Manfred Schneider

Das Einschliessen der Lösungen von Gleichungen im Banachraum

Archivum Mathematicum, Vol. 3 (1967), No. 2, 45--54

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104629`

DAS EINSCHLIESSEN DER LÖSUNGEN VON GLEICHUNGEN IM BANACHRAUM

Von Manfred Schneider (Karl-Marx-Stadt)

Eingegangen am 30. Juni 1966

1. Vorbemerkungen

In einem halbgeordneten Banachraum sei eine Gleichung $u = Tu$ vorgelegt. Verwendet man zu ihrer näherungsweisen Lösung ein Iterationsverfahren $u_{n+1} = Tu_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, so kann man, falls T ein monoton nichtfallender oder monoton nichtwachsender Operator ist, durch geeignete Wahl der Ausgangsnäherungen erreichen, daß die Näherungslösugen die Lösung der vorgelegten Gleichung einschließen. Damit hat man die Möglichkeit, den bei jedem Iterationsschritt maximal noch vorhandenen Fehler sofort abzulesen. Dies wurde von L. Collatz und J. Schröder [2] unter Anwendung von Fixpunktsätzen gezeigt und auf verschiedene Arten von Gleichungen angewendet.

Hier soll gezeigt werden, daß sich derartige Einschließungsaussagen unter gewissen Bedingungen erzwingen lassen, auch wenn T nicht von vornherein monoton ist. Zum Beweis werden dabei keine Fixpunktsätze herangezogen, sondern eine Methode verallgemeinert, die erstmals von H. Jäckel [3] bei der Lösung der nichtlinearen Anfangs-Randwertaufgabe der Wärmeleitung in festen Körpern verwendet wurde.

Über die Anwendung dieser allgemeinen Einschließungssätze auf die näherungsweise Lösung von Anfangs- und Randwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen wurde bereits in [4] ausführlich berichtet. Dort sind auch eine Reihe numerischer Beispiele angeben. Hier soll die Brauchbarkeit dieser Methode bei Integralgleichungen und bei Gleichungen mit einer Unbekannten gezeigt werden.

2. Die Einschließungssätze

Vorgelegt sei ein Banachraum $\mathfrak{B}$ mit den Elementen $u, v, \ldots$. In $\mathfrak{B}$ ist also eine Addition $u + v$ und eine Multiplikation mit Zahlen αu, wofür die üblichen Regeln der Vektoralgebra gelten, erklärt. Ferner ist in $\mathfrak{B}$ eine Norm $\| u \|$ definiert, bezüglich der $\mathfrak{B}$ vollständig ist. Der Raum $\mathfrak{B}$ sei weiterhin halbgeordnet, wobei die üblichen Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen gelten mögen. Dabei sei $\| u \| \geqq \| v \|$ für $u \geqq v \geqq 0$ und umgekehrt. T sei ein stetiger Operator, der eine Teilmenge $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}$ abbildet. Mit $<v, w>$ werde die Menge aller

$u \in \mathfrak{B}$ bezeichnet, für die $v \leqq u \leqq w$ gilt. Für $v \in \mathfrak{d}$, $w \in \mathfrak{d}$ sei jede solche Menge ganz in $\mathfrak{d}$ enthalten und $T < v, w>$ sei kompakt, wobei eine Menge $\mathfrak{M}$ kompakt genannt wird, wenn jede unendliche Teilmenge von $\mathfrak{M}$ ein Häufungselement $u \in \mathfrak{B}$ besitzt.

Gesucht sei eine Lösung u^* der Gleichung

$$u = Tu. \tag{1}$$

Diese vorgelegte Gleichung (1) lasse sich auf die Form

$$Lu = Du \tag{2}$$

bringen, in der L ein linearer stetiger Operator sei. Zur näherungsweisen Lösung der Gleichung (2) werde ein Iterationsverfahren

$$Lu_{n+1} = Du_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

verwendet.

Es seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

1. Wir betrachten eine Teilmenge $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{d} = <u_0, u_1>$ bzw. $\mathfrak{d} = <u_1, u_0>$ und $u_0 \geqq 0$, $u_1 \geqq 0$. Der Operator T sei auf $\mathfrak{d}$ definiert und bilde T in sich ab. Die Untersuchungen sollen also nur mit positiven Elementen durchgeführt werden. In den Anwendungen wird sich diese Forderung meist durch geeignete Wahl des Koordinatensystems realisieren lassen.

2. Der Operator L sei linear und stetig und die Gleichung $Lu = r$ sei für beliebiges $r \in \mathfrak{d}$ lösbar. Die Lösung sei darstellbar als $u = Gr$. Es existiere also der zu L inverse Operator G. Er ist ebenfalls linear und er sei auch stetig. Ein linearer stetiger Operator ist beschränkt. Es existiert also für alle u_1, $u_2 \in \mathfrak{d}$ eine positive Zahl α, so daß

$$\| Gu_1 - Gu_2 \| \leqq \alpha \| u_1 - u_2 \| \tag{4}$$

gilt. Die kleinste Zahl α, für die die Ungleichung (4) noch erfüllt ist, heißt Norm oder Lipschitzkonstante von G. Im folgenden soll unter α immer die Lipschitzkonstante des Operators G verstanden werden.

3. Der Operator D sei beschränkt mit der Lipschitzkonstanten β, d. h. es soll für alle u_1, $u_2 \in \vartheta$

$$\| Du_1 - Du_2 \| \leqq \beta \| u_1 - u_2 \| \tag{5}$$

gelten.

Da die Gleichungen (1) und (2) einander äquivalent sein sollten und da nach Voraussetzung 2 der zu L inverse Operator G existiert, läßt sich T als Produkt $T = GD$ schreiben und es ist

$$\| G(Du_1) - G(Du_2) \| \leqq \alpha \|Du_1 - Du_2 \| \leqq \alpha\beta \| u_1 - u_2 \|.$$

Der Produktoperator ist also auch beschränkt und zwar mit der Lipschitzkonstanten $\alpha\beta = \gamma$. Für alle u_1, $u_2 \in \mathfrak{d}$ sei $\gamma < 1$.

4. Der Operator L sei von monoton nichtfallender bzw. monoton nichtwachsender Art, d. h. aus $Lu_1 \leqq Lu_2$ folge $u_1 \leqq u_2$ bzw. $u_1 \geqq u_2$. Anstelle dieser Voraussetzung kann auch gefordert werden, daß der zu L inverse Operator G isoton bzw. antiton ist. Dabei heißt ein Operator isoton, wenn aus $u_1 \leqq u_2$ folgt $Gu_1 \leqq Gu_2$ und antiton, wenn aus $u_1 \leqq u_2$ folgt $Gu_1 \geqq Gu_2$.

5. Für den Operator D existiere eine Zahl $\varkappa > 0$, so daß $D + \varkappa E$ isoton bzw. $D - \varkappa E$ antiton wird. E bedeute den Einheitsoperator. Unter den Voraussetzungen 1 bis 5 gelten für die durch das Iterationsverfahren (3) definierte Näherungsfolge die folgenden beiden Sätze.

Satz 1. *Ist der Operator G isoton und benutzt man eine Ausgangsnäherung u_0 mit $u_0 \leqq u_1$, $u_0 \leqq u_2$, so ist*

$$(6) \qquad u_0 \leqq u_2 \leqq \ldots \leqq u_{2n} \leqq \ldots \leqq u^* \leqq \ldots \leqq u_{2n-1} \leqq \ldots \leqq u_3 \leqq u_1$$

und benutzt man $u_0 \geqq u_1$, $u_0 \geqq u_2$, so gilt

$$(7) \qquad u_1 \leqq u_3 \leqq \ldots \leqq u_{2n-1} \leqq \ldots \leqq u^* \leqq \ldots \leqq u_{2n} \leqq \ldots \leqq u_2 \leqq u_0.$$

In beiden Fällen konvergiert die Folge u_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ gegen die einzige Lösung u^* der vorgelegten Gleichung (1) im Intervall $\mathfrak{d}$.

Satz 2. *Ist der Operator G antiton, so gilt für die Näherungsfolge u_n des Iterationsverfahrens* (3) *die Aussage* (6) *oder* (7), *je nachden ob von u_0 mit $u_0 \leqq u_1$, $u_0 \leqq u_2$ oder von u_0 mit $u_0 \geqq u_1$, $u_0 \geqq u_2$ ausgegangen wird. Auch in diesem Fall konvergiert die Folge u_n gegen die einzige Lösung u^* der vorgelegten Gleichung* (1) *im Intervall $\mathfrak{d}$.*

Zusatz. *Verwendet man als Ausgangsnäherung u_0 die Lösung der Gleichung $Lu_0 = D\Theta$, so gelten die Beziehungen $u_0 \geqq u_1$ und $u_0 \geqq u_2$. Für die Näherungsfolge hat man also immer die Aussage* (7), *wenn G isoton oder antiton ist.*

Beweis des Satzes 1. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, daß der Operator D antiton ist. Ist diese Bedingung nicht von vornherein erfüllt, so formen wir die Ausgangsgleichung (2) um in

$$(8) \qquad Lu - \varkappa u = Du - \varkappa u$$

und erreichen auf Grund der Voraussetzung 5 durch geeignete Wahl von $\varkappa$, daß der Operator $\overline{D} = D - \varkappa E$ antiton wird. Als Iterationsverfahren zur näherungsweisen Lösung der Gleichung (8) benutzen wir

$$(9) \qquad Lu_{n+1} - \varkappa u_{n+1} = Du_n - \varkappa u_n, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Alle anfangs über L und D getroffenen Voraussetzungen sind jetzt auf $\overline{L} = L - \varkappa E$ und $\overline{D} = D - \varkappa E$ zu beziehen.

Durch vollständige Induktion folgen jetzt sofort die Aussagen $u_{2\nu} \leqq u_{2\nu+2} \leqq u_{2\nu+3} \leqq u_{2\nu+1}$ oder $u_{2\nu+1} \leqq u_{2\nu+3} \leqq u_{2\nu} \leqq {}_{+2}u_{2\nu}$ für alle $\nu = 0, 1, 2, \ldots$.

Es ist weiter zu zeigen, daß die Näherungsfolge gegen die einzige Lösung der vorgelegten Gleichung konvergiert. Dazu beschränken wir uns auf den Fall, der zur Aussage (6) führt, da der andere Fall völlig analog bewiesen werden kann.

Wir zerlegen die Näherungsfolge u_n in eine monoton nichtwachsende Teilfolge u_{2n+1} und eine monoton nichtfallende Teilfolge u_{2n}. Beide Teilfolgen liegen ganz in der Menge $< u_2, u_1 > = T < u_1, u_0 >$. Die Menge $T < u_1, u_0 >$ ist nach Voraussetzung kompakt. Bei Collatz und Schröder [2] wurde gezeigt, daß monoton nichtfallende bzw. monoton nichtwachsende Folgen, die ganz in einer kompakten Menge liegen, konvergieren. In unserem Falle konvergieren also beide Teilfolgen u_{2n+1} und u_{2n} je gegen ein Grenzelement η_1 und η_2. Es ist

$$\eta_1 = \lim_{n\to\infty} u_{2n} = \lim_{n\to\infty} GDu_{2n-1},$$

$$\eta_2 = \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} GDu_{2n}.$$

Weiter gilt

$$\| GDu_{2n} - GDu_{2n-1} \| = \| Tu_{2n} - Tu_{2n-1} \| \leqq \gamma \| u_{2n} - u_{2n-1} \|,$$

$$\| u_{2n} - u_{2n-1} \| = \| Tu_{2n-1} - Tu_{2n-2} \| \leqq \gamma \| u_{2n-1} - u_{2n-2} \|;$$

$$\vdots$$

$$\| u_2 - u_1 \| = \| Tu_1 - Tu_0 \| \leqq \gamma \| u_1 - u_0 \|$$

und damit

$$\| Tu_{2n} - Tu_{2n-1} \| \leqq \gamma^{2n} \| u_1 - u_0 \|.$$

Da wegen der Voraussetzung $\gamma < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \gamma^{2n} \|u_1 - u_0 \| = 0$$

gilt, folgt auch

$$\lim_{n\to\infty} \| Tu_{2n} - Tu_{2n-1} \| = 0$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} Tu_{2n} = \lim_{n\to\infty} Tu_{2n-1},$$

d. h. aber $\eta_1 = \eta_2 = \eta$.

Weiter ist wegen der Stetigkeit des Operators T

$$\eta = \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} T u_{2n} = T \lim_{n\to\infty} u_{2n} = T\eta,$$

d. h. η ist Lösung der vorgelegten Gleichung. Es ist auch die einzige Lösung, denn wäre $\bar{\eta}$ eine weitere von η verschiedene Lösung der vorgelegten Gleichung in ϑ, so müßte gelten

$$\| \eta - \bar{\eta} \| = \| T\eta - T\bar{\eta} \| \leqq \gamma \| \eta - \bar{\eta} \|$$

und das ist wegen $\gamma < 1$ ein Widerspruch. Es ist also $\eta = \bar{\eta}$.

Beweis des Satzes 2. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird hier angenommen, daß der Operator D isoton ist. Ist dies nicht von vornherein der Fall, so formen wir die Ausgangsgleichung (2) um in

$$Lu + \varkappa u = Du + \varkappa u \tag{10}$$

und erreichen auf Grund der Voraussetzung 5, daß der Operator $D + \varkappa E$ isoton wird. Die Gleichung (10) lösen wir dann näherungsweise durch das Iterationsverfahren

$$Lu_{n+1} + \varkappa u_{n+1} = Du_n + \varkappa u_n, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Alle anfangs für L und D gemachten Voraussetzungen sind jetzt für die überstrichenen Operatoren $\bar{L} = L + \varkappa E$ und $\bar{D} = D + \varkappa E$ festzulegen. Die weiteren Aussagen erhält man jetzt analog wie bei Satz 1.

3. Anwendung auf Integralgleichungen

Zunächst soll das dargelegte Iterationsverfahren auf lineare Integralgleichungen angewendet werden. Vorgelegt sei die Gleichung

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi. \tag{12}$$

Dabei sei $f(x)$ eine gegebene stetige Funktion von x, $K(x, \xi)$ sei ebenfalls stetig und in $[a, b]$ beschränkt, λ sei ein gegebener Parameter. Um die allgemeinen Sätze anwenden zu können, betrachten wir den Banachraum der in $[a, b]$ stetigen Funktionen u und erklären die Norm durch $\| u \| = \max_{a \leqq x \leqq b} | u(x) |$. Eine Halbordnung erhalten wir, indem wir $u \leqq v$ durch $u(x) \leqq v(x)$ für alle $x \in [a, b]$ erklären. Ebenso folgt dann aus $\| u \| \leqq \| v \|$ $u \leqq v$ für positive u und v, auf die wir uns durch geeignete Wahl des Koordinatensystems beschränken können. Einen Operator T definieren wir durch

$$(13) \qquad Tu \equiv f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi,$$

so daß die vorgelegte Gleichung (12) jetzt die Form

$$y = Ty$$

erhält. Wir lösen sie näherungsweise durch das Iterationsverfahren

$$(14) \qquad y_{n+1} = Ty_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

indem wir von einer geeigneten Ausgangsnäherung $y_0(x)$ ausgehen. Damit die allgemein aufgestellten Einschließungsaussagen auch für das jetzt betrachtete Verfahren (14) gelten, muß der durch die Beziehung (13) erklärte Operator antiton sein und beschränkt mit einer Lipschitzkostanten $\gamma < 1$. Der Operator T ist bei positivem λ sicher dann antiton, wenn in $[a, b]$ $K(x, \xi) \leqq 0$ ist, da dann

$$Tu - Tv = \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, [u(\xi) - v(\xi)]\, d\xi$$

gilt und daraus $Tu - Tv \leqq 0$ folgt, wenn $u \geqq v$ ist. Ist $K(x, \xi)$ in $[a, b]$ nicht von vornherein negativ, so wird die Ausgangsgleichung (12) umgeformt in

$$(15) \qquad y = \bar{T}y$$

mit

$$\bar{T}y \equiv \frac{1}{1-\varkappa} f(x) + \frac{1}{1-\varkappa} \left[\lambda \int_a^b K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi - \varkappa y(x)\right],$$

und darin läßt sich in vielen Fällen durch geeignete Wahl von $\varkappa$ erreichen, daß $\bar{T}$ antiton wird, wenn nur $K(x, \xi)$ beschränkt ist. Damit $\bar{T}$ antiton wird, muß $\varkappa$ so gewählt werden, daß

$$\frac{\lambda}{1-\varkappa} \int_a^b K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi - \frac{\varkappa\, y(x)}{1-\varkappa} \leqq 0$$

gilt. Im allgemeinen läßt sich keine Vorschrift angeben, wie $\varkappa$ im konkreten Fall zu wählen ist. Es hängt von der gesuchten Funktion $y(x)$ ab und läßt dem Bearbeiter noch gewisse Freiheiten.

Für die Konvergenz muß für die Lipschitzkonstante γ von T $\gamma < 1$ gelten. Es ist

$$\begin{aligned} \|Tu - Tv\| &= \max_{a \leq x \leq b} \left| \lambda \int_a^b K(x, \xi) [u(\xi) - v(\xi)] \, d\xi \right| \\ &\leq \max_{a \leq x \leq b} | u(x) - v(x) | \; | \lambda | \int_a^b | K(x, \xi) | \, d\xi \\ &\leq \| u - v \| \max_{a \leq x \leq b} |\lambda| \int_a^b | K(x, \xi) | \, d\xi. \end{aligned}$$

Es muß also

$$\max_{a \leq x \leq b} | \lambda | \int_a^b | K(x, \xi) | \, d\xi < 1 \tag{17}$$

gelten. Wird die Ausgangsgleichung umgeformt, so muß beachtet werden, daß die Konvergenzbedingung $\gamma < 1$ für T erhalten bleibt.

Die Erzwingung der Einschließungsaussagen soll an einem einfachen Beispiel erläutert werden. Vorgelegt sei die Gleichung

$$y = x^4 + \frac{1}{3} \int_0^1 x^4 \xi \, y(\xi) \, d\xi \tag{18}$$

mit der exakten Lösung

$$y = \frac{18}{17} x^4 = 1{,}058824 x^4.$$

Wir bestimmen Näherungslösungen mit dem Iterationsverfahren

$$y_{n+1} = x^4 + \frac{1}{3} \int_0^1 x^4 \xi y_n(\xi) \, d\xi, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

und erhalten

$$\begin{aligned} y_0 &= x^4 \\ y_1 &= 1{,}055556 x^4 \\ y_2 &= 1{,}058642 x^4 \\ y_3 &= 1{,}058814 x^4. \end{aligned}$$

Wie zu erwarten, schließen die Näherungslösungen die exakte Lösung nicht ein, da $K(x, \xi) = x^4 \xi \geqq 0$ ist für $0 < x, \xi < 1$. Um Einschließungsaussagen zu bekommen, müssen wir die vorgelegte Integralgleichung umformen. Wir schreiben sie in der Form

$$y = \frac{1}{1-\varkappa} x^4 + \left[\frac{1}{3} x^4 \int_0^1 \xi\, y(\xi)\, d\xi - \varkappa y(x)\right] \frac{1}{1-\varkappa}$$

und bestimmen $\varkappa$ so, daß die Einschließungsaussagen gelten. Wir wählen $\varkappa = \frac{1}{16}$, iterieren nach

$$y_{n+1} = \frac{16}{15} x^4 + \frac{16}{45} x^4 \int_0^1 \xi y_n(\xi)\, d\xi - \frac{1}{15} y_n(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

und erhalten

$$\begin{aligned} y_0 &= 1{,}066667x^4 \\ y_1 &= 1{,}058766x^4 \\ y_2 &= 1{,}058824x^4 \\ y_3 &= 1{,}058824x^4. \end{aligned}$$

Daran erkennen wir sofort, daß eine Einschließung gilt. Ähnliche Aussagen wie für lineare Integralgleichungen der Form (12) erhält man auch für nichtlineare Gleichungen

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi, y(x), y(\xi)]\, d\xi, \tag{19}$$

wenn vorausgesetzt wird, daß

$$Ty \equiv \int_a^b G(x, \xi, y(x), y(\xi)]\, d\xi$$

stetig ist und beschränkt mit einer Konstanten $\gamma < 1$. Benutzen wir zur näherungsweisen Lösung der Aufgabe (19) das Iterationsverfahren $y_{n+1} = Ty_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$, so gelten auch hier die Einschließungsaussagen, wenn T antiton ist. Ist T nicht von vornherein antiton, so kann auch hier in vielen Fällen die Antitonie durch eine geeignete Umformung erzwungen werden. In

$$y(x) = \frac{1}{1-\varkappa}\left[\int_a^b G(x, \xi, y(x), y(\xi)\, d\xi - \varkappa\, y(x)\right]$$

muß $\varkappa > 0$ so bestimmt werden, daß

$$\bar{T}y = \frac{1}{1-\varkappa}\left[\int_a^b G(x, \xi, y(x), y(\xi))\, d\xi - \varkappa\, y(x)\right]$$

antiton wird.

4. Anwendung auf Gleichungen mit einer Unbekannten

Vorgelegt sei für eine gesuchte reelle Unbekannte x die Gleichung $f(x) = 0$. Durch gewisse Umformungen werde sie in die Form $x = \varphi(x)$ gebracht, die die gleichen Wurzeln wie $f(x) = 0$ haben soll. Zur näherungsweisen Berechnung einer Lösung dieser Gleichung konstruieren wir durch das Iterationsverfahren

$$(20) \qquad x_{n+1} = \varphi(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

eine Näherungsfolge x_n, indem wir mit einer geeigneten Ausgangsnäherung x_0 beginnen.

Die allgemeinen Sätze lassen sich anwenden, wenn wir den Raum der reellen Zahlen betrachten. Wir definieren $\|x\| = |x|$ und $Tx = \varphi(x)$. Es ist zu untersuchen, ob sich eine Zahl $\varkappa$ angeben läßt, so daß $\varphi(x) - \varkappa x$ monoton nichtwachsend wird und ob der Operator $Tx = \varphi(x)$ lipschitzbeschränkt ist mit einer Konstanten $\gamma < 1$.

$\varphi(x)$ ist monoton nichtwachsend, wenn $\varphi'(x) \leqq 0$ ist für alle betrachteten $x \in [a, b]$, wobei mit $[a, b]$ das Intervall bezeichnet wird, in dem eine Lösung der Gleichung bestimmt werden soll. Ist dies nicht von vornherein der Fall, so formen wir die Gleichung $x = \varphi(x)$ um in

$$(21) \qquad x = \frac{1}{1-\varkappa}[\varphi(x) - \varkappa x].$$

$\bar{\varphi}(x) = \frac{1}{1-\varkappa}[\varphi(x) - \varkappa x]$ ist dann monoton nichtwachsend, wenn durch geeignete Wahl von $\varkappa$ erreicht werden kann, daß $\bar{\varphi}'(x) \leqq 0$ wird. Es muß also sein $\bar{\varphi}'(x) = \frac{1}{1-\varkappa}[\varphi'(x) - \varkappa] \leqq 0$, d. h.

$$(22) \qquad \frac{\varphi'(x)}{1-\varkappa} \leqq \frac{\varkappa}{1-\varkappa}.$$

Wenn $\varphi'(x)$ beschränkt ist für $x \in [a, b]$, läßt sich $\varkappa$ so wählen, daß die Bedingung (22) erfüllt ist. Ist nämlich $0 \leqq \varphi'(x) < 1$, so wird $\varkappa$ so gewählt, daß $\varphi'(x) \leqq \varkappa < 1$ für alle $x \in [a, b]$ gilt und ist $\varphi'(x) > 1$, so wählt man $1 < \varkappa \leqq \varphi'(x)$. In der Nähe von $\varphi'(x) = 1$ wird durch diese Umformung (21) nichts erreicht werden. Es ist jedoch zu beachten, daß die Herstellung der Gleichung $x = \varphi(x)$ aus der Gleichung $f(x) = 0$ noch weitgehend willkürlich ist und evtl. so durchgeführt werden kann, daß dieser Fall nicht eintritt.

Der Operator $Tx = \varphi(x)$ soll ferner lipschitzbeschränkt sein mit einer Konstanten $\gamma < 1$. Dies ist sicher erfüllt, wenn $\max\limits_{a \leqq x \leqq b} | \varphi'(x) | < 1$ oder nach einer evtl. notwendigen Umformung (21), wenn

$$\max_{a \leqq x \leqq b} | \varphi'(x) - \varkappa | < | 1 - \varkappa | \tag{23}$$

gilt.

LITERATUR

[1] Bückner, H., *Praktische Behandlung von Integralgleichungen*, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1952, S. 37—73.

[2] Collatz, L. und Schröder J., *Einschließen der Lösungen von Randwertaufgaben*, Num. Math. 1, 1959, S. 61—72.

[3] Jäckel, H. *Nichtlineare Theorie der Wärmeleitung in festen Körpern*, Wiss. Zeitschr. d. Hochsch. f. Maschinenbau, Karl-Marx-Stadt 3, H. 2, 1961, S. 23—40.

[4] Schneider, M., *Eine Methode zur näherungsweisen Lösung von Rand- und Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen*, Wiss. Zeitschr. d. TH Karl-Marx-Stadt 6, H. 2, 1964, S. 89—108.