Archivum Mathematicum

Vítězslav Novák

Eine Bemerkung über die α-Dimension geordneter Mengen

Archivum Mathematicum, Vol. 5 (1969), No. 4, 187--190

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104699`

EINE BEMERKUNG ÜBER DIE α-DIMENSION GEORDNETER MENGEN*)

VÍTĚZSLAV NOVÁK

Herrn Prof. Dr. Otakar Borůvka zu seinem 70. Geburtstag gewidmet

Eingegangen am 14. Februar 1969

In dieser Arbeit benutzen wir die Birkhoffsche Bezeichnung für Operationen zwischen geordneten Mengen ([1] oder [2]), aber Cantorsche Bezeichnung für Operationen zwischen Ordnungstypen ([3] oder [5]). Dabei verstehen wir unter einem Ordnungstyp immer einen Typ einer linear geordneten Menge. card G bedeutet die Mächtigkeit der Menge G; ähnlich bezeichnen wir als card α die Mächtigkeit des Ordnungstyps α. Ist α eine Ordnungszahl, dann bezeichnen wir als $cf\,\alpha$ die (einzige) reguläre Ordnungszahl, mit der α konfinal ist. Für eine Ordnungszahl α bezeichnen wir nach Hausdorff ([3]) als $W(\alpha)$ die Menge aller Ordnungszahlen $\xi < \alpha$, die nach der Größe geordnet ist.

Sei G eine geordnete Menge, L eine linear geordnete Menge, die den Ordnungstyp α hat. Eine eineindeutige isotone Abbildung der Menge G in L nennen wir eine α-Erweiterung der Menge G. Ein System $\{f_\varkappa \mid \varkappa \in K\}$ von α-Erweiterungen der Menge G nennen wir eine α-Realisierungsmenge der Menge G, wenn folgendes gilt: $x \leqq y (x, y \in G) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f_\varkappa(x) \leqq f_\varkappa(y)$ für alle $\varkappa \in K$.

Wenn eine α-Realisierungsmenge der geordneten Menge G existiert, dann definieren wir die α-Dimension der Menge G folgenderweise: $\alpha\text{-dim } G = \min (\text{card } K \mid \{f_\varkappa \mid \varkappa \in K\}$ ist eine α-Realisierungsmenge von $G)$ (H. Komm, [4]).

Es ist ganz klar, daß, wenn α ein Ordnungstyp ist, nicht jede geordnete Menge die α-Dimension hat. Eine evidente notwendige Bedingung für die Existenz von α-dim G ist card $G \leqq$ card α. Diese Bedingung ist aber nicht hinreichend: ist $G = W(\omega_1)$ und $\alpha = \lambda$, wo λ der Ordnungstyp der Menge aller reellen Zahlen mit der natürlichen Ordnung ist, dann card $G = \aleph_1 \leqq 2^{\aleph_0} =$ card λ, aber λ-dim G existiert nicht, denn es gibt keine λ-Erweiterung von G (in einer linear geordneten Menge vom Typ λ gibt es keine Kette vom Typ ω_1). Eine andere notwendige Bedingung für die Existenz von α-dim G ist also die Existenz einer α-Er-

*) Diese Arbeit entstand während des Stipendienaufenthaltes des Verfassers an dem Mathematischen Institut der Universität in Bonn, der von der Alexander von Humboldt-Stiftung gedeckt wurde.

weiterung der Menge G. Aber auch diese Bedingung ist nicht hinreichend, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel. *Sei $G = A + B$, wo A eine Kette vom Typ $\omega + 1$ und B eine einelementige Menge ist, und $\alpha = \omega + 1$. Dann existiert eine α-Erweiterung von G, aber α-*dim *G existiert nicht.*

Beweis. Sei $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_\omega \mid a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_\omega\}$, $B = \{b_0\}$. Es ist $b_0 \parallel a_\lambda$ für jedes $\lambda \leqq \omega$. Wir setzen $f(b_0) = 0$, $f(a_n) = n + 1$ für $n < \omega$, $f(a_\omega) = \omega$. Dann ist f eine eineindeutige isotone Abbildung von G in $W(\omega + 1)$, also eine $(\omega + 1)$-Erweiterung von G. Setzen wir voraus, daß $(\omega + 1)$ — dim G existiert, so gibt es eine $(\omega + 1)$ - Erweiterung g von G so, daß $g(b_0) > g(a_\omega)$ gilt. Da $i < j$ $(i, j \leqq \omega) \Rightarrow g(a_i) < g(a_j)$, hat $g(G)$ den Typ $\omega + 2$, was ein Widerspruch ist.

H. Komm ([4]) hat gezeigt, daß die Existenz einer λ-Erweiterung einer geordneten Menge G eine hinreichende Bedingung für die Existenz von λ-dim G ist. Im Zusammenhang damit entsteht folgendes Problem: die Ordnungstypen α zu charakterisieren, die folgende Eigenschaft haben: die Existenz einer α-Erweiterung einer beliebigen geordneten Menge G ist eine hinreichende Bedingung für die Existenz von α-dim G. Das Ziel dieser Arbeit ist, dieses Problem in dem Fall zu lösen, daß α eine Ordnungszahl ist. Die Lösung wird in folgendem Satz gegeben.

Satz 1. *Sei α eine Ordnungszahl. Die Existenz einer α-Erweiterung ist eine hinreichende Bedingung für die Existenz der α-Dimension jeder geordneten Menge G dann und nur dann, wenn $\alpha < \omega$ oder $\alpha = \omega^\xi$ für $\xi > 0$ ist.*

Beweis. 1. Für $\alpha < \omega$ ist die Behauptung klar, denn in diesem Fall existiert α-dim G dann und nur dann, wenn card $G \leqq$ card α, was eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer α-Erweiterung von G ist. Sei also $\alpha = \omega^\xi$, wo $\xi > 0$. Dann ist α eine primitive Komponente ([5], S. 279 und 320), d. h. ist $\beta < \alpha$, $\gamma < \alpha$, dann $\beta + \gamma < \alpha$. Sei nun G eine beliebige geordnete Menge, die eine α-Erweiterung hat, d. h. für die eine eineindeutige isotone Abbildung f von G in $W(\alpha)$ existiert. Ist G linear geordnet, dann ist $\{f\}$ eine α-Realisierungsmenge von G, sodaß α-dim G existiert und α-dim $G = 1$. Also nehmen wir an, daß G nicht linear geordnet ist. Seien $u, v \in G$, $u \parallel v$; wir setzen voraus, daß $f(u) < f(v)$. Es genügt, eine andere α-Erweiterung g von G so zu konstruieren, daß $g(v) < g(u)$ gilt. Wir bezeichnen $f(u) = \beta$, $f(v) = \gamma$ und setzen: $A = \{x \mid x \in G,\ \beta < f(x) < \gamma,\ x > u\}$, $B = \{x \mid x \in G,\ \beta < f(x) < \gamma,\ x < v\}$, $C = \{x \mid x \in G,\ \beta < f(x) < \gamma,\ u \parallel x \parallel v\}$, $D = \{x \mid x \in G,\ f(x) < \beta\}$, $E = \{x \mid x \in G,\ f(x) > \gamma\}$. Wir definieren jetzt die Abbildung g von G in $W(\alpha)$ folgenderweise: $g(u) = \gamma . 2$, $g(v) = \gamma$, $x \in A \Rightarrow g(x) = \gamma . 2 + f(x)$, $x \in B \Rightarrow g(x) = f(x)$, $x \in C \Rightarrow g(x) = \gamma + f(x)$, $x \in D \Rightarrow g(x) = f(x)$, $x \in E \Rightarrow g(x) = \gamma . 2 + f(x)$. g ist wirklich eine Abbildung von G in $W(\alpha)$, denn $\gamma < \alpha, f(x) < \alpha (x \in G) \Rightarrow \Rightarrow \gamma . 2 = \gamma + \gamma < \alpha$ und $\gamma . 2 + f(x) < \alpha$. Es ist leicht zu sehen, daß g eine eineindeutige Abbildung ist; das folgt daraus, daß f eine solche Abbildung ist und daß die Mengen $g(A)$, $g(B)$, $g(C)$, $g(D)$, $g(E)$ paarweise disjunkt sind. Wir beweisen, daß g isoton ist. Seien x, y vergleichbare verschiedene Elemente in G. Liegen x, y in derselben von Mengen A, B, C, D, E, ist die Behauptung trivial, denn f ist isoton. Sei also $x \in A$, $y \in B$. Dann $x > y$, denn wäre $x < y$, dann $u < x < y < v$, was ein Widerspruch ist. Zugleich ist $g(x) = \gamma . 2 + f(x) > f(y) = g(y)$. Ist $x \in A$, $y \in C$, dann $x > y$, denn in anderem Fall $y > x > u$, und zugleich $g(x) = \gamma . 2 + f(x) > \gamma + f(y) = g(y)$. Ist $x \in B$, $y \in C$, dann $y > x$ (in anderem Fall $y < x < v$) und $g(y) = \gamma + f(y) > f(x) = g(x)$. Ähnlich können wir in allen anderen Fällen zeigen, daß stets $x < y \Rightarrow \Rightarrow g(x) < g(y)$ gilt. g ist also eine α-Erweiterung von G, für die $g(v) < g(u)$ gilt und G hat die α-Dimension.[1])

2. Sei jetzt $\alpha \geqq \omega$, $\alpha \neq \omega^\xi$. Es existiert eine Ordnungzahl η so, daß $\omega^\eta < \alpha < \omega^{\eta+1}$. Dann $\alpha = \omega^\eta . r + s$, wo $0 < r < \omega$, $s < \omega^\eta$. Ist $s > 0$, s eine isolierte Ordnungszahl, setzen wir $G = A + B$, wo A eine Kette vom Typ α und B eine einelementige Menge ist. Ähnlich wie im vorangehenden Beispiel können wir dann zeigen, daß G zwar eine α-Erweiterung hat, aber α-dim G nicht existiert. Ist $s > 0$, s eine Limeszahl, setzen wir $G = A + B$, wo A eine Kette vom Typ α, B eine Kette vom Typ $\omega^\eta . r + 1$ ist. Wir zeigen, daß G eine α-Erweiterung hat. Sei $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_\lambda, \ldots \mid a_0 < a_1 < \ldots < a_\lambda < \ldots (\lambda < \alpha)\}$, $B = \{b_0, b_1, \ldots, b_\lambda, \ldots \mid b_0 < b_1 < \ldots < b_\lambda < \ldots (\lambda < \omega^\eta . r + 1)\}$; wir setzen $f(a_\lambda) = 2\lambda$, $f(b_\lambda) = 2\lambda + 1$ für $\lambda < \omega^\eta . r$, $f(b_{\omega^\eta . r}) = \omega^\eta . r$, $f(a_\lambda) = \lambda + 1$ für $\lambda \geqq \omega^\eta . r$. Dann ist f eine eineindeutige isotone Abbildung von G in $W(\alpha)$, also eine α-Erweiterung von G. Wir setzen voraus, daß α-dim G existiert. Dann muß eine α-Erweiterung g von G so existieren, daß $g(b_{\omega^\eta . r}) < g(a_0)$. Die Menge $g(G)$ hat dann den Typ $\omega^\eta . r + + 1 + \omega^\eta . r + s = \omega^\eta . r + \omega^\eta . r + s = \omega^\eta . 2r + s > \omega^\eta . r + s = = \alpha$, was ein Widerspruch ist.

Ist $s = 0$, dann notwendig $r > 1$. Wir setzen $G = A + B$, wo A eine Kette vom Typ α, B eine Kette vom Typ $\omega^\eta . (r - 1) + 1$ ist, d. h. $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_\lambda, \ldots \mid a_0 < a_1 < \ldots < a_\lambda < \ldots (\lambda < \alpha)\}$, $B = = \{b_0, b_1, \ldots, b_\lambda, \ldots \mid b_0 < b_1 < \ldots < b_\lambda \ldots (\lambda < \omega^\eta . (r - 1) + 1)\}$. Ähnlich wie im vorigen Fall können wir dann eine α-Erweiterung von G konstruieren. Wir nehmen an, daß α-dim G existiert, also gibt es eine α-Erweiterung g von G, für die $g(b_{\omega^\eta . (r-1)}) < g(a_0)$ gilt. Dann hat die Menge $g(G)$ den Typ $\omega^\eta . (r - 1) + 1 + \omega^\eta . r = \omega^\eta . (2r - 1) >$

[1]) Dieser Teil des Beweises wird ähnlich wie der Beweis des Satzes 4.2. in [4] durchgeführt.

$> \omega^{\eta} . r = \alpha$, was ein Widerspruch ist. Also gibt es in jedem Fall eine geordnete Menge G so, daß G eine α-Erweiterung hat, aber α-dim G nicht existiert.

Im Falle, daß s eine Limeszahl oder $s = 0$ ist, konnten wir nicht $G = A + B$ setzen, wo A eine Kette vom Typ α und B eine einelementige Menge ist. Es gilt nämlich folgender Satz.

Satz 2. *Sei α eine Limeszahl und $G = A + B$, wo A eine Kette vom Typ α und B eine einelementige Menge ist. Dann hat G die α-Dimension und es gilt α-dim G =* card $cf\alpha$.

Beweis. Sei $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_\lambda, \ldots \mid a_0 < a_1 < \ldots < a_\lambda < \ldots (\lambda < \alpha)\}$, $B = \{b_0\}$. Sei $cf\alpha = \beta$ und $\{\alpha_\mu \mid \mu < \beta\}$ eine solche wachsende Folge von Ordnungszahlen, daß $\alpha_0 = 0$ und $\lim\limits_{\mu<\beta} \alpha_\mu = \alpha$. Für jedes $\mu < \beta$ definieren wir eine Abbildung f_μ von G in $W(\alpha)$ folgenderweise: $f_\mu(a_\lambda) = \lambda$ für $\lambda < \alpha_\mu$, $f_\mu(b_0) = \alpha_\mu$, $f_\mu(a_\lambda) = \lambda + 1$ für $\lambda \geqq \alpha_\mu$. Dann ist $\{f_\mu \mid \mu < \beta\}$ eine α-Realisierungsmenge von G, denn für $\lambda_1 < \lambda_2$ gilt $f_\mu(a_{\lambda_1}) < f_\mu(a_{\lambda_2})$ für jedes μ und für jedes $\lambda < \alpha$ gibt es ein $\mu < \beta$ so, daß $\alpha_\mu > \lambda$, sodaß $f_0(b_0) < f_0(a_\lambda)$ und $f_\mu(b_0) > f_\mu(a_\lambda)$. Es gilt also α-dim $G \leqq$ card $cf\alpha$. Setzen wir voraus, daß α-dim $G = m <$ card $cf\alpha$, so gibt es eine α-Realisierungsmenge $\{g_\varkappa \mid \varkappa \in K\}$ von G mit card $K = m$. Für kein $\varkappa \in K$ gilt $g_\varkappa(b_0) > g_\varkappa(a_\lambda)$ für jedes $\lambda < \alpha$, denn dann hätte die Menge $g_\varkappa(G)$ den Typ $\alpha + 1$. Also gibt es für jedes $\varkappa \in K$ ein $\lambda_\varkappa < \alpha$ so, daß $g_\varkappa(b_0) < g_\varkappa(a_{\lambda\varkappa})$. Da card $\{\lambda_\varkappa \mid \varkappa \in K\} \leqq$ card $K = m <$ card $cf\alpha$, gibt es ein $\lambda < \alpha$ so, daß $\lambda > \lambda_\varkappa$ für jedes $\varkappa \in K$. Also ist $g_\varkappa(b_0) < g_\varkappa(a_\lambda)$ für jedes $\varkappa \in K$, woraus $b_0 < a_\lambda$ folgt und das ist ein Widerspruch, denn es gilt $a_\lambda \parallel b_0$.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] G. Birkhoff, *Lattice Theory*. Rev. ed. New York, 1948.
[2] G. Birkhoff, *Generalized Arithmetic*. Duke Math. Journ. 9 (1942), 283—302.
[3] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig, 1914.
[4] H. Komm, *On the Dimension of Partially Ordered Sets*. Am. Journ. Math. 70 (1948), 507—520.
[5] W. Sierpiński, *Cardinal and Ordinal Numbers*. Warszawa, 1958.

Mathematisches Institut
Universität J. E. Purkyně
Brno, ČSSR