SUR QUELQUES APPLICATIONS DES DISPERSIONS CENTRALES DANS LA THÉORIE DES EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU DEUXIÈME ORDRE

PAR O. BORŮVKA, BRNO

Présenté le 21 decembre 1964

I. INTRODUCTION

1. Dans la théorie des équations différentielles linéaires ordinaires du deuxième ordre aux intégrales oscillatoires, les fonctions appelées *dispersions centrales* jouent un rôle fondamental. Ces fonctions ont été rencontrées, dans l'origine, en 1953, en relations avec les transformations des équations en question. Depuis ce temps-là elles sont devenues l'objet de recherches de plusieurs auteurs qui les ont étudiées de différents points de vue.[1] On distingue, rappelons-le, quatre espèces des dispersions centrales. L'importance des dispersions centrales pour la théorie des équations en question consiste, au fond, en ceci, que ces fonctions relient, d'une certaine manière, les valeurs des intégrales d'une telle équation et celles de leurs dérivées en points mutuellement conjugués et par suite éloignés, en ouvrant ainsi la voie de traiter des problèmes de caractère global.

II. POSITION DU PROBLÈME

2. Nous nous occuperons dans la suite des équations différentielles linéaires ordinaires du deuxième ordre de la forme jacobienne

$$\text{(q)} \qquad y'' = q(t)\, y,$$

la fonction q étant continue dans un intervalle ouvert $j = (a, b)$.

Une intégrale d'une équation (q) s'appelle oscillatoire, si elle possède vers les deux limites a, b de l'intervalle j une infinité de zéros. Nous excluons de nos considérations, bien entendu, l'intégrale identiquement nulle: $y \equiv 0$. On appelle une equation (q) oscillatoire si ses intégrales sont oscillatoires.

Considérons une équation (q) et une intégrale de cette équation, y. Choisissons un nombre arbitraire, x, qui est différent de tout zéro de l'intégrale y.

[1]) On consultera à ce sujet la Bibliographie indiquée dans l'article [1].

On sait, que la fonction

$$(1)\qquad \bar{y}(t) = y(t)\int_x^t \frac{d\sigma}{y^2(\sigma)}$$

existe dans un voisinage de la valeur x et représente, dans ce voisinage, une solution de l'équation (q). Le voisinage en question s'étend à gauche jusqu'au premier zéro de l'intégrale y ou bien, en défaut des zéros de l'intégrale y inférieurs à x, à la limite a de l'intervalle j, et, une situation analogue subsiste à droite de x.

Une autre remarque qui nous servira du point de départ est la suivante: Étant donnée une équation (q), définie et oscillatoire dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$, il existe toujours infiniment beaucoup d'équations du même type dont les intégrales ont les mêmes zéros que les intégrales de (q). Cela s'exprime, en termes de la théorie des dispersions, qu'il y a toujours infiniment beaucoup d'équations différentielles en question dont la dispersion fondamentale coïncide avec celle de l'équation (q). On sait d'ailleurs que, la puissance de l'ensemble formé de ces équations différentielles est toujours égale à la puissance du continu, $\aleph$ ([2])

Ceci étant remarqué, voici les questions dont nous nous occuperons dans la suite:

Considérons une équation (q), définie et oscillatoire dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$.

Étant donnée une intégrale de l'équation (q), y, *il s'agit de prolonger la fonction*, $\bar{y}$, *définie d'après la formule* (1), *dans tout l'intervalle* j *et à l'aide des valeurs de l'intégrale* y, *de façon que la nouvelle fonction soit encore une intégrale de l'équation* (q).

Étudier les propriétés et surtout les relations mutuelles des intégrales des équations différentielles du type considéré qui ont la même dispersion fondamentale et déterminer toutes ces équations.

III. PRÉLIMINAIRES

Soit (q) une équation arbitraire et $j = (a, b)$ son intervalle de définition.

3. ***Phases.*** Soit u, v un couple ordonné d'intégrales indépendantes de l'équation (q) et w $(= uv' - u'v)$ la wronskienne correspondante.

On appelle, rapppelons-le, *première phase du couple* u, v toute fonction $\alpha(t)$ qui est continue dans l'intervalle j et qui vérifie, dans cet intervalle, à l'exception des zéros de l'integrale v, la relation

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{u(t)}{v(t)}.$$

On voit facilement qu'il y a précisément un système dénombrable de premières phases du couple en question et que les fonctions de ce système ne diffèrent l'une de l'autre que par des multiples entiers de π.

On définit d'une manière analogue les secondes phases du couple en question, $\beta(t)$, par la formule: $\operatorname{tg} \beta(t) = u'(t) : v'(t)$.

Dans la suite nous n'aurons à considérer que les premières phases. Nous parlerons simplement des phases des intégrales u, v au lieu des premières phases du couple ordonné d'intégrales u, v.

On apelle *phase de l'équation* (q) une phase des intégrales indépendantes quelconques de l'équation (q).

Nous allons indiquer rapidement, en revue, quelques propriétés des phases de l'équation (q), que nous rencontrerons en cours de nos considérations.

Toute phase de l'équation (q), α, appartient à la classe C_3,[2]) sa derivée, α', étant toujours différente de zéro; on a par conséquent: $\alpha' > 0$ ou bien $\alpha' < 0$ pour $t \in j$. La phase α résulte inférieurement et supérieurement non-bornée si et seulement si l'équation (q) est oscillatoire.

Étant donnés des nombres arbitraires, $t_0 \in j$; α_0, $\alpha_0' \neq 0$, α_0'' il existe précisément une phase de l'équation (q), α, satisfaisant aux conditions initiales: $\alpha(t_0) = \alpha_0$, $\alpha'(t_0) = \alpha_0'$, $\alpha''(t_0) = \alpha_0''$.

Deux phases quelconques de l'équation (q), α, $\overline{\alpha}$, vérifient dans l'intervalle j, à l'exception des valeurs pour lesquelles les fonctions $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \overline{\alpha}$ deviennent infinies, une relation de la forme

$$\operatorname{tg} \overline{\alpha} = \frac{c_{11} \operatorname{tg} \alpha + c_{12}}{c_{21} \operatorname{tg} \alpha + c_{22}},$$

c_{ik} étant des valeurs numériques convenables. Si l'on considère, en particulier, les phases, α, $\overline{\alpha}$, dont les valeurs, prises dans un point $t_0 \in j$, sont $\alpha_0 = 0$, $\alpha_0' = 1$, $\alpha_0'' = 0$; $\overline{\alpha}_0 = n\pi$, $\overline{\alpha}_0'$, $\overline{\alpha}_0''$ (n étant un entier), on obtient

$$\operatorname{tg} \overline{\alpha} = \frac{\overline{\alpha}_0'^2 \operatorname{tg} \alpha}{-\frac{1}{2} \overline{\alpha}_0'' \operatorname{tg} \alpha + \overline{\alpha}_0'}. \tag{2}$$

L'intégrale de l'équation (q), y, qui s'annule pour une valeur t_0, peut être exprimée par la formule

$$y(t) = y'(t_0) \frac{\sin \alpha(t)}{\sqrt{\alpha'(t)}}, \tag{3}$$

---

[2]) On désigne par C_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) la classe des fonctions réelles possèdant dans l'intervalle correspondant une dérivée continue d'ordre k.

α étant la phase de l'équation (q) déterminée par les valeurs initiales $\alpha(t_0) = 0$, $\alpha'(t_0) = 1$, $\alpha''(t_0) = 0$.

Finalement, subsiste, dans l'intervalle j, pour toute phase α de l'équation (q), la relation

$$-\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t) = q(t), \tag{4}$$

$\{\alpha, t\}$ étant la dérivée schwarzienne de la fonction α au point t:

$$\{\alpha, t\} = \frac{1}{2}\frac{\alpha'''(t)}{\alpha'(t)} - \frac{3}{4}\frac{\alpha''^2(t)}{\alpha'^2(t)}.$$

La formule (4) peut être écrite dans la forme plus courte

$$-\{\operatorname{tg}\alpha, t\} = q(t), \tag{5}$$

4. *La fonction* $\int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{d\sigma}{y^2(\sigma)}$ *au voisinage d'un point singulier*. Considérons une intégrale y de l'équation (q) admettant un zéro c : $y(c) = 0$.

Désignons par j_{-1} ou bien j_0 un voisinage à gauche ou bien à droite du point c, voisinage, dans lequel la fonction y est constamment différente de zéro.

Choisissons, en premier lieu, un nombre $x_0 \in j_{-1}$. Nous nous proposons d'étudier le comportement de la fonction de t,

$$\int\limits_{x_0}^{t} \frac{d\sigma}{y^2(\sigma)},$$

pour des valeurs voisines de c et situées dans l'intervalle j_{-1}: $t \in j_{-1}$.

On a, évidemment, pour $\sigma \in j_{-1}$:

$$y(\sigma) = y'(c)(\sigma - c) + \frac{(\sigma - c)^2}{2} y''(\tau),$$

$\sigma < \tau < c$. Il en résulte

$$y^2(\sigma) = y'^2(c)(\sigma - c)^2 \left[1 + \frac{\sigma - c}{2} \cdot \frac{y''(\tau)}{y'(c)}\right]^2,$$

et, a fortiori,

$$\frac{1}{y^2(\sigma)} = \frac{1}{y'^2(c) \cdot (\sigma - c)^2} \cdot \frac{1}{\left[1 + \frac{\sigma - c}{2} \cdot \frac{y''(\tau)}{y'(c)}\right]^2}.$$

Or, subsiste, d'après la formule de Taylor, la relation

$$\frac{1}{\left[1+\frac{\sigma-c}{2}\cdot\frac{y''(\tau)}{y'(c)}\right]^2} = 1-(\sigma-c)\frac{y''(\tau)}{y'(c)}+\frac{(\sigma-c)^2}{4}\cdot\frac{y''^2(\tau)}{y'^2(c)}\cdot$$

$$\cdot\frac{3}{\left[1+\Theta\frac{\sigma-c}{2}\cdot\frac{y''(\tau)}{y'(c)}\right]^4},$$

$0<\Theta<1$.

Nous avons, par conséquent,

(6)

$$\frac{1}{y^2(\sigma)}=\frac{1}{y'^2(c)}\left[\frac{1}{(\sigma-c)^2}-\frac{q(\tau)}{y'(c)}\cdot\frac{\tau-c}{\sigma-c}\cdot\frac{y(\tau)-y(c)}{\tau-c}\right]+O(1),$$

le symbole O s'appliquant au voisinage à gauche du nombre c.

Définissons, dans l'intervalle j_{-1}, la fonction $g(\sigma)$ de la manière suivante:

$$g(\sigma)=\frac{y'^2(c)}{y^2(\sigma)}-\frac{1}{(\sigma-c)^2}. \tag{7}$$

Nous avons, évidemment, d'après (6),

$$g(\sigma)=-\frac{q(\tau)}{y'(c)}\cdot\frac{\tau-c}{\sigma-c}\cdot\frac{y(\tau)-y(c)}{\tau-c}+O(1). \tag{8}$$

Or, on voit d'abord, en tenant compte de la formule (7), que la fonction g est continue dans l'intervalle j_{-1}. La formule (8) montre, à son tour, que la fontion g est bornée dans cet intervalle j_{-1}. On en conclut que l'intégrale $\int_{x_0}^{c} g(\sigma)\,d\sigma$ a une valeur déterminée.

Cela étant, prolongeons la fonction g, àu sens de la formule (7), au d là du point c, pour les valeurs $\sigma\in j_0$.

Choisissons, en second lieu, un nombre arbitraire $x_1\in j_0$. On trouve par des raisonnements analogues aux précédents que l'intégrale $\int_{c}^{x_1} g(\sigma)\,d\sigma$ a une valeur déterminée.

On voit, en définitive, que pour tous les nombres $x_0\in j_{-1}$, $x_1\in j_0$ l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} g(\sigma)\,d\sigma=\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{y'^2(c)}{y^2(\sigma)}-\frac{1}{(\sigma-c)^2}\right]d\sigma \tag{9}$$

a une valeur déterminée.

Cela étant montré, passons à l'évaluation de l'intégrale en question. Soit $t \in (x_0, c)$ un nombre arbitraire. Nous avons, évidemment,

$$\int_{x_0}^{t} g(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma = \int_{x_0}^{t} \frac{y'^2(c)}{y^2(\sigma)}\, \mathrm{d}\sigma + \frac{1}{t-c} - \frac{1}{x_0 - c}.$$

Soit α la phase de l'équation (q) déterminée par les valeurs initiales: $\alpha(c) = 0$, $\alpha'(c) = 1$, $\alpha''(c) = 0$.

Subsiste alors, pour toutes les valeurs σ, une formule telle que (3) (t_0 étant naturellement remplacé par c) et l'on a

$$\int_{x_0}^{t} \frac{y'^2(c)}{y^2(\sigma)}\, \mathrm{d}\sigma = \int_{x_0}^{t} \frac{\alpha'(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma}{\sin^2 \alpha(\sigma)} = \int_{\alpha(x_0)}^{\alpha(t)} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sin^2 \sigma} = -\operatorname{cotg} \alpha(t) + \operatorname{cotg} \alpha(x_0).$$

Or, en appliquant le théorème de l'Hospital on obtient

$$\lim_{t \to c-} \left(-\operatorname{cotg} \alpha(t) + \frac{1}{t-c} \right) = 0.$$

On trouve, par conséquent, la formule

$$\int_{x_0}^{c} g(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma = \operatorname{cotg} \alpha(x_0) + \frac{1}{c - x_0} \tag{10}$$

et une autre, qui est parfaitement analogue,

$$\int_{c}^{x_1} g(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma = -\operatorname{cotg} \alpha(x_1) + \frac{1}{x_1 - c}. \tag{11}$$

Ces deux formules conduisent à la valeur cherchée de l'intégrale (9):

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{y'^2(c)}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{(\sigma - c)^2} \right] \mathrm{d}\sigma &= \operatorname{cotg} \alpha(x_0) - \operatorname{cotg} \alpha(x_1) + \\ &+ \frac{1}{c - x_0} + \frac{1}{x_1 - c}, \\ &(x_0 \in j_{-1},\ x_1 \in j_0). \end{aligned} \tag{12}$$

5. *Dispersions centrales de première espèce.* Supposons, à présent, que l'équation (q) est définie et oscillatoire dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$.

Dans ces conditions on définit dans l'intervalle j un système dénombrable de fonctions appelées *dispersions centrales de première espèce*,

$$\ldots, \varphi_{-2}, \varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots .$$

Ces fonctions sont définies de manière que, pour chaque nombre $t \in j$, la valeur $\varphi_n(t)$, $\varphi_{-n}(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est le n^{-me} nombre conjugué à t et situé à droite resp. à gauche de t. En d'autres termes, si l'on considère une intégrale de l'équation (q), y, s'annulant en t, alors la valeur $\varphi_n(t)$, $\varphi_{-n}(t)$ représente le n^{-me} zéro de cette intégrale y, qui est supérieur resp. inférieur à t. On appelle, en particulier, φ_1 la *dispersion fondamentale* de l'équation (q) et on écrit, pour simplifier, φ au lieu de φ_1. Quant à la fonction φ_0, on pose, pour chaque valeur $t \in j$: $\varphi_0(t) = t$.

Ces définitions étant rappelées, indiquons quelques propriétés des fonctions en question qui nous seront utiles dans la suite.

Soit φ_ν une dispersion centrale de première espèce quelconque $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Il est facile de voir que la fonction φ_ν admet la fonction inverse, φ_ν^{-1}, qui se confonde avec $\varphi_{-\nu}$. On a par conséquent, dans l'intervalle j, la relation $\varphi_{-\nu}(t) = \varphi_\nu^{-1}(t)$.

La fontion φ_ν se déduit de la dispersion fondamentale, φ, par des compositions successives appliquées à la fonction φ ou bien φ^{-1} suivant la formule

$$\varphi_\nu(t) = \varphi^{(\nu)}(t), \tag{13}$$

le symbole dans le second membre désignant la fonction $\overbrace{\varphi\varphi \ldots \varphi}^{\nu}(t)$ ou $\overbrace{\varphi^{-1}\varphi^{-1} \ldots \varphi^{-1}}^{-\nu}(t)$ ou enfin t, d'après le cas $\nu > 0$ ou $\nu < 0$ ou bien $\nu = 0$.

La fonction φ_ν possède dans l'intervalle j les propriétés suivantes:

$$\begin{gathered} 1.\ \varphi_\nu(t) > \varphi_{\nu-1}(t), \qquad 2.\ \varphi_\nu \in C_3, \qquad 3.\ \varphi_\nu'(t) > 0, \\ 4.\ \lim_{t \to -\infty} \varphi_\nu(t) = -\infty, \quad \lim_{t \to \infty} \varphi_\nu(t) = \infty. \end{gathered} \tag{14}$$

La dérivée $\varphi_\nu'(t)$, dans un point $t \in j$ quelconque, s'exprime par les valeurs d'une arbitraire intégrale de l'équation (q), y, ou bien par celles de sa dérivée, y', d'après la formule

$$\varphi_\nu'(t) = \begin{cases} \dfrac{y^2[\varphi_\nu(t)]}{y^2(t)} & \text{lorsque } y(t) \neq 0 \\[2ex] \dfrac{y'^2(t)}{y'^2[\varphi_\nu(t)]} & \text{lorsque } y(t) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Cette formule montre en même temps la manière de laquelle se trouvent liées l'une à l'autre les valeurs d'une intégrale de l'équation (q), y, et celles de sa dérivée, y', en deux points mutuellement conjugués, t, $\varphi_\nu(t)$.

Finalement, subsiste pour toute phase α de l'équation (q) la relation abelienne suivante:

$$\alpha(\varphi_\nu(t)) = \alpha(t) + \nu\pi \,.\, \operatorname{sgn} \alpha'. \tag{16}$$

IV. PROLONGEMENT DE LA SOLUTION $y(t) \,.\, \int_x^t \frac{d\sigma}{y^2(\sigma)}$.

6. Considérons une équation (q) qui est oscillatoire dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$.

Soit y une intégrale quelconque de l'équation (q) et $x \in j$ un nombre arbitraire, différent de chaque zéro de y.

Nous savons que la fonction

$$\bar{y}_0(t) = y(t) \,.\, \int_x^t \frac{d\sigma}{y^2(\sigma)}$$

représente, pour des valeurs t assez proches du nombre x, une solution de l'équation (q).

Il s'agit de prolonger la fonction $\bar{y}_0$ dans tout l'intervalle j et à l'aide des valeurs de l'intégrale y de manière que la nouvelle fonction, $\bar{y}$, satisfasse, dans cet intervalle j, à l'équation (q).

Désignons par

$$\ldots < c_{-2} < c_{-1} < c_0 < c_1 < c_2 < \ldots$$

les différents zéros de l'intégrale y, les notations étant choisies da façon que l'on ait $c_0 < x < c_1$.

Soit, pour $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, x_\nu = \varphi_\nu(x), j_\nu = (c_\nu, c_{\nu+1})$, de sorte qu'on a $x_\nu \in j_\nu$ $(x_0 = x)$.

Nous allons démontrer le

Théorème. *La fonction, $\bar{y}$, définie dans l'intervalle j par la formule*

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} y(t) \,.\, \displaystyle\int_{x_\nu}^t \frac{d\sigma}{y^2(\sigma)} & \text{lorsque } t \in j_\nu \\ -\dfrac{1}{y'(c_\nu)} & \text{lorsque } t = c_\nu, \end{cases} \tag{17}$$

représente dans l'intervalle j une intégrale de l'équation* (q), *intégrale qui est, évidemment, le prolongement de la solution $\bar{y}_0(t)$.

Démonstration. On voit d'abord que la partie de la fonction $\bar{y}$, qui est définie dans un intervalle j_ν quelconque, représente une solution de l'équation (q), à savoir la solution déterminée par les valeurs initiales

$$\bar{y}(x_\nu) = 0, \qquad \bar{y}'(x_\nu) = \frac{1}{y(x_\nu)}. \tag{18}$$

Une autre propriété de la fonction $\bar{y}$ consiste en la continuité dans l'intervalle j. On a, en effet, pour toute valeur c_ν, les relations

$$\lim_{t\to c_\nu -} \bar{y}(t) = -\frac{1}{y'(c_\nu)} = \lim_{t\to c_\nu +} \bar{y}(t).$$

On voit, en somme, que la fonction y est continue pour toutes les valeurs $t \in j$ et qu'elle représente dans chaque intervalle j_ν une solution de l'équation (q), solution déterminée par les valeurs initiales (18).

Or, soit Y l'intégrale de l'équation (q) déterminée par les valeurs initiales

$$Y(x_0) = 0, \qquad Y'(x_0) = \frac{1}{y(x_0)}.$$

On a, évidemment, pour chaque valeur x_ν

$$Y(x_\nu) = 0$$

et on trouve, en se servant de la formule (15),

$$Y'(x_\nu) = Y'[\varphi_\nu(x_0)] = (-1)^\nu \frac{Y'(x_0)}{\sqrt{\varphi_\nu'(x_0)}} = \frac{1}{(-1)^\nu y(x_0)\sqrt{\varphi_\nu'(x_0)}} =$$
$$= \frac{1}{y[\varphi_\nu(x_0)]} = \frac{1}{y(x_\nu)}.$$

On voit, par conséquent, que l'intégrale Y et sa dérivée Y' prennent pour x_ν les mêmes valeurs que les fonctions $\bar{y}, \bar{y}'$. Il en résulte la coïncidence de fontions $Y, \bar{y}$ dans chaque intervalle j_ν. Subsiste par conséquent, dans l'intervalle j, sauf peut-être pour les valeurs c_ν, l'égalité $\bar{y}(t) = Y(t)$. Or, les fonctions $\bar{y}$, Y étant continues dans l'intervalle j, l'égalité en question est valable pour toute valeur $t \in j$. Cela achève la démonstration.

Voici une remarque au sujet des phases des intégrales $\bar{y}$, y en question.

Les intégrales $\bar{y}$, y de l'équation (q) sont mutuellement indépendantes, la wronskienne $\bar{y}y' - \bar{y}'y$ étant égale à -1.

Toute phase, α, des intégrales $\bar{y}$, y vérifie dans l'intervalle j, à l'exception des valeurs c_ν, la formule

$$\mathrm{tg}.\alpha(t) = \int_{(x)}^{t} \frac{d\sigma}{y^2(\sigma)}; \tag{19}$$

ici le symbole (x) indique le nombre x_ν lorsqu'on prend t dans l'intervalle j_ν $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

En particulier la phase, α_0, qui s'annule au point x_0 est donnée par la formule

$$\alpha_0(t) = \mathrm{Arc\,tg} \int_{(x)}^{t} \frac{d\sigma}{y^2(\sigma)}, \quad \alpha_0(c_\nu) = (2\nu - 1)\frac{\pi}{2},$$

Arc tg désignant, pour $t \in j_\nu$, cette branche de la fonction en question qui prend pour $t = x_\nu$ la valeur $\nu\pi$. Les valeurs initiales de la phase α_0 pour $t = x_0$ sont, évidemment,

$$\alpha_0(x_0) = 0, \qquad \alpha_0'(x_0) = \frac{1}{y^2(x_0)}, \qquad \alpha_0''(x_0) = -2\frac{y'(x_0)}{y^3(x_0)}.$$

En appliquant les formules (5), (19) on trouve

$$q(t) = -\left\{\int_{(x)}^{t} \frac{d\sigma}{y^2(\sigma)}, t\right\}. \tag{20}$$

V. ÉTUDE DES ÉQUATIONS (q) QUI ONT LA MÊME DISPERSION FONDAMENTALE

7. *Bandes intégrales.* L'objet de nos considérations dans cette section font encore les équations (q) définies et oscillatoires dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$.

Toute équation (q) possède, nous le savons, une dispersion fondamentale, φ $(=\varphi_1)$ qui est définie dans l'intervalle j et jouit des propriétés (14) énoncées plus haut $(\nu = 1)$. D'après un résultat dû à M. E. Barvínek ([3]) on sait que, inversement, toute fonction, φ, définie dans l'intervalle j et jouissant des propriétés en question, représente la dispersion fondamentale de convenables équations (q).

Cela étant, soit φ une fonction quelconque dans l'intervalle j qui jouit des propriétés (14) $(\nu = 1)$.

Désignons par $Q\varphi$ ou encore, plus brièvement par Q, l'ensemble formé des fonctions q qui sont les coefficients des équations (q) avec la même dispersion fondamentale φ. Pour désigner l'ensemble de ces équations (q) nous employons le symbole $(Q\varphi)$ ou bien (Q). Rappelons qu'on a toujours, indépendamment du choix de la fonction φ, card $Q = \aleph$ ([2]). En se servant de la formule (13) on voit que toutes les équations (q), éléments de l'ensemble (Q), ont la même dispersion centrale φ quel que soit l'indice $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Désignons par J_φ, ou encore par J, l'ensemble formé de toutes les intégrales des équations (q) qui sont les éléments de (Q). Comme ces équations (q) ont les mêmes dispersions centrales φ_ν, quel que soit l'indice ν, l'ensemble J consiste en fonctions qui ont les mêmes zéros. Cela veut dire que, deux arbitraires intégrales $y, \bar{y} \in J$ qui possèdent un zéro en commun ont tous les zéros en commun.

Soit c un nombre arbitraire. Nous appelons la *bande intégrale au noeud c* de l'ensemble (Q), plus brièvement: la *bande* (c), le sousensemble de J formé de tous les éléments de J qui s'annulent pour la valeur c. Notation: Bc. On voit que toutes les fonctions-éléments de Bc ont les mêmes zéros. Nous appelons ces zéros *noeuds* de la bande (c). On voit que, c' étant un noeud quelconque de la bande (c), on a Bc' = Bc.

8. *Propriétés des bandes intégrales.* Nous allons maintenant indiquer quelques propriétés des bandes intégrales. Soit c un nombre quelconque.

Nous allons d'abord montrer *qu'on a pour toute intégrale* $y \in$ Bc *les formules*

$$\int_x^{\varphi(x)} \left[\frac{y'^2(c)}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{(\sigma - c)^2}\right] \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{c - x} + \frac{1}{\varphi(x) - c},$$

(21)

$$\int_c^{\varphi(c)} \left[\frac{y'^2(c)}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{(\sigma - c)^2} - \frac{1}{(\sigma - \varphi(c))^2}\right] \mathrm{d}\sigma = \frac{1 + \varphi'(c)}{\varphi(c) - c} - \frac{1}{2}\,\frac{\varphi''(c)}{\varphi'(c)},$$

x étant un nombre arbitraire tel que $x < c < \varphi(x)$.

D'abord, la première formule (21) est une conséquence immédiate des formules (12), (16), pour $x_0 = x$, $x_1 = \varphi(x)$, $\nu = 1$.

Passons alors à la démonstration de l'autre.

Dans ce but choisissons un nombre t tel que $c < t < \varphi(c)$ et appliquons les formules (11), (10) aux intervalles $[c, t]$, $[t, \varphi(c)]$.

Nous obtenons

$$
(22)\qquad
\begin{aligned}
&\int_c^t \left[\frac{y'^2(c)}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{(\sigma - c)^2}\right] d\sigma = -\operatorname{cotg} \alpha_0(t) + \frac{1}{t - c},\\
&\int_t^{\varphi(c)} \left[\frac{y'^2\varphi(c)}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{(\sigma - \varphi(c))^2}\right] d\sigma = \operatorname{cotg} \alpha_1(t) - \frac{1}{t - \varphi(c)},
\end{aligned}
$$

α_0 et α_1 étant les phases de l'équation (q) dont y est une intégrale, phases déterminées par les valeurs initiales suivantes:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_0(c) = 0, \qquad \alpha_0'(c) = 1, \qquad \alpha_0''(c) = 0;\\
&\alpha_1\varphi(c) = 0, \qquad \alpha_1'\varphi(c) = 1, \qquad \alpha_1''\varphi(c) = 0.
\end{aligned}
$$

En se servant de la formule (16) on voit que les fonctions α_1, α_1', α_1'' prennent au point c les valeurs suivantes:

$$
\alpha_1(c) = -\pi, \qquad \alpha_1'(c) = \varphi'(c), \qquad \alpha_1''(c) = \varphi''(c).
$$

Subsiste, par conséquent, en vertu de (2), la relation:

$$
(23)\qquad -\operatorname{cotg} \alpha_0(t) + \varphi'(c) \,.\, \operatorname{cotg} \alpha_1(t) = -\frac{1}{2}\frac{\varphi''(c)}{\varphi'(c)}.
$$

Or, les formules (22) peuvent s'écrire de la façon suivante

$$
\begin{aligned}
\int_c^t \left[\frac{y'^2(c)}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{(\sigma - c)^2} - \varphi'(c)\frac{1}{(\sigma - \varphi(c))^2}\right] d\sigma = -\operatorname{cotg} \alpha_0(t) +\\
+ \frac{1}{t - c} + \varphi'(c)\left[\frac{1}{t - \varphi(c)} - \frac{1}{c - \varphi(c)}\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_t^{\varphi(c)} \left[\frac{y'^2(c)}{y'(\sigma)} - \varphi'(c)\frac{1}{(\sigma - \varphi)c))^2} - \frac{1}{(\sigma - c)^2}\right] d\sigma =\\
&= \varphi'(c)\left[\operatorname{cotg} \alpha_1(t) - \frac{1}{t - \varphi(c)}\right] + \frac{1}{\varphi(c) - c} - \frac{1}{t - c}
\end{aligned}
$$

et l'on obtient, en faisant leur somme,

$$
\begin{aligned}
&\int_c^{\varphi(c)} \frac{y'^2(c)}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{(\sigma - c)^2} - \varphi'(c)\frac{1}{(\sigma - \varphi(c))^2}\Bigg] d\sigma =\\
&= -\operatorname{cotg} \alpha_0(t) + \varphi'(c) \,.\, \operatorname{cotg} \alpha_1(t) + \frac{1 + \varphi'(c)}{\varphi(c) - c}.
\end{aligned}
$$

Cette relation conduit, à son tour, d'après (23), à la seconde formule (21).

Les formules (21) mettent en évidence le phénomène suivant:

Les intégrales définies figurant dans les premiers membres ne dépendent point du choix particulier de l'intégrale y que l'on prend parmi les éléments de la bande (c). En d'autres termes, *les intégrales définies en question restent invariantes par rapport aux éléments de la bande (c).*

Cela étant, passons à une autre propriété de la bande (c) consistant en ceci que, *pour deux éléments quelconques de la bande (c), y, $\bar{y}$, le rapport des dérivées $y' : \bar{y}'$ a pour tous les noeuds de la bande (c) la même valeur ($=k$)*

En effet, soit c' un noeud arbitraire de la bande (c). On a, par conséquent, $c' = \varphi_\nu(c)$, ν étant un indice convenable.

En appliquant la formule (15) on trouve

$$(-1)^\nu \frac{y'(c)}{y'(c')} = \sqrt{\varphi_\nu'(c)} = (-1)^\nu \frac{\bar{y}'(c)}{\bar{y}'(c')},$$

ce qui démonstre la proposition.

Ce résultat permet de démontrer la proposition suivante:

Subsiste pour deux éléments quelconques de la bande (c), y, $\bar{y}$, la formule

$$\int_t^{\varphi(t)} \left[\frac{y'^2(c)}{y^2(\sigma)} - \frac{\bar{y}'^2(c)}{\bar{y}^2(\sigma)} \right] d\sigma = 0, \tag{24}$$

valable pour toutes les valeurs $t \in j$.

En effet, la formule (24) est vraie, d'après (21), pour toute valeur ($t=$) $x \in j$ telle que $x \leqq c < \varphi(x)$. Soit alors $t \in j$ un nombre arbitraire. Il existe, évidemment, précisément un noeud c' de la bande (c) vérifiant la relation $t \leqq c' < \varphi(t)$. Subsiste, par conséquent, une formule telle que (24), c étant remplacé par c'. Or, d'après le résultat précédent on a $y'^2(c') = \lambda y'^2(c)$, $\bar{y}'^2(c') = \lambda \bar{y}'^2(c)$, λ (> 0) étant un facteur numérique convenable. Cela achève la démonstration.

9. Nous allons maintenant examiner jusqu'à quel point les propriétés que nous venons de trouver caractérisent les bandes intégrales en question.

Considérons deux équations (q), ($\bar{\text{q}}$), définies et oscillatoires dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$ et désignons par φ, $\bar{\varphi}$ leurs dispersions fondamentales.

Supposons que ces équations admettent des intégrales, y, $\bar{y}$, qui ont les mêmes zéros et jouissent de la propriété que le rapport des dérivées $y' : \bar{y}'$ ($=k$) est le même pour tout zéro x de ces intégrales.

Supposons de plus qu'il subsiste, pour toutes les valeurs t différentes de x, au moins une des relations suivantes:

$$(25)\quad \int_t^{\varphi(t)} \left[\frac{k}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{k}\,\frac{1}{\bar{y}^2(\sigma)}\right] d\sigma = 0, \quad \int_t^{\bar{\varphi}(t)} \left[\frac{k}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{k}\,\frac{1}{\bar{y}^2(\sigma)}\right] d\sigma = 0.$$

Nous allons montrer que, *dans ces conditions les dispersions fondamentales φ, $\bar{\varphi}$ coïncident et, par conséquent, les intégrales y, $\bar{y}$ sont des éléments de la bande (x) correspondante.*

En effet, supposons par example la validité de la première relation (25).

Soit $t \in j$ un nombre arbitraire.

Si t est un zéro (commun) des intégrales $y, \bar{y}$ on a, d'après la définition même des fonctions φ, $\bar{\varphi}$: $\varphi(t) = \bar{\varphi}(t)$. Soit alors $y(t) \neq 0 \neq \bar{y}(t)$. Considérons les trois zéros consécutifs des intégrales y, $\bar{y}$, zéros c_{-1}, c, c_1, déterminés par la formule $c_{-1} < t < c < c_1$. Ces inégalités entraînent, évidemment, que les valeurs $\varphi(t)$, $\bar{\varphi}(t)$ sont comprises entre c et c_1.

Or, on a, d'après (25),

$$\int_t^{\varphi(t)} \left[\frac{y'^2(c)}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{(\sigma - c)^2}\right] d\sigma = \int_t^{\varphi(t)} \left[\frac{\bar{y}'^2(c)}{\bar{y}^2(\sigma)} - \frac{1}{(\sigma - c)^2}\right] d\sigma.$$

Il en résulte, d'après (12), (16) $\operatorname{cotg} \bar{\alpha}\varphi(\mathrm{t}) = \operatorname{cotg} \bar{\alpha}(\mathrm{t})$, $\bar{\alpha}$ étant la phase de l'équation $(\bar{\mathrm{q}})$ déterminée par les valeurs initiales: $\bar{\alpha}(c) = 0$, $\bar{\alpha}'(c) = 1$, $\bar{\alpha}''(c) = 0$. Subsiste, par conséquent, la relation $\bar{\alpha}\varphi(t) = \bar{\alpha}(t) + m\pi$ entraînant un nombre entier m. Comme $\varphi(t)$ est compris entre c et c_1 on a $m = 1$, de sorte que la relation en question s'écrit: $\bar{\alpha}\varphi(t) = \bar{\alpha}(t) + \pi$. En comparant cette formule avec la relation abelienne $\bar{\alpha}\bar{\varphi}(t) = \bar{\alpha}(t) + \pi$ on obtient $\bar{\varphi}(t) = \varphi(t)$, ce qui était à démontrer.

10. *Comportement des rapports de deux éléments d'une bande intégrale.* Considérons une bande intégrale de l'ensemble $(Q\varphi)$, Bc.

Soient y, $\bar{y} \in$ Bc d'arbitraires éléments de la bande Bc.

Désignons par w la »wronskienne« du couple ordonné y, $\bar{y}$ d'éléments en question,

$$(26)\qquad w = y\bar{y}' - y'\bar{y}.$$

On voit facilement que la fontion w admet dans l'intervalle j la dérivée

$$(27)\qquad w' = (\bar{q} - q)\, y\bar{y}.$$

Les fonctions w, w' s'annulent, évidemment, pour tout noeud

$c_\nu(= \varphi_\nu(c))$ de la bande (c) ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; c_0 = c$) de sorte qu'on a

$$w(c_\nu) = 0, \qquad w'(c_\nu) = 0.$$

En appliquant les formules (15), (27) on trouve pour toutes les valeurs $t \in j$:

$$\begin{aligned} w\varphi_\nu &= w, \\ (\bar{q}\varphi_\nu - q\varphi_\nu)\, \varphi_\nu'^2 &= \bar{q} - q. \end{aligned} \tag{28}$$

Cela étant, considérons la fonction, p, définie dans l'intervalle j de la manière suivante:

$$p(t) = \begin{cases} \dfrac{\bar{y}(t)}{y(t)} \text{ pour } t \neq c_\nu;\ \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \\[2ex] \dfrac{\bar{y}'(c)}{y'(c)} \text{ pour } t = c_\nu. \end{cases} \tag{29}$$

Nous allons indiquer quelques propriétés de la fonction p, qui nous seront utiles dans la suite.

On voit d'abord en vertu de la formule (15) qu'il subsiste, pour toutes les valeurs $t \in j$, la relation

$$p\varphi_\nu(t) = p(t). \tag{30}$$

On constate aussi facilement que la fonction p est toujours positive ou bien négative suivant le cas $\bar{y}'(c) : y'(c) > 0$ ou bien < 0. En effet, soit par example $\bar{y}'(c) : y'(c) > 0$. Les deux fonctions $y, \bar{y}$ sont alors dans l'intervalle $(c, \varphi(c))$ simultanément positives ou bien négatives et, par conséquent, la fonction p résulte positive. On a donc $p(t) > 0$ pour $t \in [c, \varphi(c)]$ et on voit, en tenant compte de (30), que cette inégalité subsiste dans tout l'intervalle j.

La fonction p est partout continue puisqu'elle jouit de cette propriété, évidemment, pour chaque nombre $t \neq c_\nu$ en possèdant pour $t = c_\nu$ la vraie valeur $p(c_\nu)$ $(= p(c))$.

Plus précisément, la fonction p appartient à la classe C_2. En effet, elle est, manifestement, deux fois continûment différentiable pour toute valeur $t \neq c_\nu$, les dérivées p', p'' étant

$$p' = \frac{w}{y^2}, \tag{31}$$

$$p'' = (\bar{q} - q)\, p - 2\,\frac{y'}{y}\, p' \tag{32}$$

En appliquant la règle de l'Hospital on trouve que les fonctions p', p''

tendent pour $t \to c_\nu$ vers les limites

$$\lim_{t \to c_\nu} p'(t) = 0, \qquad \lim_{t \to c_\nu} p''(t) = \frac{1}{3}\,[\overline{q}(c_\nu) - q(c_\nu)]\, p(c_\nu).$$

Il en résulte que les fonctions p, p' admettent les dérivées $p'(c_\nu)$, $p''(c_\nu)$ qui sont égales, nécéssairement, aux deux limites en question. Cela démontre la proposition.

D'après (24) on a dans l'intervalle j la relation

$$\int_t^{\varphi(t)} \left(\frac{1}{p^2(\sigma)} - \frac{1}{p^2(c)}\right) \frac{d\sigma}{y^2(\sigma)} = 0.$$

Remarquons enfin que la fonction définie dans l'intervalle j par l'expression figurant sous le signe $\int$ et dont la valeur pour chaque point c_ν est égale à la limite

$$\lim_{t \to c_\nu} \left(\frac{1}{p^2(\sigma)} - \frac{1}{p^2(c)}\right) \frac{1}{y^2(\sigma)} = -\frac{p''(c_\nu)}{p^3(c_\nu)\, y'^2(c_\nu)}, \tag{33}$$

est continue dans l'intervalle j.

En résumé, la fonction p jouit, en particulier, des propriétés suivantes:

(34)
$$1^\circ\ p \neq 0 \text{ pour } t \in j, \qquad 2^\circ\ p\varphi(t) = p(t) \text{ pour } t \in j,$$
$$3^\circ\ p \in C_2, \qquad 4^\circ\ p'(c) = 0, \qquad 5^\circ \int_c^{\varphi(c)} \left(\frac{1}{p^2(\sigma)} - \frac{1}{p^2(c)}\right) \frac{d\sigma}{y^2(\sigma)} = 0.$$

11. *Relations mutuelles entre les éléments de l'ensemble $Q\varphi$.* Considérons à présent deux fonctions quelconques, q, $\overline{q}$, éléments de l'ensemble $Q\varphi$: $q, \overline{q} \in Q\varphi$. Les équations (q), ($\overline{\text{q}}$) ont, par conséquent, la même dispersion fondamentale φ.

Désignons, pour simplifier, $\Delta = \overline{q} - q$.

Soit $c \in j$ un nombre quelconque. Nous nous intéressons du numbre de zéros de la fonction Δ situés entre deux noeuds consécutifs de la bande (c). Nous n'excluons pas les cas où ce nombre serait infini.

D'abord, il résulte immédiatement de la seconde formule (28) que, *si la fonction Δ s'annule pour la valeur c elle s'annule en tous les noeuds de la bande* (c). En d'autres termes, *si les fonctions q, $\overline{q}$ coïncident au point c elles coincident alors en tous les noeuds de la bande* (c).

Montrons, en second lieu, que *le nombre de zéros de la fonction Δ entre deux noeuds consécutifs quelconques de la bande* (c) *est toujours* *le même*. En effet, soient c, $\varphi(c)$ et c', $\varphi(c')$ deux pairs de noeuds consécutifs de la bande (c) et supposons, par exemple, $c < c'$. On a alors $c' = \varphi_\nu(c)$, $\varphi(c') = \varphi_\nu\varphi(c)$, ν étant un indice positif convenable. Or, la fonction $\varphi_\nu(t)$ étant constamment croissante elle fait représenter biunivoquement l'intervalle $(c, \varphi(c))$ sur $(c', \varphi(c'))$. La seconde formule (28) montre à son tour que la représentation en question conserve les zéros de la fonction Δ situés dans les deux intervalles considérés. Il en résulte la proposition.

On voit, par conséquent, que *le nombre de points de coïncidence des fonctions q, $\bar{q}$, situés entre deux noeuds consécutifs de la bande (c) est toujours le même et ne dépend point du choix de ces noeuds.*

Cela étant, nous allons démontrer le

Théorème. *Le nombre de zéros de la fonction Δ situés entre deux noeuds consécutifs de la bande (c) est toujours égale au moins à 3 et, en plus, si la fonction Δ ne s'annule pas aux noeuds de la bande (c), il est supérieur à 3.*

Démonstration. Soient y, $\bar{y} \in \mathrm{B}c$ deux éléments quelconques de la bande (c) et p la fonction définie par la formule (29).

D'abord, les relations (34) $1°$, $5°$ montrent que la fonction p prend pour un nombre $x \in (c, \varphi(c))$ la valeur $p(c)$. Comme elle prend la même valeur $p(c)$ aux points c et $\varphi(c)$, sa dérivée, p', admet au moins deux zéros, x_1', x_2', compris entre c, x et x, $\varphi(c)$ respectivement. D'après (31) les nombres x_1', x_2' sont en même temps des zéros de la wronskienne correspondante w. Cette fonction w étant aussi nulle aux points c, $\varphi(c)$, sa dérivée, w', a au moins un zéro, x_1, compris entre c et x_1', puis un autre, x_2, compris entre x_1' et x_2' et encore un troisième, x_3, compris entre x_2' et $\varphi(c)$. D'après (27) ces nombres x_1, x_2, x_3 sont en même temps des zéros de la fonction Δ. La première partie de notre proposition se trouve ainsi démontrée.

Supposons, à présent, que la fonction Δ n'est pas nulle aux points c, $\varphi(c)$ et de plus, qu'elle admet entre ces points précisément les trois zéros x_1, x_2, x_3. On a alors les inégalités

$$c < x_1 < x_2 < x_3 < \varphi(c) < \varphi(x_1) < \varphi(x_2) < \varphi(x_3),$$

la fonction Δ étant différente de nulle entre deux termes consécutifs quelconques de cette suite. Or, si l'on considère la bande (x_1) on voit qu'il y a entre les deux noeuds consécutifs x_1, $\varphi(x_1)$ de Bx_1 précisément deux zéros x_2, x_3 de la fonction Δ, ce qui est absurde d'après la première partie de la proposition.

Le théorème est démontré.

Le résultat que nous venons d'obtenir montre que *les fonctions q, $\bar{q}$ coïncident entre deux noeuds consécutifs quelconques de la bande (c) au moins en trois points et, en plus, si elles n'ont pas les mêmes valeurs aux noeuds de la bande (c), la coïncidence a lieu au moins quatre fois.*

12. *Détermination de toutes les équations* (q) *avec la même dispersion fondamentale.* Soit (q) une équation définie et oscillatoire dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$ et soit φ sa dispersion fondamentale.

Choisissons un nombre arbitraire $c \in j$ et désignons par y un élément de la bande (c) de l'ensemble $(Q\varphi)$. Les différents zéros de l'intégrale y, les noeuds de la bande (c), sont alors $c_\nu = \varphi_\nu(c)$; $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Nous allons démontrer le

Théorème. *Toutes les équations* $(\bar{\mathrm{q}})$ *avec la même dispersion fondamentale* φ *sont données par la formule*

$$\bar{q} = q + \frac{p''}{p} + 2\frac{y'}{p}\cdot\frac{p'}{y}, \tag{35}$$

p étant une fonction arbitraire définie dans l'intervalle j et jouissant des propriétés telles que (34).

On définit dans la formule (35) la valeur du dernier terme au point c_ν par sa vraie valeur $2p''(c_\nu) : p(c)$.

Démonstration. a. Soit $(\bar{q})$ une équation quelconque dont la dispersion fondamentale est φ; on a par conséquent q, $\bar{q} \in Q\varphi$.

Soit $\bar{y}$ une intégrale de l'équation $(\bar{\mathrm{q}})$ appartenant à la bande intégrale Bc et soit p la fonction définie conformément à la formule (29). Cette fonction p jouit des propriétés (34) et vérifie la relation (32). Il en résulte la formule (35).

b. Soit à présent $\bar{q}$ la fonction définie dans l'intervalle j par la formule (35), p étant une fonction arbitraire jouissant des propriétés (34).

On s'assure d'abord par un calcul élémentaire que la fonction

$$\bar{y}(t) = p(t) \,.\, y(t)$$

représente l'intégrale de l'équation $(\bar{\mathrm{q}})$, déterminée par les valeurs initiales $\bar{y}(c) = 0$, $\bar{y}'(c) = p(c) \cdot y'(c)$. Les fonctions y, $\bar{y}$ ont, manifestement, les mêmes zéros $c_\nu = \varphi_\nu(c)$ $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ et nous voyons, en tenant compte de la relation $\bar{y}' = p'y + py'$, que le rapport $y' : \bar{y}'$ a la même valeur $1 : p(c)$ pour tous les zéros en question.

Or, désignons, pour abrégér, par $F(\sigma)$ la fonction définie dans l'intervalle j par l'expression figurant sous le signe $\int$ dans la formule (34) 5°, et dont la valeur pour chaque point c_ν est égale à la limite (33).

La fonction F est continue dans l'intervalle j et on voit facilement, en tenant compte de (34) 2°, (15) qu'elle vérifie pour toutes les valeurs t la relation

$$F[\varphi(t)]\ \varphi'(t) = F(t).$$

Il en résulte que la dérivée de l'intégrale définie de t à $\varphi(t)$ de la fonction F est nulle, de sorte que cette intégrale ne dépend pas de t.

On a, par conséquent, d'après (34) 5°,

$$\int_{t}^{\varphi(t)} F(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = \int_{c}^{\varphi(c)} F(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = 0,$$

d'où résulte la relation

$$\int_{t}^{\varphi(t)} \left(\frac{k}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{k}\,\frac{1}{\bar{y}^2(\sigma)}\right) \mathrm{d}\sigma = 0 \qquad (k = 1 : p(c))$$

Si l'on applique maintenant le résultat du No 9 on voit que les équations ($\bar{\mathrm{q}}$), (q) ont la même dispersion fondamentale φ.

Le théorème est démontré.

13. Nous allons terminer nos considérations par la remarque suivante.

On s'est occupé à plusieurs reprises des équations (q) qui jouissent de la propriété que deux zéros consécutifs de leurs intégrales ont toujours la même distance mutuelle, égale, par exemple, à π. Récemment M. F. Neumann ([4]) a indiqué une formule qui entraîne toutes les équations (q) ayant cette propriété.

Or, il est évident que les équations en question sont précisément celles, dont la dispersion fondamentale, φ, est $\varphi(t) = t + \pi$. Parmi ces équations figure, naturellement, l'équation (q) au coefficient $q(t) = -1$, dont l'intégrale, y, déterminée par les valeurs initiales $y(c) = 0$, $y'(c) = 1$ est la fonction $y(t) = \sin(t - c)$.

En appliquant le théorème précédent ($c = 0$) on trouve que, *toutes les équations* (q) *dont les intégrales ont leurs zéros consécutifs placés en distances égales, π, sont données par la formule*

$$\bar{q}(t) = -1 + \frac{p''(t)}{p(t)} + 2\,\frac{p'(t)}{p(t)} \operatorname{cotg} t, \tag{36}$$

p étant une fonction arbitraire définie dans l'intervalle j et jouissant des propriétés suivantes:

$1°\ p \neq 0$ pour $t \in j$, $\quad 2°\ p(t + \pi) = p(t)$ pour $t \in j$, $\quad 3°\ p \in C_2$,

$$4°\ p'(0) = 0, \qquad 5° \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{p^2(\sigma)} - \frac{1}{p^2(0)}\right) \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sin^2\sigma} = 0.$$

Si l'on pose $p(t) = p(0)\,.\exp f(t)$, la formule (36) donne

$$\bar{q}(t) = -1 + f''(t) + f'^2(t) + 2f'(t)\,.\operatorname{cotg} t,$$

f étant une fonction arbitraire définie dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$ et jouissant des propriétés suivantes:

$$f(t + \pi) = f(t) \text{ pour } t \in j; \qquad f \in C_2, \qquad f(0) = f'(0) = 0,$$

$$\int_0^\pi \frac{\exp(-2f(\sigma)) - 1}{\sin^2 \sigma} \, d\sigma = 0.$$

C'est précisément le résultat de M. F. Neuman.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Borůvka O., *Transformation of Ordinary Second-Order Linear Differential Equations*. Differential Equations and Their Applications. Proceedings of the Conference held in Prague in September 1962. Prague (1963), 27—38.

[2] Borůvka O., *Sur l'ensemble des équations différentielles linéaires ordinaires du deuxième ordre qui ont la même dispersion fondamentale*. Buletinul Institutului Politehnic din Iași, T. IX (XIII), 1963, 11—20.

[3] Barvínek E., *O rozložení nulových bodů řešení lineární diferenciální rovnice $y'' = Q(t)\, y$ a jejich derivací*. Acta Fac. Nat. Univ. Commenian. V, 8—10 Mat. (1961), 465—474.

[4] Neuman F., *Sur les équations différentielles linéaires oscillatoires du deuxième ordre avec la même dispersion fondamentale $\varphi(t) = t + \pi$*. Buletinul Institutulni Politehnic din Iași, T. X (XIV), 1964, 37—42.