Robert Karpe
Algorithmus für Bell'sche Polynome

Archivum Mathematicum, Vol. 8 (1972), No. 1, 45--50

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104757

ARCH. MATH. 1, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS,
VIII: 45—50, 1972

ALGORITHMUS FÜR BELL'SCHE POLYNOME

ROBERT KARPE, Brno

(Eingegangen am 19. Oktober 1970)

Die Formen einzelner Derivationen einer zusammengesetzten Funktion auszudrücken, ist eine Aufgabe, die eine bedeutende Rolle in vielen kombinatorischen und statistischen Problemen spielt — siehe [I], Seite 34, 35.

Wenn wir, nach dem erwähnten Ort von [I], eine zusammengesetzte Funktion bezeichnen

(1) $A(t) = f[g(t)]$, und weiter, wenn wir bezeichnen $\mathrm{D}_t = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}$, $\mathrm{D}_u = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}$,

$$\mathrm{D}_t^n A(t) = A_n, \quad [D_u^n f(u)]_{u=g(t)} = f_n, \quad \mathrm{D}_t^n g(t) = g_n, \tag{2}$$

dann, durch das fortschreitende Derivieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} A_1 &= f_1 g_1 \\ A_2 &= f_1 g_2 + f_2 g_1^2 \\ A_3 &= f_1 g_3 + 3 f_2 g_2 g_1 + f_3 g_1^3 \end{aligned} \tag{3}$$

Die Ausdrücke auf den rechten Seiten dieser Gleichungen sind die ersten drei Bell'schen Polynomen.

Das fortschreitende Derivieren ist aber ein sehr komplizierter Algorithmus. Deshalb liegt der Zweck dieser Behandlung darin, einen viel einfacheren Algorithmus für die Herstellung der Bell'schen Polynomen einzuführen.

In Übereinstimmung mit dem erwähnten Buch betrachten wir eine exponentielle, zusammengesetzte Funktion

$$\mathrm{e}^{g(t)}, \quad \text{kurz}: \mathrm{e}^{g}. \tag{4}$$

Die Form der n-ten Derivation dieser Funktion drückt die Di-Bruno'sche Formel aus, siehe z. B. [I], Seite 36, die Formel (46).

Bemerkung. Nach der erwähnten Literatur kann man den Ausdruck A_n auch mittels der nicht-algoritmischen Aplikation der Di-Bruno'schen Formel erhalten. Dieses Verfahren ist aber zu mühselig, wenn auch vorteilhafter als das fortschreitende Derivieren.

In Hinblick auf das Weitere wenden wir diese Formel in solcher Weise an, dass wir die Ordnungen mit grossen, und die Potenzen mit kleinen Buchstaben bezeichnen; ausserdem vereinfachen wir die Symbole für Derivationen und deren Potenzen; so z. B.:

$$\frac{d^N}{dt} e^{g(t)} = D_N e^g , \left[\frac{d^A}{dt} g(t) \right]^a = g_A^a , \text{ usw.}$$

Die Di-Bruno'sche Formel lautet dann folgendermassen:

$$D_N e^g = \sum \frac{N!}{(A!)^a (B!)^b \dots (M!)^m . a! b! \dots m!} g_A^a g_B^b \dots g_M^m e^g , \tag{5}$$

wo für die natürlichen Zahlen $A, B, \dots M, a, b, \dots m$, gilt:

$$Aa + Bb + \dots + Mm = N, \qquad A > B > \dots > M, \tag{6}$$

wo die rechte Seite (6) die Summe aller voneinander verschiedenen Glieder ist, deren Ordnungen und Potenzen die Bedingung (6) erfüllen.

DIE DEFINITION DES ALGORITHMUS

$g = g(t)$ sei eine willkürliche Funktion, die die verlangte Anzahl der Derivationen hat.

Mit dem Symbol Φ_X^1, $X = 0, 1, 2, \dots$, bezeichnen wir den additiven Operator, der folgende Eigenschaften hat:

$$\Phi_0^1 = 0. \tag{7}$$

Es sei k eine Konstante und $X > 0$. Dann gilt:

$$\Phi_X^1 . k = g_X^1 . k . \tag{8}$$

Es sei $U > V > \dots > Z$. Dann gilt:

$$\Phi_X^1 . k . g_U^u g_V^v \dots g_Z^z = k . [\Phi_X^1 . g_U^u] . g_V^v \dots g_Z^z , \tag{9}$$

wo weiter

$$\Phi_X^1 \cdot g_U^u = g_X^1 \cdot g_U^u , \text{ wenn } X > U , \tag{10}$$

$$\Phi_X^1 \cdot g_X^u = \frac{1}{1 + u} \cdot g_X^1 \cdot g_X^u = \frac{1}{1 + u} g_X^{1+u} , \tag{11}$$

$$\Phi_X^1 \cdot g_U^u = 0 , \text{ wenn } X < U . \tag{12}$$

Satz.

Es sei $D_N e^g = e^g \mathfrak{A}_N$; $N = 0, 1, 2, \dots$ *Dann gilt:*

$$(13) \qquad \mathfrak{A}_N = \sum_{K=0} \binom{N}{K} \cdot \Phi^1_{N-K} \cdot \mathfrak{A}_K\,, \qquad N \geqq 1\,; \quad \mathfrak{A}_0 = 1\,.$$

Beweis.

(1) *für $N = 0$:* Aus der Relation $D_N\, e^g = e^g\, \mathfrak{A}_N$ ist der Wert $\mathfrak{A}_0 = 1$ ersichtlich.

(2) für $N = 1$: Mit Hinsicht auf (7) können wir die Relation (13) auch in folgender Form schreiben:

$$\mathfrak{A}_N = \sum_{K=0}^{N-1} \binom{N}{K} \cdot \Phi^1_{N-K}\, \mathfrak{A}_K\,.$$

Nach der Di-Bruno'schen Formel gilt für eine beliebige natürliche Zahl L:

$$\mathfrak{A}_L = \sum \frac{L!}{(A!)^a\,(B!)^b \ldots (M!)^m\, a!\, b! \ldots m!}\; g^a_A\, g^b_B \cdots g^m_M\,,$$

wo die Summation durchläuft über alle natürlichen Zahlen $A.\ B\ \ldots,\ M,\ a,\ b,\ \ldots,\ m$ mit den Eigenschaften $Aa + Bb + \ldots + Mm = L,\ A > B > \ldots > M$. Ausserdem gilt $\mathfrak{A}_0 = 1$.

N sei eine beliebige natürliche Zahl und V_K ein beliebiges (von der Null verschiedenes) Glied von $\mathfrak{A}_K$, $K < N$. Wir wollen zunächst zeigen, dass $\binom{N}{K} \cdot \Phi^1_{N-K} \cdot V_K$ ein Glied von $\mathfrak{A}_N$ ist.

Falls $K = 0$ ist, dann $V_0 = 1$, sodass nach (8) gilt $\binom{N}{0} \Phi^1_N \cdot 1 = g^1_N$, was ein Glied von $\mathfrak{A}_N$ ist.

Falls K eine natürliche Zahl ist, dann gilt

$V_K = \dfrac{K!}{(B!)^b (C!)^a \ldots (M!)^m\, a!\, b! \ldots m!}\; g^b_B\, g^c_C \cdots g^m_M$, wo $B, C, \ldots, M, b, c, \ldots, m$, solche natürliche Zahlen sind, dass $Bb + Cc + \ldots + Mm = K,\ B > C > \ldots > M$. Hier können drei verschiedene Fälle auftreten:

a) $N - K > B$. Dann nach (9) und (10) gilt

$$\binom{N}{K} \cdot \Phi^1_{N-K} \cdot V_K = \binom{N}{K} \cdot \frac{K!}{(B!)^b\,(C!)^c \ldots (M!)^m\, b!\, c! \ldots m!}\; g^b_B\, g^c_C \cdots g^m_M\,,$$

wo $N-K, B, C, \ldots, M, 1, b, c, \ldots, m$ solche natürlichen Zahlen sind, dass $(N-K) \cdot 1 + Bb + Cc + \ldots + Mm = N - K + K = N,\quad N - K > B > C > \ldots > M$. Also $\binom{N}{K} \cdot \Phi^1_{N-K} \cdot V_K$ ist ein Glied von $\mathfrak{A}_N$.

b) $N - K = B$. Dann nach (9) und (11) gilt

$$\binom{N}{K} \cdot \Phi^1_{N-K} \cdot V_K = \binom{N}{K} \cdot \frac{K!}{(B!)^b\,(C!)^c \ldots (M!)^m\, b!\, c! \ldots m!} \cdot \frac{1}{b+1}\, g^{b+1}_B\, g^c_C \cdots g^m_M\,,$$

wo $N - K$, C, ..., M, $b + 1$, c, ..., m solche natürlichen Zahlen sind, dass $(N-K) . (b + 1) + Cc + \ldots + Mm = N - K + (N-K) . b + Cc + \ldots + Mm =$ $= N - K + K = N$, $N - K = B > C > \ldots > M$. Also $\binom{N}{K} . \Phi^{I}_{N-K} . V_K$ ist ein Glied von $\mathfrak{A}_N$.

c) $N - K < B$. Dann nach (9) und (12) gilt $\binom{N}{K} . \Phi^{I}_{N-K} . V_K = 0$.

Weiter wollen wir zeigen, dass jedes (von der Null verschiedenes) Glied von $\mathfrak{A}_N$ in folgender Form ausgedrückt werden kann:

$V_N = \binom{N}{K} : \Phi^{I}_{N-K} . V_K$, wo $K < N$ und V_K ein geeignetes Glied von $\mathfrak{A}_K$ ist.

Nach der Di-Bruno'schen Formel gilt

$$V_N = \frac{N!}{(A!)^a (B!)^b \ldots (M!)^m a! b! \ldots m!} g_A^a g_B^b \ldots g_M^m ,$$

wo $A, B, \ldots, M, a, b, \ldots, m$ solche natürlichen Zahlen sind, dass $Aa + Bb + \ldots + Mm = N$, $A > B > \ldots > M$.

Hier können wieder drei verschiedene Fälle entstehen:

a) $A = N$, $a=1$. Dann $K=0$ und $V_0=1$ hat die angeführte Eigenschaft.

b) $A < N$, $a = 1$. Dann $K = N - A$ und $V_{N-A} = \dfrac{(N - A)!}{(B!)^b \ldots (M!)^m b! \ldots m!}$. $g_B^b \ldots g_M^m$ hat die angeführte Eigenschaft.

c) $A<N$, $a>1$. Dann $K=N$—A und $V_{N-A} = \dfrac{(N-A)!}{(A!)^{a-1}(B!)^b \ldots (M!)^m . (a-1)! . b! \ldots m!}$. $g_A^{a-1} g_B^b \ldots g_M^m$ hat die angeführte Eigenschaft.

Mit Hinsicht darauf, dass in allen drei Fällen der Index K und das Glied V_K offenbar eindeutig bestimmt werden können, wird hiemit unser Beweis beendet.

Der Bell'sche Polynom A_N geht dann eindeutig aus dem Ausdruck $\mathfrak{A}_N$ hervor. Nach [I]. Seite 35, gilt

(16) $A_N = f_1 . A_{N,1} + f_2 . A_{N,2} + \ldots + f_N . A_{N,N}$, siehe auch unsere Relation (3).

Da in unserem Falle gilt $f_K = e^g$, $K = 1, 2, \ldots, N$, ist es notwendig zu bedenken, dass für die Funktion $e^{s \cdot g}$, wo die Konstante $s \neq 1$ ist, gilt:

(17) $$f_K = s^K . e^{s \cdot g} , \quad K = 1, 2, \ldots, N ,$$

und dabei für ein wilkürliches Glied $\overline{V}_{N,i} \in D_N\, e^{s \cdot g}$ gilt

$$(18)\qquad \overline{V}_{N,i} = [\,s^{a+b+\dots+m} \,.\, e^{s\,.\,g}\,] \,.\, \frac{N!}{(A!)^a \dots (M!)^m \,.\, a! \dots m!}\, g_A^a \dots g_M^m \,.$$

Durch den Vergleich (17) mit (18) ist ersichtlich, wie die einzelnen Ausdrücke $A_{N,J}$ von (16) aus den Gliedern $V_{N,i} \in \mathfrak{A}_N$ zusammen-gestellt werden.

Beispiel. Man soll mittels des Algorithmus den Ausdruck $\mathfrak{A}_8$, und daraus den zugehörigen Bell'schen Polynom A_8 bilden.

Wir benützen die Kenntnis der Ausdrücke:

$\mathfrak{A}_0 = 1$, siehe (13) für $N = 0$.

$\mathfrak{A}_1 = g_1^1$

$\mathfrak{A}_2 = g_2^1 + g_1^2$

$\mathfrak{A}_3 = g_3^1 + 3g_2^1 g_1^1 + g_1^3$

$\mathfrak{A}_4 = g_4^1 + 4g_3^1 g_1^1 + 3g_2^2 + 6g_2^1 g_1^2 + g_1^4$

Bemerkung: Wie daraus ersichtlich ist, können wir dieses Verfahren leicht für eine Rechenmaschiene programmieren, sodass wir die Ausdrücke A_K, $K = 1, 2, \dots$ bis zu dem willkürlich ausgewählten Index $K = N$ bekommen. Darin eben liegt die Bedeutung unseres Algorithmus.

$$\mathfrak{A}_5 = \underline{g_5^1 + 5g_4^1 g_1^1} + 10 g_3^1 g_2^1 + 10\, g_3^1 g_1^2 + 15\, g_2^2 g_1^1 + 10\, g_2^1 g_1^3 + g_1^5$$

$$\mathfrak{A}_6 = \underline{g_6^1 + 6\, g_5^1 g_1^1 + 15\, g_4^1 g_2^1 + 15\, g_4^1 g_1^2 + 10\, g_3^2 + 60\, g_3^1 g_2^1 g_1^1 + 20\, g_3^1 g_1^3} + 15\, g_2^3 + {}$$
$$+ 45\, g_2^2 g_1^2 + 15\, g_2^1 g_1^4 + g_1^6$$

$$\mathfrak{A}_7 = \underline{g_7^1 + 7\, g_6^1 g_1^1 + 21\, g_5^1 g_2^1 + 21\, g_5^1 g_1^2 + 35\, g_4^1 g_3^1 + 105\, g_4^1 g_2^1 g_1^1 + 35\, g_4^1 g_1^3 +}$$
$$+ \underline{70\, g_3^2 g_1^1 + 105\, g_3^1 g_2^2 + 210\, g_3^1 g_2^1 g_1^2 + 35\, g_3^1 g_1^4 + 105\, g_2^3 g_1^1 + 105\, g_2^2 g_1^3 +}$$
$$+ \underline{21\, g_2^1 g_1^5 + g_1^7}$$

Nach der Formel (13) gilt

$$\mathfrak{A}_8 = 1.\Phi_8^1\, \mathfrak{A}_0 + 8 \,.\, \Phi_7^1\, \mathfrak{A}_1 + 28 \,.\, \Phi_6^1\, \mathfrak{A}_2 + 56 \,.\, \Phi_5^1\, \mathfrak{A}_3 + 70 \,.\, \Phi_4^1\, \mathfrak{A}_4 + 56 \,.\, \Phi_3^1\, \mathfrak{A}_5 + {}$$
$$+ 28 \,.\, \Phi_2^1\, \mathfrak{A}_6 + 8 \,.\, \Phi_1^1\, \mathfrak{A}_7 + \underline{1 \,.\, \Phi_0^1\, \mathfrak{A}_8 \,.}$$

Bei dem Einsetzen für $\mathfrak{A}_K$, $K = 0, 1, \dots, 8$, lassen wir schon jene Glieder aus, die nach (7), oder nach (9) mit (12), ein Null-Produkt darbieten würden, siehe die obigen unterstrichenen Glieder.

$$\mathfrak{A}_8 = \Phi_8^1 \,.\, 1 + 8\, \Phi_7^1 g_1^1 + 28\, \Phi_6^1\, (g_2^1 + g_1^2) + 56\, \Phi_5^1\, (g_3^1 + 3g_2^1 g_1^1 + g_1^3) + 70\, \Phi_4^1\, (g_4^1 + {}$$
$$+ 4g_3^1 g_1^1 + 3g_2^2 + 6g_2^1 g_1^2 + g_1^4) + 56\, \Phi_3^1\, (10\, g_3^1 g_2^1 + 10\, g_3^1 g_1^2 + 15\, g_2^2 g_1^1 + 10\, g_2^1 g_1^3 + {}$$
$$+ g_1^5) + 28\, \Phi_2^1\, (15\, g_2^3 + 45\, g_2^2 g_1^2 + 15\, g_2^1 g_1^4 + g_1^6) + 8\, \Phi_1^1 g_1^7 \,.$$

Weiter, nach (8), (9) und (11), gilt

$$\mathfrak{A}_8 = g_8^1 + 8\, g_7^1 g_1^1 + 28\, g_6^1 g_2^1 + 28\, g_6^1 g_1^2 + 56\, g_5^1 g_3^1 + 168\, g_5^1 g_2^1 g_1^1 + 56\, g_5^1 g_1^8 + 35\, g_4^2 + {}$$
$$+ 280\, g_4^1 g_3^1 g_1^1 + 210\, g_4^1 g_2^2 + 420\, g_4^1 g_2^1 g_1^2 + 70\, g_4^1 g_1^4 + 280\, g_3^2 g_2^1 + 280\, g_3^2 g_1^2 + {}$$
$$+ 840\, g_3^1 g_2^2 g_1^1 + 560\, g_3^1 g_2^1 g_1^3 + 56\, g_3^1 g_1^5 + 105\, g_2^4 + 420\, g_2^3 g_1^2 + 210\, g_2^2 g_1^4 + {}$$
$$+ 28\, g_2^1 g_1^6 + g_1^8 \,.$$

Daraus geht unmittelbar hervor:

$$A_8 = f_1 g_8^1 + f_2 (8\, g_7^1 g_1^1 + 28\, g_6^1 g_2^1 + 56\, g_5^1\, g_3^1 + 35\, g_4^2) + f_3 (28\, g_6^1\, g_1^2 + 168\, g_5^1 g_2^1 g_1^1 + \\ + 280\, g_4^1 g_3^1 g_1^1 + 210\, g_4^1 g_2^2 + 280\, g_3^2 g_2^1) + f_4 (56\, g_5^1\, g_1^3 + 420\, g_4^1 g_2^1 g_1^2 + 280\, g_3^2 g_1^2 + \\ + 840\, g_3^1 g_2^2 g_1^1 + 105\, g_2^4) + f_5 (70\, g_4^1 g_1^4 + 560\, g_3^1 g_2^1 g_1^3 + 420\, g_2^3\, g_1^2) + f_6 (56\, g_3^1\, g_1^5 + \\ + 210\, g_2^2\, g_1^4) + f_7 \,.\, 28\, g_2^1\, g_1^6 + f_8\, g_1^8\,.$$

Siehe auch [1], die Tabelle auf der Seite 49.

LITERATUR

[1] Riordan John, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, New York, 1958.

Robert Karpe

Mathematisches Institut

Technische Hochschule, Brno

Tschechoslowakei