Adolf Haimovici

Sur un système d'équations aux dérivées partielles à une fonction d'ensemble comme inconnue

Archivum Mathematicum, Vol. 5 (1969), No. 4, 167--172

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104696`

SUR UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES À UNE FONCTION D'ENSEMBLE COMME INCONNUE

ADOLF HAIMOVICI

Hommage à M. O. Borůvka, à l'occasion de son soixante-dixième anniversaire

1. INTRODUCTION

L'étude des équations différentielles ayant des fonctions additives d'ensemble comme inconnues que nous avons commencée il y a quelqnes années (voir [1—2]) peut être étendue à certains types d'équations analogues aux équations aux dérivées partielles. A ce but nous avons défini une dérivée partielle d'une fonction d'ensemble [3], de la manière suivante:

Soient

a) $$R^p = R^{m_1} \times R^{m_2} \qquad (p = m_1 + m_2)$$

un espace euclidien à p dimensions, produit cartésien de deux espaces à m_1 et respectivement m_2 dimensions,

b) $$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$$

un domaine de R^p, (Ω_i des domaines de R^{m_i});

c) μ_i la mesure de Lebesque de R^{m_i} et désignons par $P_i \in R^{m_i}$ les projections d'un point $P \in R^p$, sur R^{m_i}.

d) A une σ-algèbre de parties de Ω, choisies de manière que si E est une telle partie, elle soit le produit cartésien $E_1 \times E_2$ de deux parties de Ω_1 et Ω_2 respectivement appartenant à deux σ-algèbres A_1 et A_2 de parties de Ω_1 et Ω_2.

Considérons maintenant une fonction additive d'ensemble φ, définie sur A.

Soit E un élément de A, tel que la composante E_1 contienne un point $P_1 \in \Omega_1$, et désignons par $\varrho(E_1)$ le diamètre de la composante sur R^{m_1} de E. Supposons que la limite

$$\lim_{\varrho(E_1)\to 0} \frac{\varphi(E_1 \times E_2)}{\mu_1(E_1)}$$

existe. Nous appelons cette limite la dérivée partielle de φ par rapport à μ_1, et nous la notons par

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu_1}(P_1 \times E_2).$$

D'une manière analogue on définit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu_2}(E_1 \times P_2).$$

On remarque que $\partial\varphi/\partial\mu_1(P_1 \times E_2)$ est additive par rapport à E_2 et que $\partial\varphi/\partial\mu_2(E_1 \times P_2)$ est additive par rapport à E_1. On pourra alors définir

$$\lim_{\substack{\varrho(E_2)\to 0\\ P_2\in E_2}} \left\{ \frac{1}{\mu_2(E_2)} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu_1}(P_1 \times E_2) \right\} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu_2 \partial \mu_1}(P_1 \times P_2),$$

$$\lim_{\substack{\varrho(E_1)\to 0\\ P_1\in E_1}} \left\{ \frac{1}{\mu_1(E_1)} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu_2}(E_1 \times P_2) \right\} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu_1 \partial \mu_2}(P_1 \times P_2)$$

si ces limites existent. Nous allons supposer dans tout ce qui suit que toutes ces limites existent et que, de plus:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu_1 \partial \mu_2}(P_1 \times P_2) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu_2 \partial \mu_1}(P_1 \times P_2).$$

Soit enfin $E_P : P \to E_P$ une application de Ω dans A, E_P étant choisie de manière qu'on ait

$$E_P = E_{P_1} \times E_{P_2}.$$

Supposons que cette application satisfait aux conditions suivantes: *Si $\varepsilon > 0$ est une constante arbitraire, il existe une constante $\delta(\varepsilon)$ telle que*

$$\mu(E_P \triangle E_Q) < \varepsilon$$

si $\overline{PQ} < \delta(\varepsilon)$.

2. POSITION DU PROBLÈME

Considérons maintenant le système

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu_1}(P_1 \times E_2) &= f_1[P_1 \times E_2, \varphi(E_{P_1} \times E_2)], \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \mu_2}(E_1 \times P_2) &= f_2[E_1 \times P_2, \varphi(E_1 \times E_{P_2})], \end{aligned}$$

où f_1 et f_2 sont deux fonctions qui satisfont aux conditions suivantes:

a) les fonctions $f_1(P_1 \times E_{P_2}, \varphi)$, $f_2(E_{P_1} \times P_2, \varphi)$ sont continues par arpport à P_1, P_2 et φ, et dérivables par rapport à φ,

b) les limites

$$\lim_{\substack{\varrho(E_2)\to 0\\ P_2\in E_2}} \frac{f_1[P_1 \times E_2, \varphi(E_{P_1} \times E_{P_2})]}{\mu_2(E_2)}, \quad \lim_{\substack{\varrho(E_1)\to 0\\ P_1\in E_1}} \frac{f_2[E_1 \times P_2, \varphi(E_{P_1} \times E_{P_2})]}{\mu_1(E_1)}$$

existent; nous allons les désigner respectivement par

$$\frac{\partial f_1}{\partial \mu_2}[P_1 \times P_2, \varphi(E_{P_1} \times E_{P_2})], \ \frac{\partial f_2}{\partial \mu_1}[P_1 \times P_2, \varphi(E_{P_1} \times E_{P_2})].$$

c) Les fonctions

$$f_1[P_1 \times E_2, \varphi(E_{P_1} \times E_2)] \qquad \text{et} \qquad f_2[E_1 \times P_2, \varphi(E_1 \times E_{P_2})]$$

sont additives par rapport à E_2 et E_1 respectivement.

d) On a

$$\frac{\partial f_1}{\partial \mu_2}[P_1 \times P_2, \varphi(E_{P_1} \times P_2)] + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi}[P_1 \times P_2, \varphi(E_{P_1} \times P_2)] f_2 [E_{P_1} \times P_2,$$

$$\varphi(E_{P_1} \times P_2)] = \frac{\partial f_2}{\partial \mu_1}[P_1 \times P_2, \varphi(P_1 \times E_{P_2})] + \tag{2}$$

$$+ \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}[P_1 \times P_2, \varphi(P_1 \times E_{P_2})] f_1 [P_1 \times E_{P_2}, \varphi(P_1 \times E_{P_2})].$$

Remarque. Pour ce qui suit nous aurons besoin de la remarque suivante: Soit λ une fonction additive d'ensemble et ν sa partie singulière. On aura alors:

$$\lambda(E) \doteq \nu(E \cap H) + \int_E \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(Q)\, \mathrm{d}\mu. \tag{3}$$

Pour chaque ensemble E, il y a un ensemble E' de mesure nulle, tel que

$$E' \cap H = E \cap H.$$

Alors de (3) on déduit:

$$\lambda(E') = \nu(E' \cap H)$$

et (3) devient:

$$\lambda(E) = \lambda(E') + \int_E \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(Q)\, \mathrm{d}\mu. \tag{4}$$

3. RÉSOLUTION DU SYSTÈME (2)

En utilisant le théorème de décomposition de Lebesgue, de la première équation (1) on déduit:

$$\varphi(E_1 \times E_2) = \alpha[(E_1 \cap H_1) \times E_2] + \int_{E_1} f_1[Q_1 \times E_2, \varphi(E_{Q_1} \times E_2)]\, \mathrm{d}\mu_1,$$

où H_1 est un ensemble de μ_1-mesure nulle et α est une fonction additive de E_1.

Comme φ doit encore satisfaire à la deuxième équation (1) il résulte que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu_2}(E_1 \times P_2) = \frac{\partial \alpha}{\partial \mu_2}[(E_1 \cap H_1) \times P_2] +$$

$$+ \int_{E_1} \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial \mu_2}[Q_1 \times P_2, \varphi(E_{Q_1} \times P_2)] + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi}[Q_1 \times P_2, \varphi(E_{Q_1} \times P_2)] \times \right.$$

$$\left. \times f_2[E_{Q_1} \times P_2, \varphi(E_{Q_1} \times P_2)] \right\} \mathrm{d}\mu_1 = f_2[E_1 \times P_2, \varphi(E_1 \times E_{P_2})].$$

En utilisant (2) on obtient:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mu_2}[(E_1 \cap H_1) \times P_2] + \int_{E_1} \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial \mu_1}[Q_1 \times P_2, \varphi(Q_1 \times E_{P_2})] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}[Q_1 \times P_2, \varphi(Q_1 \times E_{P_2})]\, f_1[Q_1 \times E_{P_2}, \varphi(Q_1 \times E_{P_2})] \right\} \mathrm{d}\mu_1 =$$

$$= f_2[E_1 \times P_2, \varphi(E_1 \times E_{P_2})],$$

c'est-à-dire, en notant par $\mathrm{d}f_2/\mathrm{d}\mu_1$ la dérivée totale de f_2 par rapport à μ_1:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mu_2}[(E_1 \cap H_1) \times P_2] + \int_{E_1} \frac{\partial f_2}{\mathrm{d}\mu_1}[Q_1 \times P_2, \varphi(Q_1 \times E_{P_2})]\, \mathrm{d}\mu_1 = \tag{5}$$

$$= f_2[E_1 \times P_2, \varphi(E_1 \times E_{P_2})].$$

Faisons maintenant la remarque suivante:

Pour chaque ensemble E_1, *il y a un ensemble* de mesure nulle E_1', *tel que* $E_1 \cap H_1 = E_1' \cap H_1$.

On peut alors appliquer la remarque de la fin du § 2; on obtient

$$\int_{E_1} \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}\mu_1} [Q_1 \times P_2, \varphi(Q_1 \times E_{P_2})] \,\mathrm{d}\mu_1 = f_2[E_1 \times P_2, \varphi(E_1 \times E_{P_2})] -$$

$$- f_2[E_1' \times P_2, \varphi(E_1' \times E_{P_2})].$$

Il résulte alors de (5):

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mu_2} [(E_1' \cap H_1) \times P_2] = f_2[E_1' \times P_2, \varphi(E_1' \times E_{P_2})].$$

En utilisant maintenant le même théorème de décomposition de Lebesgue, on obtient:

$$\alpha[(E_1' \cap H_1) \times E_2] = \alpha[(E_1 \cap H_1) \times E_2] =$$

$$= \nu(E \cap H) + \int_{E_2} f_2[E_1' \times Q_2, \varphi(E_1' \times E_{Q_2})] \,\mathrm{d}\mu_2,$$

H étant un ensemble de μ-mesure nulle.

On conclut enfin que le système (2) conduit à l'équation intégrale

$$\varphi(E) = \nu(E \cap H) + \int_{E_1} f_1[Q_1 \times E_2, \varphi(E_{Q_1} \times E_2)] \,\mathrm{d}\mu_1 + \tag{6}$$

$$+ \int_{E_2} f_2[E_1' \times Q_2, \varphi(E_1' \times E_{Q_2})] \,\mathrm{d}\mu_2;$$

on vérifie sans peine que réciproquement, de (6) on déduit (2); le système (2) est donc équivalent à l'équation intégrale (6), si la partie singulière de φ est ν.

En ce qui concerne (6), on démontre l'existence de la solution d'une manière habituelle. On écrit (6) pour $E = E_P$ et on désigne $\varphi(E_P)$ par $u(P_1, P_2)$, et $\nu(E \cap H)$ par $u_0(P_1, P_2)$. L'équation (6) devient alors

$$u(P_1, P_2) = u_0(P_1, P_2) + \int_{E_{P_1}} f_1[Q_1 \times P_2, u(Q_1, P_2)] \,\mathrm{d}\mu_1 +$$

$$+ \int_{E_{P_2}} f_2[P_1', Q_2, u(P_1', Q_2)] \,\mathrm{d}\mu_2.$$

En supposant maintenant les dérivées partielles de f_i, par rapport à φ bornées, et en utilisant le théorème de point fixe de Banach, on démontre l'existence de $u(P_1, P_2)$, c'est-à-dire de φ (E_P) (voir p. ex [4]). Ensuite par l'intermédiaire de (6) on démontre l'existence de $\varphi(E)$ dans une sous-algèbre de A.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Haimovici, *Sur une équation différentielle pour une fonction d'ensemble.* Revue Roumaine de Math. pures et appliquées, T. IX (1964), p. 207.
[2] A. Haimovici, *Sur un système d'équations différentielles linéaires pour des fonctions d'ensemble.* Ann. di Mat. pura ed applicata. Serie IV, t. 73 (1965), p. 1.
[3] A. Haimovici, *Sur un système d'équations aux dérivées partielles d'une fonction d'ensemble.* Mathematica, Cluj, T. 8 (31), (1966), p. 261.
[4] A. Haimovici, *Une étude globale de certains systèmes d'équations différentielles qui généralisent un système de Pfaff.* Ann. st. ale Univ. ,,Al. I. Cuza" (serie noua), Matematica, T. X (1964), p. 43.

Seminarul Matematic ,,A. Myller"
Universitatea Iasi, Roumanie