Archivum Mathematicum

Václav Havel

Verallgemeinerte Gewebe. I

Archivum Mathematicum, Vol. 2 (1966), No. 2, 63--70

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104608`

VERALLGEMEINERTE GEWEBE, I

VÁCLAV HAVEL, BRNO

(Eingegangen am 5. Juli 1965)

§ 1. Einführung. Es ist wohlbekannt, daß die Theorie von Dreigeweben ein geometrisches Gegenstück der Theorie von Quasigruppen bzw. Loops bildet; die Ergebnisse einer Theorie sind in den Begriffen der anderen ausdrückbar und insbesondere kann man in dieser Weise die gegenseitige Beziehung zwischen konfigurativen Schließungssätzen in Dreigeweben und algebraischen Identitäten in Quasigruppen bzw. Loops beschreiben (vgl. [1], [8], [9]). Eine ähnliche Situation entsteht, wenn man die Theorie der Viergewebe und die Theorie der Doppelloops vergleicht (vgl. [2], [6], [8]).

Im weiteren finden wir, daß analog auch die Gruppoide und die sog. Doppelgruppoide entsprechende geometrische Objekte besitzen, die wir als verallgemeinerte Drei- und Viergewebe bezeichnen wollen. Dabei wollen wir nur solche Gruppoide untersuchen, bei denen die Resultate der binären Komposition die ganze Grundmenge ausfüllen, während wir bei verallgemeinerten Viergeweben stets die Existenz von Null-und Einselement voraussetzen werden; beide Beschränkungen sind aber nich wesentlich.

Wir führen auch eine einfache Konstruktion von sämtlichen Doppelgruppoiden ein; diese Konstruktion gibt im Falle, daß eines der beiden distributiven Gesetze gilt, die bekannte Konstruktion von sämtlichen l-Systemen ([7], Satz 4.1, S. 50—51) wieder. Weil man die Doppelgruppoide als Koordinatenbereiche von verallgemeinerten Viergeweben auffassen kann, ist damit eine gewisse Begründung dieser Theorie gestellt.*)

§ 2. Verallgemeinerte Dreigewebe und Gruppoide.

Es sei M (card $M \geq 2$) eine Menge und Z eine solche Zerlegung der Menge $M \times M$, daß eine Bijektion $\varkappa$: $Z \to M$ existiert; dann soll das Tripel $(M \times M, Z, \varkappa)$ ein *verallgemeinertes Dreigewebe***) heißen. Die Untermengen $\{(x, y) | y = c\} = [y = c]$, $c \in M$ bzw. $\{(x, y) | x = c\} =$

*) Herrn Professor M. Novotný bin ich für wertvolle Ratschläge und Bemerkungen bei der Rezension sehr dankbar.

**) Hier im engeren Sinn; im weiteren Sinn soll das verallgemeinerte Dreigewebe ein Paar $(X \times Y, Z)$ bezeichnen, wo X, Y (card $X \geqq 2$, card $Y \geqq 2$) Mengen und Z eine Zerlegung von $X \times Y$ sind.

$= [x = c]$, $c \in M$ von $M \times M$ kann man als Blöcke einer Zerlegung X bzw. Y von $M \times M$ erklären. Elemente von $M \times M$ sollen *Punkte*, die Blöcke der Zerlegungen X, Y und Z sollen *Geraden* des gegebenen verallgemeinerten Dreigewebes heißen. Für die X-, Y- und Z-Blöcke wollen wir auch die Bezeichnung X-, Y- und Z-*Geraden* benützen.

Hilfssatz 1. *Es sei $D = (M \times M, Z, \varkappa)$ ein verallgemeinertes Dreigewebe. Durch jeden Punkt von D geht genau eine X- bzw. Y- bzw. Z-Gerade. Jede X-Gerade hat mit jeder Y-Geraden genau einen Punkt gemein.*

Der Beweis ist klar.

Man sagt, daß ein verallgemeinertes Dreigewebe $(M \times M, Z, \varkappa)$ eine X-*Achse* bzw. Y-*Achse zuläßt*, wenn ein solches Element $n \in M$ existiert, daß jeder Punkt (x, n) bzw. (n, x) auf der Geraden $\varkappa^{-1}x$ liegt, wo x die Menge M durchläuft. Man nennt die Gerade $[y = n]$ bzw. $[x = n]$ die X-bzw. Y-*Achse*.

Hilfssatz 2. *Besitzt ein verallgemeinertes Dreigewebe $(M \times M, Z, \varkappa)$ eine X-Achse, dann hat jede Z-Gerade mit der X-Achse genau einen Punkt gemein.*

Beweis. Enthält eine Z-Gerade g die Punkte $(a, n) \neq (b, n)$, dann ist auch $\varkappa^{-1}a = \varkappa^{-1}b$ trotz der Voraussetzung, daß $\varkappa$ eine Bijektion ist.

Man sagt, daß ein verallgemeinertes Dreigewebe $(M \times M, Z, \varkappa)$ *ein Reper zuläßt*, wenn ein solches Element $n \in M$ existiert, daß für jedes $x \in M$ die Punkte (x, n), (n, x) auf derselben Z-Geraden $\varkappa^{-1}x$ liegen.

Wir nennen den Punkt (n, n) einen *Ursprung* und die Geraden $[y = n]$ bzw. $[x = n]$ die X- bzw. Y-*Achse* des Repers.

Hilfssatz 3. *Besitzt ein verallgemeinertes Dreigewebe $(M \times M, Z, \varkappa)$ ein Reper, dann hat jede Z-Gerade mit beiden Achsen des Repers stets genau einen Punkt gemein.*

Beweis folgt sofort aus Hilfssatz 2.

Sind $D_i = (M_i \times M_i, Z_i, \varkappa_i)$, $i = 1, 2$ verallgemeinerte Dreigewebe, dann verstehen wir unter einem *Homomorphismus* $\theta\colon D_1 \to D_2$ eine Abbildung $\theta\colon M_1 \times M_1 \to M_2 \times M_2$, welche jede X- bzw. Y- bzw. Z-Gerade aus D_1 stets *in* (nicht notwendig *auf*) eine X- bzw. Y- bzw. Z-Gerade überführt.

Es seien $D_i = (M_i \times M_i, Z_i, \varkappa_i)$, $i = 1, 2$ verallgemeinerte Dreigewebe und es existiere ein Isomorphismus (also ein bijektiver Homomorphismus) $\theta\colon D_1 \to D_2$. Wir definieren drei abgeleitete Abbildungen $\theta_X, \theta_Y, \theta_Z$ zwischen M_1 und M_2 nach folgenden Vorschriften: $\theta([x = c]) = [x = \theta_X c]$, $\theta([y = c]) = [y = \theta_Y c]$, $\varkappa_2(\theta(\varkappa_1^{-1}c)) = \theta_Z(c)$, $c \in M_1$. Ist dabei $\theta_X = \theta_Y = \theta_Z$, so nennen wir θ *regelmäßig*.

Ein verallgemeinertes Dreigewebe $(M \times M, Z, \varkappa)$, in welchem jede Z-Gerade mit jeder X- und Y-Geraden stets höchstens bzw. genau einen Punkt gemein hat, soll hier *halbeinfach* bzw. *einfach* heißen. Ein einfaches verallgemeinertes Dreigewebe heißt kürzer *Dreigewebe*.

Hilfssatz 4. *Ein verallgemeinertes Dreigewebe* $D = (M \times M,\ Z,\ \varkappa)$ *ist dann und nur dann mit einem verallgemeinerten Dreigewebe isomorph, welches eine X-Achse bzw, ein Reper zuläßt, wenn in D eine solche X-Gerade existiert, die mit jeder Z-Geraden einen Punkt gemein hat bzw. eine solche X- und Y-Gerade, welche jede Z-Gerade in genau einem Punkt durchschneiden.*

Beweis. Der Fall „dann" ergibt sich sofort aus Hilfssätzen 2 und 3. Es bleibt übrig den Fall „nur dann" zu behandeln. Wir setzen voraus, daß eine X-Gerade $[y=n]$ existiert, welche mit jeder Z-Geraden $\varkappa^{-1}c$, $c \in M$ genau den Punkt $(\varkappa^*(\varkappa^{-1}(c)),\ n)$ gemein hat. Wir bilden ein neues verallgemeinertes Dreigewebe $D^* = (M \times M,\ Z,\ \varkappa^*)$. Dann gibt es einen Isomorphismus $\theta : D \to D^*$ so, daß θ_X, θ_Y identische Abbildungen auf M sind und θ_Z durch $\theta_Z c = \varkappa^*(\varkappa^{-1}(c))$, $c \in M$ vorgeschrieben wird.

Wir setzen voraus, daß die Geraden $[y = n_1]$ bzw. $[x = n_2]$ existieren, welche mit jeder Z-Geraden $\varkappa^{-1}c$, $c \in M$ genau den Punkt $(\varkappa_1(\varkappa^{-1}(c)), n_1)$ bzw. $(\varkappa_2(\varkappa^{-1}(c)),\ n_2)$ gemein haben. Nun wählen wir die Abbildungen $\alpha_X : M \to M$ und $\alpha_Y : M \to M$ so, daß $\alpha_X(\varkappa_1 g) = \alpha_Y(\varkappa_2 g) = \varkappa g$ für jede Gerade $g \in Z$ gilt. Ferner definieren wir ein neues verallgemeinertes Dreigewebe $D^* = (M \times M,\ Z^*,\ \varkappa^*)$ in solcher Weise, daß der Punkt $(x,\ y)$ genau dann eine Z-Gerage g verläuft, wenn der Punkt $(\theta_X x,\ \theta_Y y)$ eine Gerade $\varkappa^{*-1}(\varkappa g)$ verläuft. Es existiert dann ein Isomorphismus $\theta : D \to D^*$ mit $\theta_X = \alpha_X$, $\theta_Y = \alpha_Y$, so daß θ_Z die identische Abbildung auf M ist.

Es sei $D = (M \times M,\ Z,\ \varkappa)$ ein verallgemeinertes Dreigewebe. Dann soll ein *D-Rechteck* ein solches Quadrupel von Punkten A, B, C, D bedeuten, da*ß* A, B bzw. C, D stets auf derselben X-Geraden und B, C bzw. A, D auf derselben Y-Geraden liegen.

Es sei $D = (M \times M,\ Z,\ \varkappa)$ ein verallgemeinertes Dreigewebe mit Reper. Wir formulieren folgende Konfigurationsbedingungen (Schließungssätze):

R: Sind (A, B, C, D), (A', B', C', D') solche D-Rechtecke, so daß A, A' bzw. B, B' bzw. C, C' stets auf derselben Z-Geraden liegen, wobei B auf der Y-Achse und B' auf der X-Achse liegt, so liegen auch D, D' auf derselben Z-Geraden.

Eine Spezialisierung von R, bei welcher A, D, B', C' auf derselben Y-Geraden bzw. A, B, C', D' auf derselben X-Geraden bzw. A, A', C, C' auf derselben Z-Geraden liegen, bezeichnen wir B_X bzw. B_Z bzw. B_Y.

I: Jede X- bzw. Y-Gerade hat mit einer gewissen Z-Geraden genau einen Punkt gemein.

T: Es seien A, B, C, D, E, F Punkte; es liegen A, B auf der X-Achse, C, D auf der Y-Achse, C, F bzw. D, E stets auf derselben X-Geraden, A, F bzw. B, E stets auf derselben Y-Geraden und A, D bzw. B, C stets auf derselben Z-Geraden. Dann liegen E, F auf derselben Z-Geraden.

B_l: Es seien (A, B, C, D) und (A', B', C', D') D-Rechtecke; es liegen A', B' auf der X-Achse, A', B, C, D' auf der Y-Achse und A, A' bzw. B, B' bzw. C, C' stets auf derselben Z-Geraden. Dann liegen D, D' auf derselben Z-Geraden.

B_r: Es seien (A, B, C, D) und (A', B', C', D') D-Rechtecke; es liegen A, D, B', C' auf der X-Achse, A, B auf der Y-Achse, A, A' bzw. B, B' bzw. C, C' stets auf derselben Z-Geraden. Dann liegen D, D' auf derselben Z-Geraden.

Jedem beliebigen Gruppoid $G = (M, \tau)$ ordnen wir ein verallgemeinertes Dreigewebe $D_G = (M \times M, Z, \varkappa)$ zu, und zwar so, daß die Z-Geraden die Form $\{(x, y) | x\tau y = z\}$, $z \in M$ haben sollen. Weil nach Voraussetzung $M\tau M = M$ gilt, besitzt D_G eine Bijektion $\varkappa : Z \to M$, bei welcher jeder Geraden $\{(x, y) | x\tau y = z\}$, $z \in M$ das Element $z \in M$ entspricht.

Umgekehrt: einem beliebigen verallgemeinerten Dreigewebe $D = (M \times M, Z, \varkappa)$ ordnen wir ein Gruppoid $G_D = (M, \tau)$ zu, indem wir verlangen, daß für jedes $z \in M$ die Beziehung $x\tau y = z$ genau dann gilt, wenn $(x, y) \in \varkappa^{-1}(z)$ ist.

Es gilt der folgende

Satz 1. *Gegeben sei ein verallgemeinertes Dreigewebe $D = (M \times M, Z, \varkappa)$. D zuläßt eine X-Achse bzw. ein Reper genau dann, wenn G_D ein rechts-neutrales Element, bzw. ein neutrales Element besitzt. D ist halbeinfach bzw. einfach genau dann, wenn G_D die Regel der beiderseitigen Kürzung erfüllt bzw. wenn G_D eine Quasigruppe ist. Hat D ein Reper, so ist die Bedingung R bzw. B_X bzw. B_Y bzw. B_Z genau dann erfüllt, wenn in G_D das Gesetz $(x\tau y)\tau z = x\tau(y\tau z)$ bzw. $(x\tau x)\tau z = x\tau(x\tau z)$ bzw. $(x\tau y)\tau y = x\tau(y\tau y)$; $x, y, z \in M$ gilt. D erfüllt I genau dann, wenn in G_D jedes Element $x \in M$ genau ein entgegengesetztes $x^* \in M$ besitzt ($x\tau x^* = x^*\tau x = n$, wo n das neutrale Elemente von G_D ist). Hat D ein Reper und erfüllt es I, so gilt B_l bzw. B_r genau dann, wenn $x^*\tau(x\tau z) = z$ bzw. $(x\tau y)\tau y^* = x$ für alle $x, y, z \in M$; $x^*\tau x = y\tau y^* = n$ gilt. D mit einem Reper erfüllt T genau dann, wenn G_D kommutativ ist.*

Die Beweise sind ähnlich wie in [8], S. 42—60 durchfürbar und können beiseite gelassen werden.

Eine *Isotopie* zwischen Gruppoiden (M_i, τ_i), $i = 1, 2$ ist ein Tripel (ξ, η, ζ) von solchen Bijektionen $\xi : M_1 \to M_2$, $\eta : M_1 \to M_2$ und $\zeta : M \to M_2$, daß $\xi(x)\tau_2\eta(y) = \zeta(x\tau_1 y)$ für alle $x, y \in M_1$.

Hilfssatz 5. *Ein Isomorphismus θ zwischen zwei verallgemeinerten Dreigeweben $D_i = (M_i \times M_i, Z_i, \varkappa_i)$ existiert genau dann, wenn es eine Isotopie (ξ, η, ζ) zwischen $G_{D_i} = (M_i, \tau_i)$, $i = 1, 2$ gibt.*

Beweis. Es existiere ein Isomorphismus $\theta : D_1 \to D_2$. Man überzeugt sich leicht davon, daß $(\theta_X, \theta_Y, \theta_Z)$ die verlangte Isotopie zwischen G_{D_1} und G_{D_2} ist. Umgekehrt, es existiere eine Isotopie (ξ, η, ζ) zwischen G_{D_1}

und G_{D_2}. Man sieht leicht ein, daß es genau einen Isomorphismus $\theta : D_1 \to D_2$ so gibt, daß $\theta_X = \xi$, $\theta_Y = \eta$, $\theta_Z = \zeta$.

Wir hoffen, daß man mit den eingeführten und anderen, ihnen ähnlichen Begriffen eine gewisse geometrische Belebung der Gruppoidtheorie erreichen kann, z. B. in der Isotopietheorie der Gruppoide ([3], S. 56—60).

§ 3. Verallgemeinerte Viergewebe und die Doppelgruppoide.

Unter einem *Doppelgruppoid* werden wir in diesem Artikel ein Tripel $B = (M, +, .)$ verstehen, wo M eine Menge mit zwei ausgezeichneten Elementen $0 \neq 1$ ist und zwei binären Kompositionen $+$ und $\cdot$, wobei $x + 0 = 0 + x = x$, $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ und $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ für jedes $x \in M$ und $M + M = M \cdot M = M$ gilt. Das Gruppoid $B^+ = (M, +)$ nennen wir das *additive Gruppoid* von B.

Ist $B = (M, +, \cdot)$ ein Doppelgruppoid, so werden wir uns um folgende Bedingungen interessieren:

(1) $x(y + z) = xy + xz$ für alle $x, y, z \in M$;

(2) $(x + y)\, z = xz + yz$ für alle $y, y, z \in M$;

(3) $x(xy) = x^2y$ für alle $x, y \in M$;

(4) $xy^2 = (xy)\, y$ für alle $x, y \in M$;

(5) zu jedem $x \in M \setminus \{0\}$ gibt es genau ein $x^{-1} \in M \setminus \{0\}$ so, daß $x \,.\, x^{-1} = x^{-1}x = 1$;

(6) die Gleichungen $xb = c$ bzw. $ay = c$ haben für gegebene $a, b, c \in M \setminus \{0\}$ genau eine Lösung $x \in M \setminus \{0\}$ bzw. $y \in M \setminus \{0\}$;

(7) $x^{-1}(xy) = y$ für alle $x, y \in M \setminus \{0\}$;

(8) $x = (xy)\, y^{-1}$ für alle $x, y \in M \setminus \{0\}$;

(9) $x(yz) = (xy)\, z$ für alle $x, y, z \in M$;

(10) $xy = yx$ für alle $y, x \in M$;

(11) die Gleichung $xa + b = x\,c + d$ ist für gegebene $a, b, c, d \in M$; $a \neq c$ eindeutig durch $x \in M$ lösbar;

(12) die Gleichung $ax + b = cx + d$ ist für gegebene $a, b, c, d \in M$; $a \neq c$ eindeutig durch $x \in M$ lösbar.

Satz 2. *Ein beliebiges Doppelgruppoid $B = (M, +, \cdot)$ mit vorgeschriebenem additiven Gruppoid $(M, +)$ kann man folgenderweise konstruieren: man wählt eine Abbildung φ der Menge M in die Menge aller Abbildungen von M in M so, daß folgendes gilt:*

(i) $\varphi(0)\, x = 0$, $\varphi(x)\, 0 = 0$ *für jedes* $x \in M$;

(ii) *es gibt ein Element $1 \in M$ so, daß $\varphi(1)\, x = x$, $\varphi(x)\, 1 = x$ für jedes $x \in M$;*

(iii) *die Multiplikation in B ist nach der Vorschrift $\varphi(x)\, y = xy$ für alle $x, y \in M$ definiert.*

Beweis. Die Beziehungen $0 \,.\, x = x \,.\, 0 = 0$ und $1 \,.\, x = x \,.\, 1 = x$

sind nur die nach (iii) umgeformten Bedingungen (i), (ii). Die Beziehung $M \,.\, M = M$ folgt leicht schon aus $\varphi(1)\, M = M$. Umgekehrt: ist B ein gegebenes Doppelgruppoid, dann sind für die Abbildungen $\varphi(x)$, $x \in M$ von M in M, welche nach (iii) definiert werden, offenbar die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt.

Zusatz 1. *Im Satz* 2 *gilt* (1) *genau dann, wenn jedes* $\varphi(x)$, $x \in M$ *ein Endomorphismus von* $(M, +)$ *ist* (vgl. [7], Satz 4.1, S. 50—51).

Zusatz 2. *Im Satz* 2 *gilt* (2) *genau dann, wenn sich die Abbildung* φ *von* $(M, +)$ *ins Gruppoid* $(A, \&)$ *aller Abbildungen von* M *in* M, *wo die binäre Komposition* $\&$ *für* α, $\beta \in A$ *durch* $(\alpha \,\&\, \beta)\, x = \alpha(x) + \beta(x)$, $x \in M$ *definiert wird, als Homomorphismus beider Gruppoide erweist.*

Beweis. Der entsprechende Homomorphismus ist durch $\varphi(x + y)\, z = \varphi(x)\, z + \varphi(y)\, z$ (für $x, y, z \in M$) charakterisierbar, was nach (iii) in der Form $(x + y)\, z = xz + yz$ ausgedrückt werden kann.

Zusatz 3. *Im Satz* 2 *gilt* (2) *bzw.* (3) *genau dann, wenn die Abbildungen* $\varphi(x^2)$, $\varphi(x) \circ \varphi(x)$ *bzw.* $\varphi(x) \circ \varphi(y)$, $\varphi(xy)$ *das Element* y (*für alle* x, $y \in M$) *in gleicher Weise abbilden.*

Zusatz 4. *Im Satz* 2 *gilt* (5) *genau dann, wenn es für jedes* $x \in M \setminus \{0\}$ *genau ein Element* $x^* \in M \setminus \{0\}$ *gibt, so daß* $\varphi(x^*)\, x = \varphi(x)\, x^* = 1$.

Die Beweise von Zusätzen 3 und 4 sind evident.

Zusatz 5. *Im Satz* 2 *gilt* (6) *genau dann, wenn die Menge* $\varphi(M \setminus \{0\})$ *aus lauter Bijektionen besteht, welche auf* $M \setminus \{0\}$) *einfach transitiv wirken.*

Beweis wie in [7], Satz 9.2, S. 60.

Zusatz 6. *Im Satz* 2 *gilt mit nachträglicher Voraussetzung* (5) *auch noch* (7) *genau dann, wenn* $\varphi(x^{-1}) = \varphi^{-1}(x)$ *für jedes* $x \in M - \{0\}$ *in Kraft ist.*

Beweis. Gilt im Satz 2 (5) und (7), so kann nach (iii) (7) in die Form $\varphi(x^{-1}) \circ \varphi(x)\, y = y$; $x \in M \setminus \{0\}$, $y \in M$ überführen. Es ist dann also $\varphi(x^{-1}) \circ \varphi(x)$ die identische Abbildung auf M. Umgekehrt: es gelte (5) und $\varphi(x^{-1}) = \varphi^{-1}(x)$ für jedes $x \in M \setminus \{0\}$. Nach (iii) ist dann $\varphi(x^{-1})\, y = x^{-1}y$, $y \in M$, während $\varphi^{-1}(x)\, y = z$ für ein solches z gilt, für welches die Gleichung $x \,.\, z = y$ erfüllt ist. Es folgt also $x(x^{-1}y) = y$ w. z. b. w.

Zusatz 7. *Im Satz* 2 *gilt* (9) *genau dann, wenn die Abbildung* $\varphi : (M, +) \to (\varphi(M), \circ)$ *ein Epimorphismus ist.*

Beweis wie in [7], Satz 7.1, S. 57.

Zusatz 8. *Im Satz* 2 *gilt* (10) *genau dann, wenn* $\varphi(x)\, y = \varphi(y)\, x$ *für alle* x, $y \in M$ *in Kraft ist.*

Der Beweis ist evident.

Für die Theorie der Hallschen Ternärkörper (vgl. [8], S. 36) ist es wichtig die Bedingungen (11) und (12) in einem Doppelgruppoid $(M, +, \cdot)$ zu untersuchen und für sie in konkreten Fällen geeignete entsprechende zusätzliche Form des Satzes 2 zu finden, was wir da beiseite lassen.

Ein *verallgemeinertes Viergewebe* ist ein Quintupel ($M \times M$, Z_1, Z_2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$), wo man voraussetzt: M ist eine wenigstens zweielementige Menge; Z_i ist eine Zerlegung der Menge $M \times M$ und es gibt eine Bijektion $\varkappa_i : Z_i \to M$ $(i = 1, 2)$; ($M \times M$, Z_1, $\varkappa_1$) ist ein verallgemeinertes Dreigewebe mit einem Reper, dessen X- und Y-Achse die Gerade $x_1 = [y = o]$ bzw. $y_1 = [x = o]$ ist; $x_1 \cup y_1$ ist ein Teil eines Z_2-Blocks O; ein Element $e \in M \setminus \{0\}$ existiert, so daß jeder weitere Z_2-Block mit den Geraden $x_2 = [y = e]$, $y_2 = [x = e]$ genau die Punkte (z, e), (e, z) für ein gewisses $z \in M \setminus \{0\}$ gemein hat.

Jedem verallgemeinerten Viergewebe $Q = (M \times M, Z_1, Z_2, \varkappa_1, \varkappa_2)$ ordnen wir ein Doppelgruppoid $B_Q = (M, +, \cdot)$ so zu, daß $0 = o$, $1 = e$; $x + y = z \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (x,y) \in \varkappa_1^{-1}(z)$ und $x \cdot y = z \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (x, y) \in \varkappa_2^{-1}(z)$ für $x, y \in M$.

Umgekehrt: jedem Doppelgruppoid $B = (M, +, \cdot)$ ordnen wir ein verallgemeinertes Viergewebe $Q_B = (M \times M, Z_1, Z_2, \varkappa_1, \varkappa_2)$ so zu, daß (x, y) genau dann in demselben Z_1-Block liegt, wenn $x + y = z$, $z \in M$ gilt und (x, y) genau dann in demselben Z_2-Block liegt, wenn $x \cdot y = z$, $z \in M$ gilt.

Den algebraischen Bedingungen (3)—(10) im gegebenen Doppelgruppoid $(M, +, \cdot)$ entsprechen dann gewisse geometrische Bedingungen, die durch leichte Modifikation der konfigurativen Bedindungen aus § 2 entstehen. Die konfigurativen Bedingungen, den Bedingungen (1) bzw. (2) entsprechen, besitzen eine sehr komplizierte Struktur und wir haben keine einfachere Form von ihnen gefunden.

Hat B_Q keine Nullteiler, so ist auch $((M \setminus \{0\}) \times (M \setminus \{0\}), Z_2 \setminus \setminus \{x_1 \cup y_1\})$ ein verallgemeinertes Dreigewebe und umgekehrt. Man kann vom allgemeinen Doppelgruppoid ausgehend durch schrittweise Hinzuziehung algebraischer Bedingungen bis zum Begriff des Schiefkörpers bzw. Körpers ankommen und die entsprechende geometrische Situation dabei untersuchen. Wenn wir uns um die Einbettung des gegebenen verallgemeinerten Viergewebes in geeignete affine Ebene interessieren, so muß man darauf Rücksicht nehmen, daß die Z_2-Blöcke keine Geraden der Einbettungsebene sein können, sondern nur gewisse verallgemeinerte Kegelschnitte.

Isotopieeigenschaften der Quasigruppen werden in [1] mit Rücksicht auf die entsprechenden Isomorphismen der zugehörigen Dreigeweben untersucht, die Viergewebe sind z. B. in [2], [6], [8], [9] betrachtet. Die Homomorphieeigenschaften der Monoide (der assoziativen Gruppoide mit neutralem Element) können in [4] konsultiert werden. Es ist interessant, das die Konstruktion der divisionalen l-Systeme (im Sinne von [7], Satz 9.2, S. 60) im Falle der endlichen Veblen-Wedderburnschen Systeme sofort das Hauptresultat von [6] gibt (vgl. auch [10].

LITERATUR

[1] Aczél, J.—Pickert, G.—Radó, F., Nomogramme, Gewebe und Quasigruppen, Matematica 2 (25), (1960), 5—24.

[2] Artzy, R. Eigenschaften von ebenen Viergeweben allgemeiner Lage, Math. Ann. 126 (1953), 330—342.

[3] Bruck, R. H., A survey of binary systems, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1958.

[4] Chevalley, C. Fundamental concepts of algebra, New York 1956.

[5] Lombardo-Radice, L., Piani grafici finiti a coordinate di Veblen—Wedderburn, Ricerche di Matematica 2 (1953) 266—273.

[6] Naumann, H., Über das zweite Distributivgesetz im Zusammenhang mit den Viergeweben von Herrn R. Artzy, Math. Ann 128 (1954), 92—94.

[7] Novotný, M. Les systèmes à deux compositions avec une loi distributive, Publ. Fac. Sci. Univ. Brno 1950, No. 321, 49—68.

[8] Pickert, G., Projektive Ebenen, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1955.

[9] Reidemeister, K. Grundlagen der Geometrie, Berlin 1950.

[10] Wesson, J. R., On Veblen-Wedderburn systems, Amer. Math. Monthly 64 (1957), 631—635.