Moïse Sibony

Sur une méthode itérative de résolution de problèmes aux limites elliptiques non linéaires

Aplikace matematiky, Vol. 22 (1977), No. 4, 291–300

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103704

SUR UNE METHODE ITERATIVE DE RESOLUTION DE PROBLEMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES NON LINEAIRES

MOÏSE SIBONY

(Reçu le 30 juin 1976)

INTRODUCTION

Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $(,)$ et de la norme $\| \|$. On se donne un opérateur A non nécessairement linéaire de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}'$ (dual de $\mathscr{H}$). On se propose de trouver $u \in \mathscr{H}$ solution de l'équation

$$(1) \qquad Au = f \quad \text{pour} \quad f \quad \text{donné dans} \quad \mathscr{H}'$$

Nous assurons l'existence et l'unicité de la solution u de (1) comme dans H. Brezis et M. Sibony [2] où nous approchons la solution u par la suite (u_n) donnée à l'aide de la méthode itérative:

$$(2) \qquad u_{n+1} = u_n - \varrho\, S^{-1}(Au_n - f)\,; \quad u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$$

où ϱ est un paramètre ne dépendant que de l'opérateur A at S est un opérateur linéaire continu introduisant une nouvelle norme $[\,]$ sur $\mathscr{H}$ plus contractante que $\| \|$ et dont l'inverse est calculé à l'aide d'une méthode itérative (du type (2) par exemple).

Ici nous introduisons la méthode itérative

$$(3) \qquad u_{n+1} = u_n - \varrho\, B^{-1}(Au_n - f)\,; \quad u_n \to u$$

où l'opérateur B est fonction de S de telle sorte que l'inversion de B soit immédiate numériquement. Ceci permet d'obtenir certaines performances sur le plan numérique ainsi que de nombreux avantages en particulier dans la résolution de systèmes d'équations et inéquations non linéaires.

Le plan est suivant:

1 — Etude générale d'un schéma itératif

2 — Application à la résolution numérique d'un problème aux limites non linéaires

3 — Résultats numériques

1 — ETUDE GÉNÉRALE D'UN SCHÉMA ITÉRATIF

On se donne deux opérateurs S, $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{H}')$ vérifiant l'hypothèse

H. 1 i) $(Su, v) = (u, Sv)\ \forall u, v \in \mathscr{H}$

Il existe une constante $\sigma > 0$ tel que $(Su, u) \geqq \sigma \|u\|^2\ \forall u \in \mathscr{H}$

ii) $(Bu, v) = (u, Bv)\ \forall u,\ v \in \mathscr{H}$

Il existe deux constantes α, $\beta > 0$ telles que

$$\alpha(Bu, u) \leqq (Su, u) \leqq \beta(Bu, u)$$

Posons alors:

$$[u]_S^2 = (Su, u) \quad \text{et} \quad [u]_B^2 = (Bu, u)$$

Il résulte que $[\ ]_S$, $[\ ]_B$ et $\|\ \|$ sont trois normes équivalentes. On suppose que l'opérateur A vérifie

H. 2 i) $(Au - Av, u - v) \geqq k[u - v]_S^2$ avec $k > 0\ \forall u,\ v \in \mathscr{H}$

ii) Quelque soit $N > 0$, $\exists$ une constante $C(N)$ telle que $\forall u$, $v \in \mathscr{H}$ avec $[u]_S \leqq N$, $[v]_S \leqq N$ alors

$$(Au - Av, w) \leqq C(N)\,[u - v]_S\,[w]_S\ \forall\, w \in \mathscr{H}.$$

Nous avons alors le

Théorème 1.1. *On suppose* H. 1 *et* H. 2 *alors l'équation* (1.1) *admet une solution unique $u \in \mathscr{H}$ et la suite u_n définie par les itérations*

$$u_{n+1} = u_n - \varrho\, B^{-1}(Au_n - f) \tag{1.2}$$

converge fortement vers u pour $\varrho > 0$ et $u_0 \in \mathscr{H}$ convenablement choisis.

Démonstration. L'existence et l'unicité de $u \in \mathscr{H}$ solution de (1.1) résulte du théorème 1.1 de [7]. D'autre part l'itération (1.2) a un sens puisque B est bijectif. Or nous avons

$$u = u - \varrho\, B^{-1}(Au - f)\,. \tag{1.3}$$

En retranchant membre à membre (1·2) et (1·3):

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \varrho\, B^{-1}(Au_n - Au) \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{n+1} = u_{n+1} - u$$

ce qui donne successivement

$$\begin{aligned}[\varepsilon_{n+1}]_B^2 &= (B\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \\ &= (B\varepsilon_n - \varrho(Au_n - Au), \varepsilon_n - \varrho\, B^{-1}(Au_n - Au)) \\ &= (B\varepsilon_n, \varepsilon_n) - 2\varrho(Au_n - Au, \varepsilon_n) + \varrho^2(B^{-1}(Au_n - Au), Au_n - Au)\,.\end{aligned}$$

En utilisant H. 2 i) on a:

$$[\varepsilon_{n+1}]_B^2 \leqq [\varepsilon_n]_B^2 - 2\varrho\, k[\varepsilon_n]_S^2 + \varrho^2(B^{-1}(Au_n - Au), Au_n - Au)\,. \tag{1.4}$$

Soit N_0 tel que $[u]_S \leqq N_0/2$. On fait l'hypothèse de récurrence $[u_n - u]_S = [\varepsilon_n]_S \leqq N_0/2$. Ceci entraîne que $[u_n]_S \leqq N_0$. D'après H. 2 ii) on a pour $C(N_0) = C$

$$(B^{-1}(Au_n - Au), Au_n - Au) \leqq C[\varepsilon_n]_S\,[B^{-1}(Au_n - Au)]_S\,.$$

Compte tenu de H. 1 ii) l'inégalité (1.4) s'écrit:

$$[\varepsilon_{n+1}]_B^2 \leqq [\varepsilon_n]_B^2 - 2\varrho k\,\alpha[\varepsilon_n]_B^2 + \varrho^2 C^2\,\beta^2[\varepsilon_n]_B^2$$

ce qui entraîne

$$[\varepsilon_{n+1}]_B^2 \leqq (1 - 2\varrho k\alpha + \varrho^2 C^2\beta)\,[\varepsilon_n]_B^2 = \theta_B[\varepsilon_n]_B^2\,.$$

On choisit ϱ tel que $\theta < 1$ et l'hypothèse de récurrence est vérifiée. Donc $\varepsilon_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

Remarque 1.1 En particulier la suite u_n converge vers u pour

$$u_0 = 0\,,\quad N_0 = \frac{2}{k}[f - A(0)]_S\,,\quad C = C(N_0)\quad \text{et}\quad \varrho_B = \frac{k_\alpha}{C^2\beta^2}$$

$$\text{ce qui donne } \theta_B = 1 - \frac{k^2\alpha^2}{C^2\beta^2} < 1.$$

Alors que pour un opérateur $B = S$ nous obtenons pour les mêmes constantes N_0 et $C = C(N_0)$ un paramètre $\varrho_S = k/C^2$ et un coefficient de contraction $\theta_S = 1 - k^2/C^2$.

Mais nous verrons que pour un choix convenable de B en fonction de S, les itérations (1.2) pourront s'effectuer sans l'inversion d'opérateurs à chaque itération (n). (cf. formule (2.3)).

Corollaire 1.1. *On suppose* H. 1 *et* H. 2 *alors*

1°) *Pour tout* $f \in \mathscr{H}'$, *il existe* $u \in X$ (X *étant un convexe fermé de* $\mathscr{H}$) *unique solution de l'inégalité*:

$$(Au, v - u) \geqq (f, v - u)\ \forall v \in X \tag{1.5}$$

2°) La suite (u_n) définie à l'aide des itérations

$$u_{n+1} = P_X^B(u_n - \varrho\,B^{-1}(Au_n - f)) \tag{1.6}$$

converge fortement dans $\mathscr{H}$ *vers* u *pour* $\varrho > 0$ *et* u_0 *convenablement choisis* (*cf. Remarque* 1.1), P_X^B *étant l'opérateur de projection sur* X *suivant la norme* $[\ ]_B$.

Démonstration 1°) L'existence et l'unicité résulte du théorème 1.1 de [7] cf. aussi [2], [3], [4] et [5].

2°) D'après le lemme 1.1 de [7] toute solution de (1.5) est solution de

(1.7) $$u = P_X^B(u - \varrho\, B^{-1}(Au - f)) \quad \varrho > 0$$

et réciproquement.

Posons $\varepsilon_{n+1} = u_{n+1} - u$. Par soustraction de (1.7) et (1.6) on a:

$$\varepsilon_{n+1} = P_X^B(u_n - \varrho\, B^{-1}(Au_n - f)) - P_X^B(u - \varrho\, B^{-1}(Au - f))$$

ce qui donne

$$[\varepsilon_{n+1}]_B^2 = [P_X^B(u_n - \varrho\, B^{-1}(Au_n - f)) - P_X^B(u - \varrho\, B^{-1}(Au - f))]_B^2$$

et

(1.8) $$[\varepsilon_{n+1}]_B^2 \leqq [\varepsilon_n - \varrho\, B^{-1}(Au_n - Au)]_B^2 .$$

On poursuit alors la démonstration comme dans le théorème 1.1. Une valeur possible pour le paramètre ϱ est donnée dans la remarque 1.1.

Remarque 1.2. Pour d'autres valeurs du paramètre ϱ, variable avec les itérations (n) cf. M. Sibony [7].

En outre on pourra remplacer les itérations (1·6) par

(1.9) $$u_{n+1} = P_X^{B_i}(u_n - \varrho_i\, B_i^{-1}(Au_n - f)) .$$

Soient P_X^B, P_X^S, P_X les opérateurs de projection correspondant aux normes $[\ ]_B$, $[\ ]_S$ et $\|\ \|$ respectivement. Supposons que les itérations (1.9) soient plus rapidement convergentes avec $B_i = B$ qu'avec $B_i = S$, lesquelles sont plus rapides qu'avec $B_i = Id$.

On procèdera alors comme suit:

1) Si l'opérateur P_X^B est numériquement accessible on utilise les itérations

(1.10) $$u_{n+1} = P_X^B(u_n - \varrho_B\, B^{-1}(Au_n - f)) .$$

Sinon on pose $f_n^B = u_n - \varrho_B\, B^{-1}(Au_n - f)$

Si $f_n^B \in X$ on a:

(1.11) $$u_{n+1} = f_n^B .$$

2) Si $f_n^B \notin X$ et si P_x^S est numériquement accessible on a les itérations

(1.12) $$u_{n+1} = P_X^S(u_n - \varrho_S\, S^{-1}(Au_n - f)) .$$

Si (1.12) sont inaccessibles on pose $f_n^S = u_n - \varrho_S\, S^{-1}(Au_n - f)$.

Si $f_n^S \in X$ on a:

(1.13) $$u_{n+1} = f_n^S .$$

3) Si $f_n^S \notin X$ alors les itérations

$$(1.14) \qquad u_{n+1} = P_X(u_n - \varrho_I(Au)_n - f))$$

sont toujours numériquement accessibles.

On montre facilement que la suite (u_n) ainsi construite converge fortement vers u solution de (1.5) quand $n \to \infty$.

2 — APPLICATION A LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE D'UN PROBLÈME AUX LIMITES NON LINÉAIRE

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ suffisamment régulière. On cherche $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solution de l'équation

$$(2.1) \qquad Au = -\sum_{i=1}^{n} D_i(|D_i u|^{p-2} D_i u) - \lambda \Delta u = f \quad \lambda > 0\,, \quad p \geqq 2$$

pour f donné dans $W^{-1,q}(\Omega)$ (dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$) avec $1/p + 1/q = 1$, $D_i = \partial/\partial x_i$).

On sait (cf [6]) que ce problème admet solution unique. Comme dans [6] on se donne un paramètre $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}_+^n$ $h \neq 0$ de discrétisation destiné à tendre vers 0. Soit V_h un espace de dimension finie associé au paramètre h. Nous cherchons alors $u_h \in V_h$ solution de l'équation (cf [6]):

$$(2.2) \qquad A_h u_h = -\sum_{i=1}^{n} \nabla_i(|\nabla_i u_h|^{p-2} \nabla_i u_h) - \lambda \sum_{i=1}^{n} \nabla_i^2 u_h = f_h$$

où f_h est un discrétisé de f et $\nabla_i u_h$ défini par

$$\nabla_1 u_h(x) = \frac{u_h(x + \frac{1}{2}h) - u_h(x - \frac{1}{2}h_i)}{h_i}$$

et $\nabla_i^2 u_h = \nabla_i(\nabla_i u_h)$.

On sait (cf [6]) que le problème (2.2) admet une solution unique u_h qui converge vers u solution de (2.1) quand $h \to 0$.

On se propose maintenant de résoudre l'équation (2.2) à l'aide des itérations (1.2). Plus précisément nous avons la

Proposition 2.1. *La suite (u_h^n) définie par les itérations:*

$$(2.3) \qquad u_h^{n+1} = u_h^n - \varrho(2\varrho_0 I - \varrho_0^2 S)(A_h u_h^n - f_h)\,, \quad (u_h^0 = 0)$$

converge vers u_h solution de (2.2) quand $n \to \infty$ pour ϱ_0 et ϱ convenables.

Auparavant nous démontrons le lemme suivant:

Lemme 2.1. *Soit $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ $\mathcal{H}$ étant un espace de Hilbert on suppose*

H. 3 i) $(Sw, w) \geqq \sigma\|w\|^2 \; \forall w \in \mathcal{H}$ *avec* $\sigma > 0$

ii) $(Sv, w) \leqq s\|u\| \; \|w\| \; \forall w, \; v \in \mathcal{H} \; s > 0$

Alors l'application $u \to (I - \varrho_0 S)\, u$ *est strictement contractante pour* $\varrho_0 = \sigma/s^2$ *et l'opérateur* $B = [I - (I - \varrho_0 S)^m]^{-1} S$ *est bien défini* (m *étant un entier positif ou nul*).

Démonstration. Posons $Tu = (I - \varrho_0 S)\, u$. Nous avons

$$\|Tu - Tv\|^2 = \|u - v\|^2 - 2\varrho_0(S(u - v), u - v) + \varrho_0^2\|S(u - v)\|^2 .$$

D'après H. 3 on tire:

$$\|Tu - Tv\|^2 \leqq (1 - 2\varrho_0\sigma + \varrho_0^2 s^2)\, \|u - v\|^2 = \left(1 - \frac{\sigma^2}{s^2}\right) \|u - v\|^2$$

pour $\varrho_0 = \sigma/s^2$.

Si T est strictement contractante alors T^m l'est et $(I - T^m)^{-1}$ existe. En effet posons:

$$(I - T^m)\, u = f .$$

On a

$$u = f + T^m u = T_1 u$$

$$T_1 u - T_1 v = T^m u - T^m v$$

$$\|T_1 u - T_1 v\| \leqq L\|u - v\| \quad \text{avec} \quad L < 1 , \quad L = \left(1 - \frac{\sigma^2}{s^2}\right)^{m/2} .$$

Donc l'inverse de $I - T^m$ existe et l'opérateur B est bien défini.

Démonstration de la proposition 2.1. Posons $S = -\sum_{i=1}^{n} \nabla_i^2$. Nous munissons alors l'espace V_h de la norme $\|u_h\| = \|u_h\|_{L^2}$, $u_h \in V_h$.

L'opérateur S définit alors une nouvelle norme

$[u]_S^2 = (Su, u) = \sum_{i=1}^{n} \|\nabla_i u\|^2$ équivalente à $\| \;\; \|$. Nous avons en effet:

$$s\|u\|^2 \geqq [u]^2 \geqq \sigma\|u\|^2$$

avec $s = \sum_{i=1}^{n} 4/h_i^2$ et σ est une constante dépendant de l'ouvert Ω et donnée par l'inégalité de Poincaré. Nous allons étudier maintenant les itérations

$$u_h^{n+1} = u_h^n - \varrho\, B^{-1}(A_h u_h^n - f_n) \tag{2.4}$$

avec $B = [I - (I - \varrho_0 S)^2]^{-1} S$ et $0 < \varrho_0 \leqq 2\sigma/s^2$

Calcul du paramètre ϱ. Nous avons cf [2]:

$$(A_h u_h - A_h v_h, u_h - v_h) \geqq \lambda [u_h - v_h]^2 .$$

Si $[u_h]_S \leqq N$, $[v_h]_S \leqq N$ on a

$$(A_h u_h - A_h v_h, w_h) \leqq C(N) [u_h - v_h]_S [w_h]_S \; \forall w_h \in V_h .$$

Avec

$$C(N) = (p - 1) \frac{N^{p-2}}{(h_1, \ldots, h_n)^{(p-2)/2}} + \lambda .$$

Calculons les constantes α et β telles que

$$\alpha [u]_B^2 \leqq [u]_S^2 \leqq \beta [u]_B^2 \quad \text{avec} \quad [u]_B^2 = (Bu, u) . \tag{2.5}$$

Posons $Bu = g$, ce qui donne successivement

$$u = (2\varrho_0 I - \varrho_0^2 S) g$$

$$[u]_S^2 = (Su, u) = 4\varrho_0^2 [g]_S^2 - 4\varrho_0^3 (S \;\;, Sg) + \varrho_0^4 (S^2 g, Sg)$$

ce qui donne

$$[u]_S^2 \geqq \alpha_0 \|g\|^2 \quad \text{avec} \quad \alpha_0 = 4\sigma\varrho_0^2 - 4s^2\varrho_0^3 + \sigma s^2 \varrho_0^4 .$$

Par ailleurs

$$[u]_B^2 = 2\varrho_0 \|g\|^2 - \varrho_0^2 [g]_S^2 \leqq \beta_0 \|g\|^2 \quad \text{avec} \quad \beta_0 = 2\varrho_0 - \sigma\varrho_0^2$$

ce qui donne

$$\alpha [u]_B^2 \leqq [u]_S^2 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\alpha_0}{\beta_0} = \frac{4\sigma\varrho_0^2 - 4s^2\varrho_0^3 + \sigma s^2 \varrho_0^4}{2\varrho_0 - \sigma\varrho_0^2} . \tag{2.6}$$

De même nous avons

$$[u]_B^2 \geqq \gamma_0 \|g\|^2 \quad \text{avec} \quad \gamma_0 = 2\varrho_0 - s\varrho_0^2$$

et

$$[u]_S^2 \leqq 4\varrho_0^2 [g]_S^2 \leqq \delta_0 \|g\|^2 \quad \text{avec} \quad \delta_0 = 4s\varrho_0^2$$

ce qui donne

$$[u]_S^2 \leqq \beta [u]_B^2 \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{\delta_0}{\gamma_0} = \frac{4s\varrho_0^2}{2\varrho_0 - s\varrho_0^2} . \tag{2.7}$$

Les itérations (2.4) convergent donc d'après le théorème 1.1 pour

$$\varrho = \frac{k}{C^2(N)} \cdot \frac{\alpha}{\beta^2} \quad \text{avec} \quad \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{(2 - s\varrho_0)}{16 s^2 \varrho_0 (2 - \varrho_0)} \cdot (4\sigma - 4s^2\varrho_0 + \sigma s^2 \varrho_0^2) . \tag{2.8}$$

Pour que α et β soient positifs, il est nécessaire que $0 \leqq \varrho_0 \leqq \sigma/s^2$. Cette valeur du paramètre ϱ_0 convient donc pour appliquer le lemme 2.1.

Remarque 2.1. En particulier la suite u_h^n définie par (2.4) converge quand $n \to \infty$ vers u_h solution de l'équations (2.2) pour $u_h^0 = 0, N_0 = 2/k[f_h - A_h(0)]_S$

$$C = C(N_0) \quad \text{et} \quad \varrho = \frac{k}{C^2(N_0)} \cdot \frac{\alpha}{\beta^2} \, .$$

De plus nous avons l'inégalité de contraction stricte:

(2.9) $$[u_h^{n+1} - u_h)_B^2 \leqq \theta_B[u_h^n - u_h]_B^2 \quad \text{avec}$$

(2.10) $$\theta_B = 1 - \frac{k^2\gamma}{C^2(N_0)} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \quad \alpha \text{ et } \beta \text{ donnés par (2.6), (2.7).}$$

Evidemment si on prend $\varrho_0 = \sigma/s^2$ on aura toujours un coefficient de contraction $\theta_B < 1$ et le paramètre ϱ convenable pour les itérations (2.4) donné par

(2.11) $$\varrho = \frac{k}{C^2(N)}\,\delta \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{\dfrac{\sigma^2}{s^2}\left(2 - \dfrac{\sigma}{s}\right)^2}{16\left(2 - \dfrac{\sigma^2}{s^2}\right)} \, .$$

Remarque 2.2. On peut aussi effectuer les itérations (2·3) avec un opérateur $B = [I - (I - \varrho_0 S)^m]^{-1}S$ en posant:

(2.12) $$u_h^{n+1} = u_h^n - \varrho B^{-1}(A_h u_h^n - f_n)\,, \quad (u_h^0 = 0 \quad \text{par exemple})$$

et ϱ convenablement choisi.

Si on fait $m = 1$ on a $B = S$ cas déjà étudié dans [2].

3 — RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Nous reprenons l'exemple (2.1) et les itérations (2.3) en posant $\Omega =]0,1[\times]0,1[$, $\lambda = 1$, $p = 3$ et $S = -\Delta_h = -\sum_{i=1}^{2} \nabla_i^2$. Le paramètre ϱ_0 figurant dans la formule (2.3) est estimé par la méthode de la Mire (Cf. M. Sibony [6]) dans l'inversion de $(-\Delta)$ à la valeur $\varrho_0 = 0{\cdot}255 \,.\, 10^{-2}$ pour les valeurs du paramètre $h = 1/10, 1/20, 1/30, 1/40$. On peut alors procéder comme suit:

1) On effectue les itérations (2.3) avec un paramètre $\varrho = \varrho_n$ variable avec les itérations, où

(3.1) $$\varrho_n = \frac{(A_h u_h^n - A_h u_h^{n-1}, u_h^n - u_h^{n-1})_h}{[B_h^{-1}(A_h u_h^n - A_h u_h^{n-1})]_h^2} \, .$$

Les itérations (2.3) s'écrivent alors:

(3.2) $$u_h^{n+1} = u_h^n - \varrho_n(2\varrho_0 I - \varrho_0^2 S_h)(A_h u_h^n - f_h) \quad \text{avec} \quad \varrho_0 = 0.25510^{-2}$$

et nous avons alors les résultats suivants:

Tableau n^0 1

h	n	$\|u_h^n - u\|_{L^2}$	$\left\|\dfrac{u_h^n - u}{u}\right\|_{L^2}$
1/10	108	$0{\cdot}552 \,.\, 10^{-7}$	$0{\cdot}132 \,.\, 10^{-5}$
1/20	2000	$0{\cdot}763 \,.\, 10^{-4}$	$0{\cdot}195 \,.\, 10^{-2}$
1/30	1995	$0{\cdot}114 \,.\, 10^{-4}$	$0{\cdot}293 \,.\, 10^{-3}$
1/40	3186	$0{\cdot}217 \,.\, 10^{-4}$	$0{\cdot}563 \,.\, 10^{-3}$

u étant la solution exacte du problème (1.1), connue à l'avance et f étant calculé analytiquement de sorte que $f = Au$.

Dans l'algorithme (3·2) nous arrêtons les itérations dès que la condition $\|A_h u_h^n - f\|_{L^2(\Omega)} \leqq 10^{-16}$ est satisfaite.

2) On effectue les itérations (2.3) avec un paramètre ϱ déterminé à l'aide de la méthode de la Mire, le paramètre ϱ_0 ayant été déterminé auparavant par la même méthode. Nous avons alors les résultats suivants:

Tableau n^0 2

h	n	$\|u_h^n - u\|_{L^2}$	$\left\|\dfrac{u_h^n - u}{u}\right\|_{L^2}$	$t^{(*)}$	ϱ_0	$\|Au^n - f\|$	λ
1/10	110	$0{\cdot}484 \,.\, 10^{-7}$	$0{\cdot}177 \,.\, 10^{-5}$	1·06 s	$0{\cdot}255 \,.\, 10^{-2}$	10^{-16}	1
1/20	3000	$0{\cdot}209 \,.\, 10^{-4}$	$0{\cdot}540 \,.\, 10^{-3}$	75·08 s	$0{\cdot}255 \,.\, 10^{-2}$	10^{-16}	1
1/20	500	$0{\cdot}122 \,.\, 10^{-4}$	$0{\cdot}234 \,.\, 10^{-3}$	44·63 s	$0{\cdot}150 \,.\, 10^{-2}$	10^{-6}	1
1/20	500	$0{\cdot}6410 \,.\, 10^{-5}$	$0{\cdot}126 \,.\, 10^{-3}$	47·11 s	$0{\cdot}150 \,.\, 10^{-2}$	10^{-10}	1/100

$^{(*)}$ = en secondes sur IBM 370—165.

On constate sur le tableau n° 2 la contrainte $\|Au^n - f\| \leqq 10^{-16}$ est réalisée pour $h = 1/20$ seulement après $n = 3000$ itérations et dans ce cas on diminue l'erreur $|u_h^n - u|_{L^2}$ de $0.209 \,.\, 10^{-4}$ à $0.122 \,.\, 10^{-4}$ par une augmentation de 2500 itérations.

Dans la dernière colonne du tableau nous avons traité le problème de la régularisation elliptique. En effet, nous savons que la solution du u_λ problème (2.1) converge fortement quand $\lambda \to 0$ vers $u \in w_0^{1,p}(\Omega)$ unique solution du problème

$$Bu = \sum_{i=1}^{n} D_i(|D_i u|^{p-2} D_i u) = f \tag{3.3}$$

Les itérations (3·2) donneront dans ce cas la suite $(u_{h,\lambda}^{n+1})_h$ et on a les convergences suivantes:

$$u_{h,\lambda}^n \xrightarrow[n\to\infty]{} u_{h,\lambda}, \quad p_h u_{h,\lambda} \xrightarrow[h\to 0]{} u_\lambda \xrightarrow[\lambda\to 0]{} u$$

CONCLUSION

Les itérations du type (1.2) et plus particulièrement du type (2·3) évitent l'inversion numérique d'un opérateur linéaire à chaque itération (n) comme dans [2], [6] et [7]. Il en résulte une grande rapidité de convergence dans les itérations (2.3). De plus, ce schéma permet la résolution numérique du problème de la régularisation elliptique, problème qui n'a jamais été réglé par les méthodes de gradian et approximations successives. Ces dernières supposent en effet un coefficient de contraction assez loin de l'unité, alors que dans notre méthode, ce coefficient estimé a priori, peut être voisin de l'unité, ce qui se produira toujours dans le cas de la régularisation d'un opérateur fortement non linéaire par une perturbation linéaire.

References

[1] *H. Brezis:* Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité· Annales Inst. Fourier, Tome XVIII, Fasc. 1, 1968, p. 115—175.

[2] *H. Brezis* et *M. Sibony:* Méthodes d'approximations et d'itérations pour les opérateurs monotones. Archive for Rational Mechanics and Analysis, t. 28, (1968), p. 59—82.

[3] *F. Browder:* Problèmes non linéaires. Université de Montréal, 1966.

[4] *F. Browder:* Existence theorems of non linear partial differential equations. Proc. Amer· Math. Soc., 1968, Summer Institue in Global Analysis.

[5] *J. L. Lions:* Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod Gauthier-Villars, 1969.

[6] *M. Sibony:* Sur l'approximation d'équations et inéquations aux dérivées partielles non linéaires de type monotone. J. of Math. Anal. and Appl. Vol. 34, n° 3, June 1971, p. 502—564.

[7] *M. Sibony:* Méthodes itératives sur les équations et inéquations aux dérivées partielles non linéaires de type monotone. Calcolo, Vol. 7, Fasc. 1—2, 1970, p. 65—183.

Souhrn

O JEDNÉ ITERAČNÍ METODĚ ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ELIPTICKÝCH OKRAJOVÝCH PROBLÉMŮ

MOÏSE SIBONY

Nechť A je operátor (nikoliv nutně lineární) z Hilbertova prostoru $\mathscr{H}$ do duálního prostoru $\mathscr{H}'$. Snažíme se aproximovat řešení $u \in \mathscr{H}$ rovnice $Au = f$ pro $f \in \mathscr{H}'$. Vyšetřujeme konvergenci následujícího iteračního schématu:

$$u_{n+1} = u_n - B^{-1}(Au_n - f)$$

kde B je funkce samoadjungovaného operátoru S zvoleného tak, aby inverse B byla numericky proveditelná; např. $B = [I - (I - \varrho_0 S)^m]^{-1} S$ s vhodně zvolenými konstantami ϱ_0 a m (m celé).

Výsledky aplikujeme na nelineární okrajový problém s uvedením numerických výsledků.

Adresse de l'auteur: Prof. *Moïse Sibony,* Université de Tours, Faculté des Sciences, Départment de Mathématiques, Parc de Grandmont, 37200 Tours, France.