Václav Havel

Eigenschaften des Halbverbandes der Zerlegungen in einer Menge

Archivum Mathematicum, Vol. 1 (1965), No. 4, 213--215

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104593`

EIGENSCHAFTEN DES HALBVERBANDES DER ZERLEGUNGEN IN EINER MENGE

VÁCLAV HAVEL, BRNO

Eingegangen am 3. November 1964

Es sei M eine feste nichtleere Menge und $\mathscr{H} = \mathscr{H}(M)$ die Menge aller Zerlegungen in M, folgendermaßen teilweise geordnet: für A, B aus $\mathscr{H}$ gilt $A \leqq B$ gerade dann, wenn jeder A-Block in gewissem B-Block liegt.[1] Ist $\mathbf{A} = (A_\nu)_\nu$ willkürliche Familie der Zerlegungen in M, so gibt es in $\mathscr{H}$ immer die Zerlegung $\sup \mathbf{A}$ (ist $\mathfrak{B}(\mathbf{A})$ die Menge aller Blöcke von allen $A_\nu \in \mathbf{A}$, dann liegen a, b aus $\mathfrak{B}(\mathbf{A})$ in demselben $\sup \mathbf{A}$-Block gerade dann, wenn eine endliche Folge $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, $a_0 = a$, $a_n = b$, solcher Blöcke aus $\mathfrak{B}(\mathbf{A})$ existiert, daß $a_0 \between a_1 \between \ldots \between a_{n-1} \between a_n)$[2], indem die Zerlegung $\inf \mathbf{A}$ nicht in jedem Falle existiert und existiert sie, so sind die $\inf \mathbf{A}$-Blöcke der Form $\bigcap\limits_\iota a_\iota \neq 0$, $a_\iota \in A_\iota$.[3] Die Menge $\mathscr{H}$ mit einer solchen Ordnungsrelation $\leqq$ stellt also einen vollständigen Halbverband dar (O. Borůvka, [1], S. 16–19).

Eine teilweise geordnete Menge $\mathscr{T}(\leqq)$ nennen wir *relativ atomar*, wenn in $\mathscr{T}$ zu jedem Element a ein Element $b \succ a$ existiert.[5] Man sagt, daß im Halbverbande $\mathscr{T}(\leqq)$ die *Nachbarbedingung* gilt, wenn für seine Elemente aus $a \prec b$ auch $c \prec b \cup c$ für alle solche c folgt, für die $b \cup c$ existiert mit $a = b \cap c$. Den Halbverband $\mathscr{T}(\leqq)$ nennen wir *relativ komplementär*, wenn man in ihm zu Elementen $a \leqq b \leqq c$ immer ein Element d so finden kann, daß $c = b \cap d$ und daß $b \cap d$ existiert mit $a = b \cap d$. Es ist wohl bekannt, daß *die Menge aller Zerlegungen auf M einen vollständigen, relativ atomaren, relativ komplementären Unterverband mit der Nachbarbedingung in $\mathscr{H}$ darstellt* (Ø. Ore, [3], S. 578, 587 und 596, bzw. [5], S. 162–165).

Wir zeigen nun, daß auch *$\mathscr{H}$ selbst die Eigenschaft der relativen Atomarität und die Nachbarbedingung erfüllt, im Falle card $M > 1$ aber nicht die Bedingung der relativen Komplementarität.*

Beweis. Es sei $A \in \mathscr{H}$. Es gibt drei Arten der oberen Nachbaren

---

[1] Terminologie nach [1], [4], [5].

[2] $\between$ bezeichnet die Inzidenz (die Relation eines nichtleeren Durchschnitts).

[3] $H, H; H, H$ sind Symbole für entsprechende Mengen-, bzw. Verbandsoperationen.

[4] Der Begriff Halbverband ist im Sinne [3], S. 20 verwendet.

[5] $\succ$ bezeichnet die Relation der Nachbarschaft ([5], S. 21).

von A. Hat A wenigstens zwei verschiedene Blöcke a_1, a_2, so konstruieren wir die Zerlegung $B \in \mathscr{H}$, welche $a_1 \cup a_2$ als einen Block besitzt und deren übrige Blöcke mit von a_1 und a_2 verschiedenen A-Blöcken zusammenfallen. Offensichtlich ist $A \prec B$; es handelt sich um *erste Art* des oberen Nachbars von A. — Ist besonders A keine Zerlegung auf M, dann wählen wir $a_0 \in A$ und bezeichnen mit a_0' die Erweiterung der Menge a_0 um gerade ein Element, das in keinem A-Block liegt; wir konstruieren die Zerlegung $B \in \mathscr{H}$, die a_0' als einen B-Block besitzt und deren alle restlichen Blöcke mit von a_0 verschiedenen A-Blöcken zusammenfallen. Es ist ersichtlich $A \prec B$; wir bekamen *zweite Art* des oberen Nachbars von A. — Es sei $A \in \mathscr{H}$ wieder keine Zerlegung auf M. Wir konstruieren eine Zerlegung $B \in \mathscr{H}$ so, daß wir für ihre Blöcke alle A-Blöcke erklären und dazu noch einen einzigen weiteren B-Block hinfügen, der gerade ein Element enthält. Es ist wieder $A \prec B$; wir werden so von *dritter Art* des oberen Nachbars sprechen. — Damit sind schon alle Möglichkeiten für obere Nachbaren erschöpft. Wir sehen also, daß es sich der Halbverband als relativ atomar zeigt.

Es seien $A, B, C \in \mathscr{H}$; $A \prec B$ und es existiere $B \frown C$ mit $B \frown C = A$; wir behaupten, daß dann $C \prec B \smile C$. Tatsächlich, ist erstens B der obere Nachbar erster Art von A, dann stimmen die B-Blöcke mit A-Blöcken bis auf einen B-Bock b der Form $a_1 \cup a_2$ für gewisse einander verschiedene A-Blöcke a_1, a_2. Weiter existieren verschiedene C-Blöcke c_1, c_2, so daß $a_1 \subset c_1$, $a_2 \subset c_2$. Wir bemerken, daß selbverständlich kein C-Block gleichzeitig a_1 und a_2 enthält. Weiter sind C-Blöcke c_1, c_2 in demselben $d \in B \smile C$ enthalten, weil ein B-Block b existiert mit $b \between c_1$, $b \between c_2$ und sogar $d = c_1 \cup c_2$, weil im umgekehrten Fall entweder ein weiterer mit einem gewissen B-Block inzidenter C-Block $c_3 \subset d$ oder ein weiterer mit einem gewissen C-Block inzidenter B-Block $b_0 \subset d$ existiert, was beides unseren Voraussetzungen widerspricht. Wegen $(M \setminus d) \sqcap A = (M \setminus d) - B$ ist auch $(M \setminus d) \sqcap C = (M \setminus d) \sqcap (B \smile C)$ und $B \smile C$ ist ein oberer Nachbar erster Art von C. — Es sei zweitens B oberer Nachbar zweiter Art von A. Bezeichnen wir mit $(a_\alpha)_\alpha$ die Menge aller A-Blöcke, dann stimmen die B-Blöcke mit A-Blöcken bis auf einen einzigen B-Block $b = a_0 \cap \{p\}$, wo $a_0 \in A$, $p \in M \setminus \bigcup_\alpha a_\alpha$. Wegen $A = B \frown C$ haben die C-Blöcke die folgende Form: $c_\alpha \supset a_\alpha$ und c_γ, wobei $c_\gamma \cap a_\alpha = \emptyset$, $p \notin c_\alpha \cup c_\gamma$. Die $B \smile C$-Blöcke sind also der Form $c_\alpha (\alpha \neq 0)$, $c_0 \cup \{p\}$, c_γ, so daß sich $B \smile C$ als oberer Nachbar zweiter Art von C ergibt. — Setzen wir drittens voraus, daß B als oberer Nachbar dritter Art von A gewählt wurde. Die Menge aller A-Blöcke bezeichnen wir wieder mit $(a_\alpha)_\alpha$. Dann stimmen alle A-Blöcke mit B-Blöcken bis auf einen einzigen B-Block der Form $\{p\}$ mit $p \in M \setminus \bigcup_\alpha a_\alpha$. Wegen

$A = B \frown C$ haben alle C-Blöcke die Form $c_\alpha \supset a_\alpha$ und c_γ, $c_\gamma \cap a_\alpha = \emptyset$, wobei $p \notin c_\alpha, c_\gamma$. Die $B \smile C$-Blöcke sind also gerade $c_\alpha, c_\gamma, \{p\}$, so daß $B \smile C$ als oberer Nachbar dritter Art von C ausgeht. — Es folgt also, daß $\mathscr{H}$ die Nachbarbedingung erfüllt.

Es bleibt übrig, die relative Komplementarität zu behandeln. Haben wir also wieder die Zerlegungen $A \leqq B \leqq C$ in M. Jeder A-Block ist daher in einem gewissen B-Block und jeder B-Block in einem gewissen C-Block enthalten. Ist $c \in C$, so bezeichnen wir mit b_β und erklären als *ausgezeichnet* solche B-Blöcke, die in c enthalten sind und die selbst wenigstens einen A-Block enthalten; wenn für einen C-Block c wenigstens ein ausgezeichneter in c liegender B-Block existiert, so sprechen wir von einem *wesentlichen* C-Block. In jedem ausgezeichneten B-Block b_β wählen wir willkürlich einen *vertretenden* A-Block $a_\beta \supset b_\beta$.

Ist jeder B-Block ausgezeichnet, so konstruieren wir eine Zerlegung D, deren Blöcke folgende Form haben sollen: 1. alle nichtwesentliche C-Blöcke, 2. alle nichtvertretende A-Blöcke und 3. jeder wesentlicher C-Block c, der um die Vereinigung sämtlicher in c enthaltener nichtvertretender A-Blöcke vermindert ist.

Man kann zeigen, daß $B \frown D$ existiert und $A = B \frown D$, $C = B \frown D$ gilt.

Gibt es einen nicht ausgezeichneten B-Block, so folgt es für jede Zerlegung D, für welche $C = B \smile D$, daß $B \frown D$ existiert und von A verschieden ist.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Borůvka, O., Theorie der Zerlegungen in der Menge (tschechisch mit französischer Zusammenfassung), Publ. Fac. Sci. Univ. Brno, No. 278, 1—37 (1946).

[2] Borůvka, O., Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie, Berlin 1960.

[3] Dubreil-Jacotin, M. L., Lesieur L. et Croisot, R. Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonées et des treillis géométriques, Paris 1953.

[4] Ore, O. Theory of equivalence relations, Duke Math. Journal 9 (1942), 573—627.

[5] Szász, G. Einführung in die Verbandstheorie, Leipzig 1962.