_{2n}} \left\| \frac{\partial}{\partial x} \Delta_a(x,u) \right\| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}u, \quad \int_{R_{2n}} \left\| \frac{\partial}{\partial u} \Delta_a(x,u) \right\| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}u \right\}.$$

Пусть

$$\tilde{x}(t) = \xi(t) + \varepsilon v(t, \xi(t), \zeta(t)),$$

где

$$\zeta(t) = \int_0^t \bar{\varphi}_2(\xi(s))\,\mathrm{d}s.$$

На интервале $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$, если a и ε достаточно малы, выполняется неравенство

$$\| \varepsilon v(t, \xi(t), \zeta(t)) \| \leqq \varepsilon t \beta(t) \leqq B(\varepsilon) < \frac{1}{2} \min \{\varrho, \eta\},$$

где

$$B(\varepsilon) = \sup_{|\tau| \leqq L} (\tau\beta(\tau\varepsilon^{-1})) \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Следовательно на этом интервале при достаточно малых a и ε, $\tilde{x}(t)$ принадлежит области $\Omega(x)$ и $\| \tilde{x}(t) \| \leqq d_1$, d_1 — положительная постоянная.

Для выражения

$$Q(t) = \frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}t} - \varepsilon X(t, \tilde{x}, y, \int_0^t \varphi(t, s, \tilde{x}(s), y(s))\,\mathrm{d}s),$$

где $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$, а $y = y(t)$ — компонент решения $\{x(t), y(t)\}$ задачи Коши (1), (2), имея ввиду (13)—(16) и при $t \geqq 0$ получаем оценку

$$\| Q(t) \| \leqq \varepsilon \| P(t, \xi, \zeta) \| + \varepsilon^2(\lambda + I_a M)\, t\beta(t) + \varepsilon(K + b_2)\, \Theta_1(t +$$
$$+ \varepsilon\nu \left\| \int_0^t [\bar{\varphi}_2(\xi(s)) - \varphi(t, s, \xi(s)\, \psi(s, \xi(s), c))]\,\mathrm{d}s \right\| +$$
$$+ \varepsilon^2 \nu \int_0^t \sigma(t,s)\, s\beta(s)\,\mathrm{d}s + \varepsilon\nu(K + b_2) \int_0^t \sigma(t,s)\,\mathrm{d}s + \varepsilon I_a t\beta(t)\, c_1$$

В силу условий теоремы существует такая монотонно убывающая функция $\alpha(t)$ ($\alpha(t) \to 0$ при $t \to \infty$), что при всех $t \geqq 0$ и $x' \in \Omega(x)$ выполняется неравенство

$$(17)\qquad \left\| \int_0^t [\varphi(t, s, x', \psi(s, x', c)) - \bar{\varphi}_2(x')]\,\mathrm{d}s \right\| \leqq t\alpha(t).$$

Действительно из условий теоремы 1 следует, что существует монотонно убывающая функция $\alpha_1(\tau)$ ($\alpha_1(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$), такая, что

$$\left\| \frac{1}{\tau} \int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x', \psi(s, x', c)) - \bar{\varphi}_2(x')] \, ds + \frac{1}{\tau} \int_\tau^\infty \varphi(\tau, s, x', \psi(s, x', c)) \, ds \right\| \leqq$$

$$\leqq \alpha_1(\tau),$$

откуда получаем

$$\left\| \frac{1}{\tau} \int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x', \psi(s, x', c)) - \bar{\varphi}_2(x')] \, ds \right\| \leqq \alpha_1(\tau) + \left\| \frac{1}{\tau} \int_\tau^\infty \varphi(\tau, s, x', \psi(s, x', c)) \, ds \right\|$$

или

$$\| \int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x', \psi(s, x', c)) - \bar{\varphi}_2(x')] \, ds \| \leqq \tau \alpha_1(\tau) + \Theta_2(\tau) =$$

$$= \tau \left[\alpha_1(\tau) + \frac{1}{\tau} \Theta_2(\tau) \right].$$

Последнее неравенство показывает, что для функции $\alpha(t)$ можно выбрать функцию

$$\alpha(t) = \alpha_1(t) + \frac{1}{t} \Theta_2(t).$$

Следовательно

$$\| Q(t) \| \leqq \varepsilon \| P(t, \xi, \zeta) \| + \varepsilon^2 (\lambda + I_a M) t \beta(t) + \varepsilon (K + b_2) \Theta_1(t) +$$
$$+ \varepsilon \nu t \alpha(t) + \varepsilon^2 \nu \delta t(t) + \varepsilon \nu (K + b_2) \sigma_0(t) + \varepsilon c_1 I_a t \beta(t),$$

где

$$\delta(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \sigma(t, s) s \beta(s) \, ds \to 0 \text{ при } \quad t \to \infty.$$

Пусть $\{x(t), y(t)\}$ — решение задачи Коши (1), (2). Предположим что на интервале $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$ $x(t)$ не покидает области $\Omega(x)$. Тогда на этом интервале имеем

$$\left\| \frac{d(x - \tilde{x})}{dt} \right\| \leqq \varepsilon \lambda \| x - \tilde{x} \| + \varepsilon \nu (b_1 + d_1) \sigma_0(t) + \| Q(t) \|,$$
$$[x(t) - \tilde{x}(t)] \,|_{t=0} = 0,$$

откуда следует

$$\| x - \tilde{x} \| \leqq \int_0^t [\varepsilon \nu (b_1 + d_1) \sigma_0(\tau) + \| Q(\tau) \|] \, e^{\varepsilon \lambda (t - \tau)} \, d\tau. \tag{18}$$

Введя функции

$$\gamma_1(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_0(\tau) \, d\tau, \qquad \gamma_5(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \tau \alpha(\tau) \, d\tau,$$

$$\gamma_2(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \tau \alpha_1(\tau) \, d\tau, \qquad \gamma_6(t) = \frac{1}{t^2} \int_0^t \tau \delta(\tau) \, d\tau,$$

$$\gamma_3(t) = \frac{1}{t^2}\int_0^t \tau\beta(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad \gamma_7(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \tau\beta(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$\gamma_4(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \Theta_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad \gamma_i(t)\to 0 \text{ цри } t\to\infty\ (i = \overline{1,7}),$$

для правой стороны неравенства (18) на интервале $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$ получаем оценку

$$\begin{aligned}\int_0^t [\varepsilon\nu(b_1 + d_1)\,\sigma_0(\tau) + \| Q(\tau)\|]\,\mathrm{e}^{\varepsilon\lambda(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau \leqq \mathrm{e}^{\lambda L}\{\nu(b_1 + d_1)\,L\gamma_1(L\varepsilon^{-1}) +{}\\ + 2(\lambda + \mu K_1 + \nu)\,aL + L\gamma_2(L\varepsilon^{-1}) + (\lambda + I_a M)\,L^2\gamma_3(L\varepsilon^{-1}) +{}\\ + (K + b_2)\,L\gamma_4(L\varepsilon^{-1}) + \nu L^2\gamma_6(L\varepsilon^{-1}) + \nu(K + b_2)\,L\gamma_1(L\varepsilon^{-1}) +{}\\ + \nu L\gamma_5(L\varepsilon^{-1}) + c_1 I_a L\gamma_7(L\varepsilon^{-1})\}.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что всегда можно выбрать параметры Q и ε таким образом, что бы на интервале $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$ выполнялось неравенство

$$\| x(t) - \bar{x}(t)\| < \frac{1}{2}\min\{\varrho, \eta\}.$$

Следовательно на этом интервале

$$\| x(t) - \xi(t)\| \leqq \| x(t) - \tilde{x}(t)\| + \|\tilde{x}(t) - \xi(t)\| < \min\{\varrho, \eta\}.$$

Покажем теперь, что $x(t)\in\Omega(x)$ на всем интервале $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$. Действительно, так как начальная точка $x(0)$ находится внутри области $\Omega(x)$, то на некотором отрезке $0 \leqq t \leqq t^*$ $(t^* \leqq L\varepsilon^{-1})$ решение $x(t)$ будет находиться внутри области $\Omega(x)$. Тогда если выберем a и ε достаточно малые, то на всем отрезке $0 \leqq t \leqq t^*$, на котором $x(t)\in\Omega(x)$, будет

$$\| x(t) - \xi(t)\| < \frac{1}{2}\varrho.$$

Если предположим, что $t^* < L\varepsilon^{-1}$, то на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$, в силу непрерывности решений $x(t)$ и $\xi(t)$, найдется такая точка T, в которой будет выполняться неравенство

$$\varrho > \| x(T) - \xi(T)\| > \frac{1}{2}\varrho.$$

Но из этого неравенства видно, что при $t = T$ решение $x(t)$ еще не покинуло области $\Omega(x)$. Поэтому $T\in[0, t^*]$ и следовательно

$$\| x(T) - \xi(T)\| < \frac{1}{2}\varrho.$$

Полученное противоречие показывает, что $t^* \geqq L\varepsilon^{-1}$. Этим теорема 1 доказана.

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений (1) с начальным условием (2).

Предположим, что решение вырожденной системы (3) с начальным условием (4) известно и имеет вид (5) и кроме того предположим, что в элементарных или специальных функциях можно вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \varphi(t, s, x, \psi(s, x, c))\,\mathrm{d}t = \varphi_3(s, x, c). \tag{19}$$

Если вдоль интегральных кривых $y = \psi(t, x, c)$ задачи (3), (4), где c рассматривается как векторный параметр, существуют независящие от параметра c средние значения

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(t, x, \psi(t, x, c), u)\,\mathrm{d}t = \bar{X}(x, u), \tag{20}$$

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s}\int_0^\infty \varphi(t, s, x, \psi(s, x, c))\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to\infty} \frac{\varphi_3(s, x, c)}{s} = \bar{\varphi}_3(x), \tag{21}$$

то усредненным уравнением первого приближения для медленных переменных $x(t)$ системы (1) будем называть уравнение

$$\dot{\xi}(t) = \varepsilon\bar{X}(\xi(t), \int_0^t \bar{\varphi}_3(\xi(s))\,\mathrm{d}s) \tag{22}$$

с начальным условием

$$\xi(0) = x^\circ \tag{23}$$

Для близости компонентов $x(t)$ решения $\{x(t), y(t)\}$ задачи Коши (1), (2) и решения $\xi(t)$ задачи Коши (22), (23) справедлива следующая теорема:

Теорема 2. Пусть:

1. Выполнены условия 1, 2 и 3 теоремы 1.
2. При $t > 0$ функция $\Theta_2(t)$ удовлетворяет еще условиям

$$\frac{1}{t}\int_0^t \tau\,\Theta_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau \to 0, \qquad \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^\tau \Theta_2(s)\,\mathrm{d}s \to 0 \text{ при } t\to\infty.$$

3. Для всех $(x, c) \in \Omega(x) \times C$ и для всех $(x, u, c) \in \Omega(x, u) \times C$ существуют независящие от параметра c пределы (12) и (13) причем предельные переходы в (12) и (13) происходят равномерно относительно совокупностей

$$(x, c) \in \Omega(x) \times C \text{ и } (x, u, c) \in \Omega(x, u) \times C.$$

Средние значения $\bar{X}(x, u)$ и $\bar{\varphi}_3(x)$ определены, непрерывны и ограничены для всех $(x, u) \in \Omega(x, u)$ и $x \in \Omega(x)$ и удовлетворяют в этих областях следующим условиям

$$\| \bar{X}(x, u) - \bar{X}(x', u') \| \leqq \lambda[\| x - x' \| + \| u - u' \|],$$

$$\| \bar{\varphi}_3(x) \| \leqq c_1.$$

Здесь λ и c_1 — положительные постоянные.

4. Для всех $t \in \Delta_1$, $s \in \Delta_2$, $x \in \Omega(x)$, $(x, y, c) \in \Omega(x, y) \times C$ функции $\varphi(t, s, x, y)$ и $\bar{\varphi}_3(x)$ удовлетворяют неравенству

$$\| \varphi(t, s, x, \psi(s, x, c)) - \bar{\varphi}_3(x) \| \leqq \Theta_3(s),$$

где $\Theta_3(s)$ со своей стороны удовлетворяет условию

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^\tau \Theta_3(s)\, \mathrm{d}s \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty.$$

5. В силу условия 3 существуют такие монотонно убывающие функции $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ ($\alpha_1(t) \to 0$, $\alpha_2(t) \to 0$ при $t \to \infty$), что для всех $t > 0$, $x' \in \Omega(x)$, $(x', u') \in \Omega(x, u)$ выполняются неравенства

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^\infty \varphi(\tau, s, x', \psi(s, x', c))\, \mathrm{d}\tau - \bar{\varphi}_3(x') \right\| \leqq \alpha_1(t),$$

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t [X(\tau, x', \psi(\tau, x', c), u') - \bar{X}(x', u')]\, \mathrm{d}\tau \right\| \leqq \alpha_2(t).$$

Будем предполагать, что $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ удовлетворяют условиям:

a) $t\alpha_1(t)$ и $\frac{1}{t} \int_0^t \tau\alpha_i(\tau)\, \mathrm{d}\tau$ $(i = 1, 2)$ монотонно стремятся к нулю при $t \to \infty$;

σ) $\frac{1}{t} \int_0^t \tau^2\alpha_1(\tau)\, \mathrm{d}\tau \to 0$, $\qquad \frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^\tau s\alpha_1(s)\mathrm{d}s \to 0$ при $t \to \infty$.

b) $\alpha_i(0) \leqq \text{const.}$, $\qquad (i = 1, 2)$.

6. Решение $\xi(t)$ усредненного уравнения

$$\dot{\xi}(t) = \varepsilon\bar{X}(\xi(t), \int_0^t \bar{\varphi}_3(\xi(s))\, \mathrm{d}s), \tag{24}$$

удовлетворяющее начальному условию $\xi(0) = x^0$, существует, единствено и ограничено ($\| \xi(t) \| \leqq d$, d — положительная постоянная) для всех $t \in \Delta_1$ и лежит в области $\Omega(x)$ вместе с некоторой ϱ — окрестностью ($\varrho = \text{const.}$ $\varrho > 0$).

Тогда, если $\{x(t), y(t)\}$ решение задачи Коши (1), (2), а $\xi(t)$ решение усредненного уравнения (22) с начальным условием $\xi(0) = x^0$, то для любых $\eta > 0$, $L > 0$ можно указать такое ε^0, что при $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon^0$, на интервале $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$ будет выполняться неравенство

$$\| x(t) - \xi(t) \| < \eta.$$

Доказательство. В силу условий теоремы существует такая монотонно убывающая функция $\alpha(t)$, что для всех $t \leqq 0$ и $x' \in \Omega(x)$ выполняется неравенство

$$(25) \qquad \left\| \int_0^t [\varphi(\tau, s, x', \psi(s, x', c)) - \bar{\varphi}_3(x')]\, d\tau \right\| \leqq t\alpha(t).$$

Вводим функцию

$$v(t, x, u) = \int_{\Omega(x,u)} \Delta_a(x - x', u - u') \left\{ \int_0^t [X(\tau, x', \psi(\tau, x', c), u') - \bar{X}(x', u')]\, d\tau + \right.$$
$$+ \int_0^t ds \left\{ \int_0^t [\varphi(\tau, s, x', \psi(s, x', c)) - \bar{\varphi}_3(x')]\, d\tau - \int_0^s [\varphi(\tau, s, x', \psi(s, x', c)) - \right.$$
$$\left. \left. - \bar{\varphi}_3(x')]\, d\tau \right\}\right\} dx'\, du',$$

где

$$\Delta_a(x, u) = \begin{cases} A_a \left(1 - \dfrac{\| x \|^2 + \| u \|^2}{a^2}\right)^2 & \text{при } \| x \|^2 + \| u \|^2 \leqq a^2, \\ 0 & \text{при } \| x \|^2 + \| u \|^2 > a^2, \end{cases}$$

$$\int_{R_{2n}} \Delta_a(x, u)\, dx\, du = 1, \qquad R_{2n} = R_n(x) \times R_n(u).$$

Для всех точек (x, u), a — окрестность которых принадлежит области $\Omega(x, u)$ и для всех $t \geqq 0$ выполняются неравенства

$$\| v(t, x, u) \| \leqq t\alpha_2(t) + t^2\alpha(t) + \int_0^t s\alpha(s)\, ds = t\left[\alpha_2(t) + t\alpha(t) + \frac{1}{t}\int_0^t s\alpha(s)\, ds\right] =$$
$$(26) \qquad = t\beta(t),$$

$$(27) \qquad \left\| \frac{\partial}{\partial x} v(t, x, u) \right\| \leqq I_a t\beta(t),$$

$$(28) \qquad \left\| \frac{\partial}{\partial u} v(t, x, u) \right\| \leqq I_a t\beta(t),$$

$$(29) \qquad \| P(t, x, u) \| = \left\| \frac{\partial}{\partial t} v(t, x, u) - X(t, x, \psi(t, x, c), u) - \bar{X}(x, u) \right\| \leqq$$
$$\leqq 2(\lambda + \mu K_1 + \nu)\, a + t\Theta_{30}(t).$$

Здесь

$$\Theta_{30}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \Theta_3(s)\, ds,$$

$$I_a = \max\left\{ \int_{R_{2n}} \left\| \frac{\partial}{\partial x} \Delta_a(x, u) \right\| dx\, du, \qquad \int_{R_{2n}} \left\| \frac{\partial}{\partial u} \Delta_a(x, u) \right\| dx\, du \right\},$$

$\beta(t)$ — функция которая монотонно стремится к нулю при $t \to \infty$.

Положим $\tilde{x}(t) = \xi(t) + \varepsilon v(t, \xi(t), \zeta(t))$, где

$$\zeta(t) = \int_0^t \bar{\varphi}_3(\xi(s))\,ds.$$

На интервале $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$, если a и ε достаточно малы, выполняется неравенство

$$\| \varepsilon v(t, \xi(t), \zeta(t)) \| \leqq \varepsilon t\beta(t) \leqq B(\varepsilon) < \frac{1}{2}\min\{\varrho, \eta\}, \tag{30}$$

где
$$B(\varepsilon) = \sup_{|\tau|\leqq L} | \tau\beta(\tau\varepsilon^{-1}) | \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Отсюда следует, что на интервале $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$, $\tilde{x}(t) \in \Omega(x)$ вместе со своей $\frac{\varrho}{2}$ — окрестностью и $\| \tilde{x}(t) \| \leqq d_1$, d_1 — положительная постоянная.

Имея ввиду (26)—(29) для выражения

$$Q(t) = \frac{d\tilde{x}}{dt} - \varepsilon X\left(t, \tilde{x}, y, \int_0^t \varphi(t, s, \tilde{x}(s), y(s))\,ds\right),$$

где $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$, а $y = y(t)$ — компонент решения $\{x(t), y(t)\}$ задачи Коши (1), (2), при $t \geqq 0$, после небольших выкладок, получаем оценку

$$\begin{aligned} \| Q(t) \| \leqq{}& 2\varepsilon(\lambda + \mu K_1 + \nu)\, a + \varepsilon t\Theta_{30}(t) + \varepsilon^2(\lambda + I_a M)\, t\beta(t) + \\ &+ \varepsilon(K + b_2)\,\Theta_1(t) + \varepsilon\nu t\Theta_{30}(t) + \varepsilon^2\nu t\delta(t) + \varepsilon\nu\,(K + b^2)\,\sigma_0(t) + \varepsilon I_a c_1 t\beta(t), \end{aligned} \tag{31}$$

где
$$\delta(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \sigma(t, s) s\beta(s)\,ds \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Пусть $\{x(t), y(t)\}$ решение задачи Коши (1), (2). Предположим, что на интервале $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$ $x(t)$ не покидает области $\Omega(x)$. Тогда на интервале $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$ имеем

$$\left\| \frac{d(x - \tilde{x})}{dt} \right\| \leqq \varepsilon\lambda \| x - \tilde{x} \| + \varepsilon\nu(b_1 + d_1)\,\sigma_0(t) + \| Q(t) \|,$$
$$[x(t) - \tilde{x}(t)]\,|_{t=0} = 0,$$

откуда следует неравенство

$$\| x - x \| \leqq \int_0^t [\varepsilon\nu(b_1 + d_1)\,\sigma_0(\tau) + \| Q(\tau) \|]\, e^{\varepsilon\lambda(t-\tau)}\,d\tau. \tag{32}$$

Введя функции

$$\gamma_1(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \sigma_0(\tau)\,d\tau, \qquad \gamma_4(t) = \frac{1}{t^2}\int_0^t \tau\beta(\tau)\,d\tau,$$

$$\gamma_2(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \tau\Theta_{30}(\tau)\,d\tau, \qquad \gamma_5(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \Theta_1(\tau)\,d\tau,$$

$$\gamma_3(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \tau\beta(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad \gamma_6(t) = \frac{1}{t^2}\int_0^t \tau\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$\gamma_i(t) \to 0 \qquad \text{при} \qquad t \to \infty \qquad (i = \overline{1, 6}),$$

для правой стороны неравенства (32) на интервале $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}$ получаем следующую оценку

$$\begin{aligned}
&\int_0^t [\varepsilon\nu(b_1 + d_1)\,\sigma_0(\tau) + \| Q(\tau) \|]\, \mathrm{e}^{\varepsilon\lambda(t-\tau)}\, \mathrm{d}\tau \leqq \mathrm{e}^{\lambda L}\, \{\nu(b_1 + d_1)\, L\gamma_1(L\varepsilon^{-1}) + \\
(33) \qquad &+ 2(\lambda + \mu K_1 + \nu)\, aL + L\gamma_2(L\varepsilon^{-1}) + (\lambda + I_a M)\, L^2\gamma_4(L\varepsilon^{-1}) + \\
&+ (K + b_2)\, L\gamma_5(L\varepsilon^{-1}) + \nu L\gamma_2(L\varepsilon^{-1}) + \nu L^2\gamma_6(L\varepsilon^{-1}) + \nu(K + b_2)\, L\gamma_1(L\varepsilon^{-1}) + \\
&+ I_a c_1 L\gamma_3(L\varepsilon^{-1})\}.
\end{aligned}$$

Так как дальше доказательство теоремы 2 проводится вполне аналогично доказательству теоремы 1, мы его не приводим.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Филатов А. Н., Талипова Л. И., *Об одном варианте усреднения в системах интегро-дифференциальных уравнениях.* Диф. у-ния, т. 5, № 5, 1969.

[2] Филатов А. Н., *Усреднение в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях.* Изд - во „ФАН", Ташкент, 1967.

[3] Филатов А. Н., *Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях.* Изд - во „ФАН", Ташкент, 1971.

[4] Волосов В. М., *Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений.* Успехи матем. наук, т. XVII, вып. 6 (108), 1962.

Светла Милушева
Высший машинно-электротехн. институт им. В. И. Ленина
ул. Деде агач № 11, София — 8
Болгария