

# Aplikace matematiky

---

Josef Matušů; Josef Novák  
Über ein Interpolationsproblem

*Aplikace matematiky*, Vol. 21 (1976), No. 2, 92–96

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103627>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1976

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## ÜBER EIN INTERPOLATIONSPROBLEM

JOSEF MATUŠŮ, JOSEF NOVÁK

(Eingegangen 1. Oktober 1973)

**0. Einleitung.** Bei der rechnergestützten Bearbeitung eines Strömungskanals, die für ein Industrieunternehmen durchgeführt wurde, musste folgendes Interpolationsproblem gelöst werden:

Im Raum  $\mathbf{R}^m$  ( $m > 1$ ) seien  $n \geq 2$  verschiedene Punkte  $P_i = x_j^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$ ) vorgegeben. In jedem von diesen Punkten sei ein Einheitsvektor  $\mathbf{v}_i = v_j^{(i)}$  gegeben. Wir versuchen Polynome der Variablen  $s \in \langle -1, 1 \rangle$

$$(1) \quad P_{x_j}^i(s) = \sum_{k=0}^K a_{j,k}^i s^k \quad (i = 1, \dots, n - 1)$$

derart zu bestimmen, dass

$$(2) \quad P_{x_j}^i(-1) = x_j^{(i)}, \quad P_{x_j}^i(1) = x_j^{(i+1)},$$

$$(3) \quad \frac{dP_{x_j}^i}{ds}(-1) = k_i v_j^{(i)}, \quad \frac{dP_{x_j}^i}{ds}(1) = m_i v_j^{(i+1)},$$

wobei  $k_i, m_i > 0$  gewisse Zahlen sind. Die Zahlen  $k_i, m_i$  sollen dabei so bestimmt werden, dass die resultierende Interpolationskurve der „graphischen Vorstellung“ des Konstrukteurs entspricht.

**1. Lösung des Problems.** Nach (2), (3) sind für jedes Polynom (1) insgesamt vier Bestimmungsbedingungen gegeben, durch die  $P_{x_j}^i$  eindeutig als Polynom vom Grade  $K = 3$  bestimmt ist:

$$(4) \quad P_{x_j}^i(s) = \sum_{k=0}^3 a_{j,k}^i s^k.$$

Die erste Ableitung von  $P_{x_j}^i$  ist

$$(5) \quad \frac{dP_{x_j}^i}{ds}(s) = \sum_{k=1}^3 k a_{j,k}^i s^{k-1}.$$

Werden in (4), (5) die Werte  $s = -1, 1$  eingesetzt, dann erhalten wir (bei Berücksichtigung von (2), (3)) folgendes lineare Gleichungssystem von vier Gleichungen für die vier unbekannt Koeffizienten  $a_{j,k}^i$  des Polynoms (4):

$$(6) \quad \begin{aligned} \sum_{k=0}^3 (-1)^k a_{j,k}^i &= x_j^{(i)}, \\ \sum_{k=1}^3 (-1)^{k-1} k a_{j,k}^i &= k_i v_j^{(i)}, \\ \sum_{k=0}^3 a_{j,k}^i &= x_j^{(i+1)}, \\ \sum_{k=1}^3 k a_{j,k}^i &= m_i v_j^{(i+1)}. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$(7) \quad \begin{aligned} \mathbf{a}_{ij} &= \|a_{j,0}^i, \dots, a_{j,3}^i\|, \\ \mathbf{T}_{ij} &= \|x_j^{(i)}, k_i v_j^{(i)}, x_j^{(i+1)}, m_i v_j^{(i+1)}\| = \\ &= \|x_j^{(i)}, v_j^{(i)}, x_j^{(i+1)}, v_j^{(i+1)}\| \circ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_i \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

ferner sei  $\mathbf{A}$  die Koeffizientenmatrix des Systems (6). Man zeigt ohne grosse Mühe, dass

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Die Lösung von (6) ist dann

$$\mathbf{a}_{ij}^t = \mathbf{A}^{-1} \circ \mathbf{T}_{ij}^t$$

(durch den Exponenten  $t$  wird die entsprechende transponierte Matrix bezeichnet), d.h.

$$(8) \quad 4\mathbf{a}_{ij}^t = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \circ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_i \end{vmatrix} \circ \begin{vmatrix} x_j^{(i)} \\ v_j^{(i)} \\ x_j^{(i+1)} \\ v_j^{(i+1)} \end{vmatrix}.$$

Die Zahlen  $k_i, m_i$  in (7), (8) wählen wir folgendermassen: Ist

$$(9) \quad \Delta_i = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} v_j^{(i)} & v_k^{(i)} \\ v_j^{(i+1)} & v_k^{(i+1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_j^{(i)} & v_k^{(i)} \\ v_j^{(i+1)} & v_k^{(i+1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

( $j, k = 1, \dots, m$  werden als Summationsindizes aufgefasst), dann setzen wir

$$(10) \quad k_i = \pm \frac{1}{2\Delta_i} \left[ \begin{vmatrix} x_j^{(i+1)} - x_j^{(i)} & x_k^{(i+1)} - x_k^{(i)} \\ v_j^{(i+1)} & v_k^{(i+1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_j^{(i)} & v_k^{(i)} \\ v_j^{(i+1)} & v_k^{(i+1)} \end{vmatrix} \right],$$

$$(11) \quad m_i = \pm \frac{1}{2\Delta_i} \left[ \begin{vmatrix} v_j^{(i)} & v_k^{(i)} \\ x_j^{(i+1)} - x_j^{(i)} & x_k^{(i+1)} - x_k^{(i)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_j^{(i)} & v_k^{(i)} \\ v_j^{(i+1)} & v_k^{(i+1)} \end{vmatrix} \right],$$

ist  $\Delta_i = 0$ , dann soll  $k_i = m_i = |P_i P_{i+1}|$  sein;  $|P_i P_{i+1}|$  bedeutet den Abstand der Punkte  $P_i, P_{i+1}$ .

**2. Spezialfälle.** Wir betrachten zuerst den Fall  $m = 2$ . Die Formeln (9), (10), (11) ergeben dann:

$$(12) \quad \Delta_i = \begin{vmatrix} v_1^{(i)} & v_2^{(i)} \\ v_1^{(i+1)} & v_2^{(i+1)} \end{vmatrix}^2,$$

$$(13) \quad k_i = \pm \begin{vmatrix} x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)} & x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)} \\ v_1^{(i+1)} & v_2^{(i+1)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} v_1^{(i)} & v_2^{(i)} \\ v_1^{(i+1)} & v_2^{(i+1)} \end{vmatrix},$$

$$(14) \quad m_i = \pm \begin{vmatrix} v_1^{(i)} & v_2^{(i)} \\ x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)} & x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} v_1^{(i)} & v_2^{(i)} \\ v_1^{(i+1)} & v_2^{(i+1)} \end{vmatrix}$$

(unter Voraussetzung, dass der Ausdruck (12) von Null verschieden ist). In diesem Fall kann leicht gezeigt werden, dass  $k_i = |P_i A_i|$ ,  $m_i = |P_{i+1} A_i|$  (siehe Abb. 1).

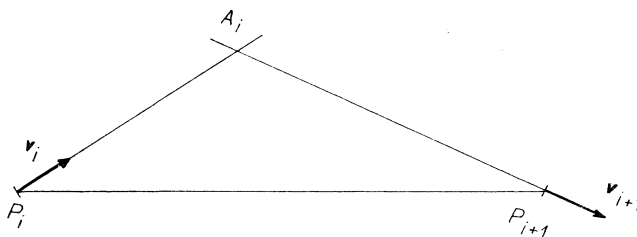


Abb. 1.

Sei nun  $m = 3$ . Die Formeln (9), (10), (11) ergeben dann:

$$(15) \quad \Delta_i = \begin{vmatrix} v_1^{(i)} & v_2^{(i)} \\ v_1^{(i+1)} & v_2^{(i+1)} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} v_1^{(i)} & v_3^{(i)} \\ v_1^{(i+1)} & v_3^{(i+1)} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} v_2^{(i)} & v_3^{(i)} \\ v_2^{(i+1)} & v_3^{(i+1)} \end{vmatrix}^2,$$

$$\begin{aligned}
 (16) \quad k_i = & \pm \frac{1}{A_i} \left[ \left| \begin{array}{cc} x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)} & x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)} \\ v_1^{(i+1)} & v_2^{(i+1)} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} v_1^{(i)} & v_2^{(i)} \\ v_1^{(i+1)} & v_2^{(i+1)} \end{array} \right| + \right. \\
 & + \left| \begin{array}{cc} x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)} & x_3^{(i+1)} - x_3^{(i)} \\ v_1^{(i+1)} & v_3^{(i+1)} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} v_1^{(i)} & v_3^{(i)} \\ v_1^{(i+1)} & v_3^{(i+1)} \end{array} \right| + \\
 & \left. + \left| \begin{array}{cc} x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)} & x_3^{(i+1)} - x_3^{(i)} \\ v_2^{(i+1)} & v_3^{(i+1)} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} v_2^{(i)} & v_3^{(i)} \\ v_2^{(i+1)} & v_3^{(i+1)} \end{array} \right| \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (17) \quad m_i = & \pm \frac{1}{A_i} \left[ \left| \begin{array}{cc} v_1^{(i)} & v_2^{(i)} \\ x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)} & x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} v_1^{(i)} & v_2^{(i)} \\ v_1^{(i+1)} & v_2^{(i+1)} \end{array} \right| + \right. \\
 & + \left| \begin{array}{cc} v_1^{(i)} & v_3^{(i)} \\ x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)} & x_3^{(i+1)} - x_3^{(i)} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} v_1^{(i)} & v_3^{(i)} \\ v_1^{(i+1)} & v_3^{(i+1)} \end{array} \right| + \\
 & \left. + \left| \begin{array}{cc} v_2^{(i)} & v_3^{(i)} \\ x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)} & x_3^{(i+1)} - x_3^{(i)} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} v_2^{(i)} & v_3^{(i)} \\ v_2^{(i+1)} & v_3^{(i+1)} \end{array} \right| \right]
 \end{aligned}$$

(unter Voraussetzung, dass der Ausdruck (15) von Null verschieden ist). In diesem Fall kann leicht gezeigt werden, dass  $k_i = |P_i A_i|$ ,  $m_i = |P_{i+1} A'_i|$ , wobei  $|A_i A'_i|$  den kürzesten Abstand der Geraden  $y_j = x_j^{(i)} + uv_j^{(i)}$ ,  $y_j = x_j^{(i+1)} + wv_j^{(i+1)}$  ( $-\infty < u, w < +\infty$ ) bedeutet.

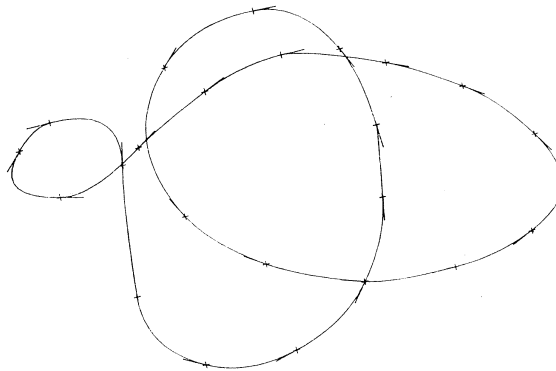


Abb. 2.

**3. Zwei Beispiele.** Die hier behandelte Interpolationsmethode wird für die Computerzeichnung von Kurven benutzt. Die Punkt- und Tangentenkoordinaten der durch die eingegebenen Stützpunkte und Stützgeraden, d.h. Tangenten, bestimmten Interpolationskurven werden vom Computer berechnet und durch ein automatisches

Zeichengerät graphisch ausgegeben. Das Programm ist so erstellt worden, dass die Anzahl der berechneten Punkte auf den einzelnen Kurvenbogen  $\widehat{P_i P_{i+1}}$  in vorgegebener Weise von der Streckenlänge  $|P_i P_{i+1}|$  abhängt.

In Abb. 2 ist eine ebene, durch 24 Stützpunkte (mit dazu vorgegebenen Stützgeraden) hindurchgehende, abgeschlossene Interpolationskurve abgebildet.

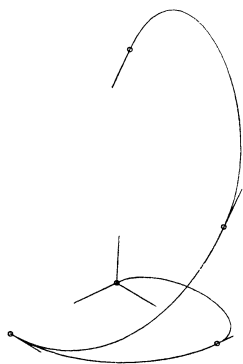


Abb. 3.

In Abb. 3 handelt es sich um eine räumliche Kurve. Die in Axonometrie gezeichnete nichtabgeschlossene Interpolationskurve ist hier durch drei Stützpunkte und drei Stützgeraden gegeben.

## Souhrn

### O JEDNÉ INTERPOLAČNÍ ÚLOZE

JOSEF MATUŠŮ, JOSEF NOVÁK

V práci je řešena interpolační úloha, která pracuje s danými opěrnými body a opěrnými přímkami v těchto bodech. Obsahuje ukázky kreslení interpolačních křivek automatickým zařízením, které je řízeno samočinným počítačem.

*Adresen der Autoren:* Doc. Dr. *Josef Matušů*, CSc., ČVUT, Karlovo nám. 13, 120 00 Praha 2; Dr. *Josef Novák*, CSc., ČVUT, Horská ul. 4, 120 00 Praha 2.