ARCH. MATH., SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS, 4,
VIII: 177 — 178, 1972

ЛОКАЛЬНЫЙ МЕТОД В НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗОНАНСАХ

А. Д. Брюно

(Поступило в редакцию 28-ого августа 1972 г.)

Локальный метод предназначен для изучения решений $X(t)$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений

(1) $$\mathrm{d}X/\mathrm{d}t = \Phi(X)$$

в некоторой окрестности U неподвижного или периодического решения. Случаи комплексных и вещественных X и Φ рассматриваются параллельно. При этом функции $\Phi(X)$ предполагаются аналитическими или достаточно гладкими в окрестности U. Других ограничений не делается; рассматриваются сколь угодно вырожденные и резонансные случаи [5].

Решение поставленной задачи ищется посредством построения такой специальной локальной замены координат, что в новых переменных система интегрируется. Лишь в сравнительно простых случаях существует указанная замена в полной окрестности. В сложных же случаях исследуемая окрестность определенным образом разбивается на куски, и в каждом куске вводятся свои локальные переменные, в которых система интегрируется. Построение указанных разбиений и замен, вообще говоря, производится не сразу, а постепенно — шаг за шагом. На каждом шаге строится более мелкое разбиение и в каждом куске вводятся свои координаты, в которых система становится проще. При весьма общих предположениях через конечное число шагов система становится интегрируемой в каждом кусочке.

В системах, возникающих из механических [9], физических и астрономических задач [7], как правило достаточно одного (редко двух) таких шагов. Основу этого локального метода составляют два понятия (пояснения даны для случая неподвижной точки $X = 0$).

1. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

Если система (1) имеет линейную часть, то ее можно преобразовать к „нормальной форме", которая эквивалентна системе меньшего порядка § без линейных членов. Для различных случаев нормализующие преобразования исследовались Пуанкаре, Пикаром, Горном, Дюляком, Биркгофом, Черри, Зигелем, Мозером, Стернбергом и др. Окончательный вид, способ понижения порядка и общие свойства указаны автором [2, 3, 8].

2. РАЗРЕШЕНИЕ СЛОЖНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ

Если разложения функций $\Phi(X)$ по степеням X не содержат линейных членов, то по этим разложениям можно выделить конечное число „укороченных систем"

(2) $$\mathrm{d}X/\mathrm{d}t = \Phi^{(i)}(X)$$

и соответственно разбить окрестность U на куски $U^{(i)}$ так, что каждый кусок $U^{(i)}$ будет криволинейным конусом, примыкающим к неподвижной точке, а укорочение (2) является первым нетривиальным приближением системы (1) в $U^{(i)}$.

Это осуществляется построением некоторого многогранника в пространстве показателей степеней. Далее для простого (в некотором смысле) укорочения (2) можно построить нормальную форму системы (1) в куске $U^{(i)}$, то-есть упростить систему в этом куске. Для сложного укорочения (2) делается определенное бирациональное (степенное) преобразование, раздувающее неподвижную точку в некоторое многообразие M, а кусок $U^{(i)}$ – в окрестность V этого многообразия. Теперь надо на M найти неподвижные точки и исследовать их окрестности, которые уже будут кусками окрестности V. Здесь система уже будет в некотором смысле проще, чем исходная, и к ней можно снова применять такие же построения, приводящие к дальнейшим упрощениям. Этот прием разрешения особенностей аналогичен ,,кратному сигма процессу" в алгебраической геометрии и ведет свое начало от многоугольника Ньютона. Для двумерных систем дфиференциальных уравнений выделением и использованием групп ведущих членов занимались Брио и Буке (1856), Горн, Фроммер и другие. Для многомерных систем это сделано автором [1, 3].

Локальный метод, естественно, распадается на две части. Первая – алгебраическая – заключается в указании алгоритма для построения требуемых формальных разложений. Вторая часть заключается в интерпретации этих рядов посредством функций аналитических (Пуанкаре, Дюляк, Зигель, Плисс, окончательный результат – автор, [4, 6, 8]) или гладких (Биркгоф, Стернберг, Хартман, Гробман и др.), а так же в оценке точности приближенного интегрирования этим методом (Биркгоф, Зигель, Мозер и др.).

В [10] подробно изложен метод для $n = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Брюно А. Д., *Асимптотика решений нелинейных систем дифференциальных уравнений.* Доклады АН СССР, *143*, № 4, 763—766 (1962).

[2] Брюно А. Д., *Нормальная форма дифференциальных уравнений*, Доклады АН СССР, *157*, № 6, 1276—1279 (1964).

[3] Брюно А. Д., *Степенные асимптотики решений нелинейных систем*, Известия АН СССР, серия математическая, *29*, № 2, 329—364 (1965).

[4] Брюно А. Д., *О расходимости преобразований дифференциальных уравнений к нормальной форме*, Доклады АН СССР, *174*, № 5, 1003—1006, (1967).

[5] Брюно А. Д., *Нормальная форма нелинейных колебаний*, Труды V Международной конференции по нелинейным колебаниям, т. *1*, Киев, 1970, стр. 112—119.

[6] Брюно А. Д., *Аналитическая форма дифференциальных уравнений*, Математические заметки, *6*, № 6, 771—778 (1969).

[7] Брюно А. Д., *Неустойчивость в системе Гамильтона и распределение астероидов*, Математический сборник *83* (*125*): 2(10), 273—312 (1970).

[8] Брюно А. Д., *Аналитическая форма дифференциальных уравнений*, Труды московского Математического Общества, т. *25* (1971) стр. 119—262; т. *26* (1972) стр. 199—239.

[9] Брюно А. Д., *О движении гироскопа в кардановом подвесе*, Механика Твёрдого Тела, 1972, 6, стр. 5–18.

[10] Брюно А. Д., *Элементы нелинейного анализа* (конспект лекций), Самарканд, 1973.

Александр Д. Брюно
Институт прикладной математики АН СССР
Миусская пл. 4, Москва 125047
СССР