

# Aplikace matematiky

---

Jan Polášek; Zdeněk Vlášek

Berechnung der ebenen Potentialströmung von rotierenden radialen Profilittern

*Aplikace matematiky*, Vol. 17 (1972), No. 4, 295–308

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103419>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1972

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## BERECHNUNG DER EBENEN POTENTIALSTRÖMUNG VON ROTIERENDEN RADIALEN PROFILGITTERN

JAN POLÁŠEK UND ZDENĚK VLÁŠEK

(Eingegangen am 1. Juli 1971)

### § 1. Einleitung

Zur Berechnung der ebenen Potentialströmung hat sich in manchen Fällen eine auf der Lösung einer Fredholmschen Integralgleichung zweiter Art aufgebaute Methode als sehr fruchtbar erwiesen. Sie wurde erfolgreich benutzt, nicht nur zur Berechnung der Umströmung von einem oder mehreren Einzelprofilen [2], sondern auch für gerade Schaufelgitter [1] und Gitterstufen, die aus zwei geraden Gittern mit verschiedenen Teilungen zusammengesetzt sind [3]. Im Falle der Gitterstufe könnte sich das eine Gitter längs des anderen mit konstanter Geschwindigkeit verschieben. Mit der gleichen Methode wurde auch die Umströmung von schwingenden Profilen in Gitteranordnung durchgeführt [4].

Bei dem Aufbau der Methoden zur Berechnung der ebenen Potentialströmung war aber wesentlich weniger Aufmerksamkeit den radialen Profilgittern gewidmet (Abb. 1). Dies gilt nicht nur für die mit den Lösungen von Integralgleichungen aufgebauten Methoden, sondern auch für andere Methoden, die bei der Lösung der Potentialströmung benutzt werden. Zum Beispiel beschränkt sich die Arbeit [5] nur auf radiale Profilgitter mit dünnen Profilen, die in der Form dem Bogen einer logarithmischen Spirale nahestehen. Wie gut bekannt ist, läßt sich die Umströmung eines stehenden radialen Profilgitters (Abb. 1) im Strömungsfeld einer im Koordinaten-Anfang situierten Wirbelquelle durch konforme Abbildung auf die Umströmung eines geraden Profilgitters überführen. Diese konforme Abbildung kann bei der Berechnung der Umströmung von rotierenden radialen Profilgittern nicht benutzt werden, denn das relative Strömungsfeld in einem rotierenden Profilgitter ist nicht mehr potentiell.

In dieser Arbeit wollen wir zeigen, wie die Methode zur Berechnung der Potentialumströmung von Schaufelprofilen modifiziert werden kann, damit sie auch zur Berechnung von rotierenden Profilgittern benutzbar ist. Zugleich werden auch Existenz und Eindeutigkeit der Lösung dieser Aufgabe bewiesen.

Ein anderes Problem ist der Aufbau eines Algorithmus für numerische Behandlung dieser Aufgabe, ebenfalls die Ausarbeitung eines Programmes für eine Rechenanlage. Diese Fragen sind in dieser Arbeit nicht eingegliedert worden.

## § 2. Formulierung der Aufgabe

Man betrachtet ein radiales Profilvergitter, das aus  $n$  gleichen regelmäßig um den Anfang der komplexen Ebene  $z$  verteilten Profilen besteht (Abb. 1). Das radiale Profilvergitter rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  (auf der Abb. 1 ist  $\omega > 0$ ) im Strömungsfeld einer Wirbelquelle im Koordinatenanfang. Die Zirkulation des Wirbels wird mit  $\Gamma_0$  und die Ergiebigkeit der Quelle mit  $Q_0$  bezeichnet. Es wird vorausgesetzt, daß alle Profile auf gleiche Weise umströmt werden und daß die Geschwindigkeit im Unendlichen Null ist. Damit diese Aufgabe eindeutig wird, muß noch die Zirkulation  $\Gamma$  um jedes Profil angegeben werden. In der Praxis wird die

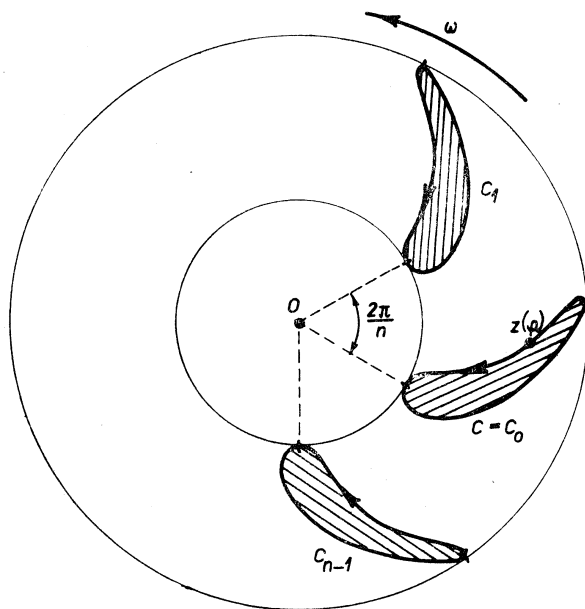


Abb. 1

Wahl der Zirkulation  $\Gamma$  durch das Festsetzen des hinteren Verzweigungspunktes der profilgebenden Verzweigungsstromlinie ersetzt. Bei Profilen mit scharfer Hinterkante liegt dieser Verzweigungspunkt in der Hinterkante. Bei Profilen mit abgerundeter Hinterkante kann die Lage des Verzweigungspunktes aus potentialtheoretischen Überlegungen nicht bestimmt werden. Die Lage des Verzweigungspunktes ist dann von der

Bildung der Grenzschichten auf den Schaufeloberflächen abhängig. Doch Überlegungen dieser Art gehören in die Theorie der Grenzschichten und liegen deshalb außerhalb des Rahmens dieser Arbeit. Weiterhin werden nur Profile mit abgerundeter Hinterkante betrachtet, und es wird stets vorausgesetzt, daß die Lage des hinteren Verzweigungspunktes bekannt ist.

Das Strömungsfeld bei der Umströmung eines rotierenden radialen Profiltitters ist instationär. Da aber eine konstante Winkelgeschwindigkeit vorausgesetzt wurde, kann man das Strömungsfeld in einem beliebigen Augenblick  $t$  nur durch Rotation um den Winkel  $\omega(t - t_0)$  aus dem Strömungsfeld im Augenblick  $t_0$  bekommen. Es genügt also, das Strömungsfeld nur in einem einzigen Augenblick zu studieren. Auf diese Weise fällt die Zeit als Veränderliche aus den weiteren Überlegungen aus.

Alle Überlegungen bei der Formulierung der Aufgabe werden in der offenen komplexen Ebene  $E$  durchgeführt. Ein festgewähltes Profil im Augenblick  $t_0$  (weiterhin wird die Zeit  $t$  nicht mehr gegeben) ist durch eine positiv orientierte Jordansche Kurve  $C$  definiert. In Parameterdarstellung ist die Kurve  $C$  durch die komplexe Funktion  $z(\varphi) = x(\varphi) + iy(\varphi)$ ,  $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ , gegeben. Die Funktion  $z(\varphi)$  sei definiert für alle  $\varphi \in E_1$  und hat folgende Eigenschaften:

- (2.1) a)  $z(\varphi)$  ist zweimal stetig differenzierbar für alle  $\varphi$ ;  
 (2.2) b)  $z(\varphi)$  ist periodisch mit Periode  $2\pi$ ;  
 (2.3) c)  $\dot{z}(\varphi) \neq 0$  für alle  $\varphi$ ;  
 (2.4) d)  $0 \in \text{Ext } C$ ;  
 (2.5) e) es gilt:  $z \in C \Rightarrow z \exp(2k\pi i/n) \in \text{Ext } C$ ,  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ .

Die Gitterprofile sind durch die Kurven  $C_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ , in der Parameterdarstellung

$$(2.6) \quad z_k(\varphi) = z(\varphi) \exp(2k\pi i/n), \quad k = 0, 1, \dots, n - 1,$$

gegeben. Weiter werden noch die Bezeichnungen eingeführt:

$$L = C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{n-1},$$

$$\Omega = \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Ext } C_k - \{0\}.$$

Die orientierte Tangente zu der Kurve  $C$  im Punkt  $z$  ist gegeben durch die komplexe Zahl

$$(2.7) \quad t(z(\varphi)) = \dot{z}(\varphi) / |\dot{z}(\varphi)|, \quad \varphi \in E_1.$$

Mit diesen eingeführten Bezeichnungen kann das Problem der Umströmung eines rotierenden radialen Profilkitters folgendermaßen formuliert werden:

### Problemstellung

Zu den reellen Zahlen  $Q_0, \Gamma_0, \Gamma$  und  $\omega$  soll eine Funktion  $w(z)$  (komplexe Geschwindigkeit) mit folgenden Eigenschaften gefunden werden:

(2.8) a)  $w(z)$  ist definiert, stetig und endlich in  $\Omega \cup L$ , und ist eine holomorphe Funktion in  $\Omega$ ;

(2.9) b) für  $z \in \Omega \cup L$  ist  $w(z \exp(2k\pi i/n)) = w(z) \exp(-2k\pi i/n)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ ;

c) in Umgebung des Punktes 0 hat die Laurentsche Reihe der Funktion  $w$  (in Einklang mit der Bedingung b)) die Form

$$(2.10) \quad w(z) = \frac{Q_0 - i\Gamma_0}{2\pi} \frac{1}{z} + a_0 z^{n-1} + a_1 z^{2n-1} + \dots;$$

$$(2.11) \quad d) \quad w(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} w(z) = 0;$$

$$(2.12) \quad e) \quad \int_C w(z) dz = \Gamma;$$

f) Die Funktion  $w(z)$  erfüllt auf  $C$  die kinematische Bedingung der Umströmung der sich bewegenden Grenze (d. h. die normale Komponente der Geschwindigkeit im Strömungsfeld in jedem Grenzpunkt ist gleich der normalen Komponente der Geschwindigkeit der Grenze in diesem Punkt):

$$\operatorname{Im} [w(z) t(z)] = -\omega \operatorname{Re} [\bar{z} t(z)], \quad z \in C.$$

Diese Bedingung kann auch in einer anderen, für weitere Berechnungen geeigneteren Form, geschrieben werden,

$$(2.13) \quad w(z) = v(z)/t(z) - i\omega \bar{z}, \quad z \in C,$$

wo  $v(z)$  eine bis jetzt noch unbekannte reelle Funktion der Lage auf der Profilkontur ist. (Wie weiter gezeigt wird, ist  $v(z)$  die tangentielle Komponente der relativen Geschwindigkeit auf der Profilkontur.)

(2.14) g) Die Funktion  $w(z)$  erfüllt auf  $C$  die Hölder'schen Bedingungen.

### § 3. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Problems

Wir setzen voraus, daß die Funktion  $w$  eine Lösung unseres Problems ist. Dann kann die Funktion  $w$  eindeutig durch die Werte, die sie auf  $L$  annimmt, und durch die Werte  $Q_0, \Gamma_0$  bestimmt werden. Nach (2.8), (2.10) und (2.11) gilt

$$(3.1) \quad w(\zeta) = \frac{Q_0 - i\Gamma_0}{2\pi} \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{w(z)}{z - \zeta} dz, \quad \zeta \in \Omega.$$

Das rechts stehende Integral Cauchy'schen Typs hat einen Limes für  $\zeta \rightarrow z_0, z_0 \in C, \zeta \in \Omega$ . Dieses ergibt sich daraus, daß die beiden restlichen Glieder Limes haben. Da der Punkt  $z_0$  auf dem Profil  $C = C_0$  liegt, kann bei der Integration längs der anderen Profile sich die Reihenfolge der Limesbildung und der Integration verwechseln. Der Limes des Integrals längs  $C$  kann mittels des Cauchy'schen Hauptwertes eines singulären Integrals folgendermaßen bestimmt werden:

$$\lim_{\zeta \rightarrow z_0, \zeta \in \Omega} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{w(z)}{z - \zeta} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{w(z)}{z - z_0} dz - \frac{w(z_0)}{2}, \quad z_0 \in C.$$

Das rechts stehende Integral wird definiert als Grenzwert der Summe von Integralen längs der Kurven, die aus  $C$  durch das Weglassen des innerhalb einer kreisförmigen Umgebung von  $z_0$  liegenden Bogens entstanden sind (siehe [6], § 13). Im Nachfolgenden verstehen wir Kurvenintegrale von unbeschränkten Funktionen in diesem Sinne.

Falls also in (3.1) der Limes für  $\zeta \rightarrow z_0$  gebildet wird, so ergibt sich nach [6] § 16 unter Benützung von (2.14) und nach Multiplikation mit zwei

$$(3.2) \quad w(z_0) = \frac{Q_0 - i\Gamma_0}{\pi} \frac{1}{z_0} - \frac{1}{\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{C_k} \frac{w(z)}{z - z_0} dz, \quad z_0 \in C.$$

Diese ist eine singuläre Integralgleichung in komplexen Veränderlichen, die die Werte der Funktion  $w$  auf der Kurve  $C$  erfüllen müssen.

Mittels der Substitution  $z = \tilde{z} \exp(2k\pi i/n), \tilde{z} \in C$ , transformieren wir die Integrale längs der Kurven  $C_k$  zu Integralen längs der Kurve  $C$ . Weiter benützen wir noch (2.6), (2.9) und schreiben nur  $z$  statt  $\tilde{z}$

$$(3.3) \quad w(z_0) = \frac{Q_0 - i\Gamma_0}{\pi} \frac{1}{z_0} - \frac{1}{\pi i} \int_C w(z) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z \exp(2k\pi i/n) - z_0} dz, \quad z_0 \in C.$$

Es gilt

$$(3.4) \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z \exp(2k\pi i/n) - z_0} = \frac{nz_0^{n-1}}{z^n - z_0^n}, \quad \text{falls } z^n \neq z_0^n.$$

Für  $w$  setzen wir (2.13) ein, wobei wir noch die Gleichung mit  $t(z_0)$  multiplizieren und alle Glieder mit  $v$  auf die linke Seite dieser Gleichung überführen. Auf diese Weise ergibt sich

$$(3.5) \quad v(z_0) + \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{n t(z_0) z_0^{n-1}}{z^n - z_0^n} v(z) \frac{dz}{t(z)} = t(z_0) \left( \frac{Q_0 - i\Gamma_0}{\pi} \frac{1}{z_0} + i\omega \bar{z}_0 + \frac{\omega}{\pi} n z_0^{n-1} \int_C \frac{\bar{z}}{z^n - z_0^n} dz \right), \quad z_0 \in C.$$

Das auf der rechten Seite stehende Integral schreiben wir zuerst als Summe von zwei Integralen

$$\int_C \frac{\bar{z}}{z^n - z_0^n} dz = \int_C \frac{\overline{z - z_0}}{z^n - z_0^n} dz + \bar{z}_0 \int_C \frac{1}{z^n - z_0^n} dz, \quad z_0 \in C;$$

Da aber

$$(3.6) \quad \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z, z_0 \in C}} \frac{\overline{z - z_0}}{z^n - z_0^n} = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \frac{\overline{z(\varphi) - z(\varphi_0)}}{z^n(\varphi) - z^n(\varphi_0)} = \frac{\overline{\dot{z}(\varphi_0)}}{n z_0^{n-1}(\varphi_0) \cdot \dot{z}(\varphi_0)},$$

ist von beiden Integralen nur das zweite singulär und dieses singuläre Integral lässt sich leicht berechnen. Für  $z_0 \in \text{Int } C$  gilt nach dem Residuensatz

$$\int_C \frac{1}{z^n - z_0^n} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_0} \frac{1}{z^n - z_0^n} = \frac{2\pi i}{n z_0^{n-1}}, \quad z_0 \in \text{Int } C,$$

für  $z_0 \in \text{Ext } C$  ist der Wert dieses Integrals gleich Null und für  $z_0 \in C$  ist dieses singuläre Integral gleich dem arithmetischen Mittel dieser beiden Werte

$$\int_C \frac{1}{z^n - z_0^n} dz = \frac{\pi i}{n z_0^{n-1}}, \quad z_0 \in C.$$

Die rechte Seite der Gleichung (3.5) bezeichnen wir mit  $g(z_0)$ . Jetzt nimmt diese Seite die Form

$$(3.7) \quad g(z_0) = t(z_0) \left( \frac{Q_0 - i\Gamma_0}{\pi} \frac{1}{z_0} + 2i\omega \bar{z}_0 + \frac{\omega}{\pi} n z_0^{n-1} \int_C \frac{\overline{z - z_0}}{z^n - z_0^n} dz \right), \quad z_0 \in C$$

an. Aus der Gleichung (3.7) ist klar ersichtlich, daß die Funktion  $g(z_0)$  nur durch die Kurve  $C$  und durch die Werte von  $Q_0$ ,  $\Gamma_0$  und  $\omega$  eindeutig bestimmt wird.

Die Bedingung (2.12) lässt sich mittels (2.13) auf die Form

$$\Gamma = \int_C w(z) dz = \int_C v(z) \frac{dz}{t(z)} - i\omega \int_C \bar{z} dz$$

überführen. Nach der Green'schen Formel gilt

$$(3.8) \quad \int_C \bar{z} dz = \int_C x dx + y dy + i \int_C -y dx + x dy = 2iP,$$

wo  $P$  der Flächeninhalt der durch die Kurve  $C$  begrenzten Fläche ist. Statt (2.12) können wir also schreiben

$$(3.9) \quad \int_C v(z) ds_z = \Gamma - 2\omega P.^1)$$

Falls wir jetzt von den Gleichungen (3.5) und (3.7) nur den reellen Teil nehmen, bekommen wir schließlich dieses wichtige Ergebnis.

**Satz.** Falls die Funktion  $w$  eine Lösung des in § 2 aufgestellten Problems ist, dann ist die reelle Funktion  $v$  eine Lösung der Fredholmschen Integralgleichung zweiter Art

$$(3.10) \quad v(z_0) + \frac{1}{\pi} \int_C \operatorname{Im} \left[ \frac{n t(z_0) z_0^{n-1}}{z^n - z_0^n} \right] v(z) ds_z = \\ = \operatorname{Re} \left[ t(z_0) \left( \frac{Q_0 - i\Gamma_0}{\pi} \frac{1}{z_0} + 2i\omega \bar{z}_0 + \frac{\omega}{\pi} n z_0^{n-1} \int_C \frac{\overline{z - z_0}}{z^n - z_0^n} dz \right) \right], \quad z_0 \in C,$$

mit der Bedingung (3.9).

Weiterhin wollen wir zeigen, daß der Kern dieser Integralgleichung auch im Punkt  $z = z_0$  so definiert werden kann, daß er in diesem Punkt stetig ist und daß die Gleichung (3.10) mit der Bedingung (3.9) bei jeder Wahl der Werte  $Q_0, \Gamma_0, \Gamma, \omega$  genau eine Lösung hat. Die Funktion  $w$ , die durch diese Lösung eindeutig bestimmt wird, ist die Lösung des gegebenen Problems; von den Werten  $Q_0, \Gamma_0, \Gamma$  und  $\omega$  hängt die Funktion  $w$  linear ab.

Gehen wir nun zum Beweis dieser Behauptungen über. Zuerst führen wir die Transformation

$$(3.11) \quad \xi = z^n, \quad z \in C,$$

<sup>1)</sup> Die Bezeichnung  $v(z)$  für die Werte der Funktion in den Punkten der Kurve  $C$  werden wir überall nachfolgend benutzen und zwar ohne Rücksicht auf die benutzte Parameterdarstellung. Nach dieser Vereinbarung bedeutet z. B.

$$\int_C v(z) ds_z = \int_0^l v(z(s)) ds,$$

wo  $l$  die Länge der Kurve  $C$  und das Parameter  $s$  die Bogenlänge auf dieser Kurve, von einem festgewählten Punkt gemessen, bedeuten.



ein. Die durch diese Transformation vermittelte konforme Abbildung überführt die Aufgabe mit  $n$  Profilen auf den Fall eines einzigen Profiles mit transformierter Grenzbedingung.

Durch die Transformation (3.11) wird die Kurve  $C$  auf eine positiv orientierte Jordan'sche Kurve  $D$  mit stetiger Krümmung abgebildet. Ihre Tangente ist

$$(3.12) \quad T(\xi) = t(z) \frac{z^{n-1}}{|z|^{n-1}}, \quad z \in C.$$

Die tangentielle Komponente der transformierten Geschwindigkeit ist

$$(3.13) \quad V(\xi) = \frac{v(z)}{\left| \frac{d\xi}{dz} \right|} = \frac{v(z)}{n|z|^{n-1}}, \quad z \in C$$

und das Bogenelement der Kurve  $D$  ist

$$(3.14) \quad ds_\xi = n|z|^{n-1} ds_z, \quad z \in C.$$

Die Gleichung (3.13) können wir formal als Definitionsgleichung der reellen Funktion  $V(\xi)$ ,  $\xi \in D$ , betrachten.

Wir dividieren die Gleichung (3.10) durch die reelle Zahl  $n|z_0|^{n-1}$  und wir führen die gegenseitig eindeutigen Substitutionen (3.11) und (3.13) durch. Auf diese Weise bekommen wir eine äquivalente Gleichung für die Funktion  $V(\xi)$

$$(3.15) \quad V(\xi_0) + \frac{1}{\pi} \int_D \operatorname{Im} \left[ \frac{T(\xi_0)}{\xi - \xi_0} \right] V(\xi) ds_\xi = f(\xi_0), \quad \xi_0 \in D,$$

wo

$$f(\xi_0) = \operatorname{Re} \left[ g(z_0) \frac{1}{n|z_0|^{n-1}} \right], \quad z_0 \in C.$$

Der Kern der Gleichung (3.15) läßt sich auch in der Form

$$\operatorname{Im} \left[ \frac{T(\xi_0)}{\xi - \xi_0} \right] = - \frac{\cos(\overrightarrow{\xi\xi_0}, \vec{n}(\xi_0))}{|\xi - \xi_0|}, \quad \xi \neq \xi_0,$$

aufschreiben. Die Normale  $\vec{n}(\xi_0)$  ist in das Äußere der geschlossenen Kurve  $D$  gerichtet. Einen solchen Kern begegnet man auch bei der Lösung des zweiten inneren Randwertproblems für harmonische Funktionen mittels des Potentials einer Doppelschicht. Die Eigenschaften der Integralgleichung (3.15) sind deshalb gut bekannt (z. B. [7] § 35, [6] §§ 51, 61):

a) Der Kern kann auch in  $\xi = \xi_0$  so definiert werden, daß er in diesem Punkt stetig ist;

b) die Gleichung (3.15) hat eine Lösung dann und nur dann, wenn

$$(3.16) \quad \int_D f(\xi) ds_\xi = 0;$$

c) die entsprechende homogene Gleichung (für  $f \equiv 0$ ) hat genau eine linear unabhängige Lösung  $V_0(\xi)$ ; für diese gilt

$$(3.17) \quad \int_D V_0(\xi) ds_\xi \neq 0;$$

d) falls die Funktion  $f$  eine Hölder'sche Funktion auf  $D$  ist, so ist auch jede Lösung  $V$  der Gleichung (3.15) eine Hölder'sche Funktion.

In unserem Fall brauchen wir nur zeigen, daß die Voraussetzungen in b) und d) erfüllt sind. Wegen (2.1) bis (2.4) genügt es in dem Punkt d) zu zeigen, daß die Funktion

$$h(z_0) = \int_C \frac{\overline{z - z_0}}{z^n - z_0^n} dz, \quad z_0 \in C,$$

auf  $C$  eine Hölder'sche Funktion ist. Wir benützen (3.4)

$$(3.18) \quad nz_0^{n-1} \int_C \frac{\overline{z - z_0}}{z^n - z_0^n} dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int_C \frac{\overline{z - z_0}}{z \exp(2k\pi i/n) - z_0} dz.$$

Dabei dürfen wir uns nur auf den ersten Summanden beschränken, denn bei  $k \neq 0$  kann man die Differentiation längs der (dem Punkt  $z_0$  entsprechenden) Bogenlänge hinter dem Integrationszeichen durchführen. Für  $k = 0$  gilt

$$\int_C \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} dz = \int_C e^{-2i \arg(z - z_0)} dz.$$

Da die Funktion  $\exp(-2i \arg(z - z_0))$  auf  $C \times C$  eine Hölder'sche Funktion ist, gilt das Gleiche auch für das Integral.

Nun wollen wir noch zeigen, daß auch die Bedingung (3.16) erfüllt wurde. Das Integral auf der rechten Seite läßt sich in der Form

$$\int_D f(\xi_0) ds_{\xi_0} = \operatorname{Re} \int_D \frac{g(z_0)}{n|z_0|^{n-1}} ds_{\xi_0}$$

schreiben. Wir führen die Substitution (3.11) durch und benützen auch die Gleichungen (3.18) und (3.7), es ergibt sich

$$(3.19) \quad \int_D g(z_0) \frac{ds_{\xi_0}}{n|z_0|^{n-1}} = \frac{Q_0 - i\Gamma_0}{\pi} \int_C \frac{1}{z_0} dz_0 + 2i\omega \int_C \bar{z}_0 dz_0 + \\ + \frac{\omega}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_C \left( \int_C \frac{\overline{z - z_0}}{z \exp(2k\pi i/n) - z_0} dz \right) dz_0.$$

Das erste von den Integralen auf der rechten Seite ist wegen (2.4) gleich Null, der zweite Summand ist gleich  $-4\omega P$  (siehe (3.8)). In dem verbliebenen Rest der rechten Seite berechnen wir zuerst die inneren Integrale. Für ein festgewähltes  $z_0 \in C$  transformieren wir sie auf Integrale längs  $C_k$  mittels der Substitution  $\tilde{z} = z \exp(2k\pi i/n)$ ,  $z \in C$ ,

$$(3.20) \quad \int_C \frac{\overline{z - z_0}}{z \exp(2k\pi i/n) - z_0} dz = \int_{C_k} \frac{\overline{z - z_0 \exp(2k\pi i/n)}}{z - z_0} dz = \dots$$

Für  $k \neq 0$  ist  $\int_{C_k} (z - z_0)^{-1} dz = 0$  ( $z_0 \in \text{Ext } C_k$ ), so daß wir in diesen Fällen den Zähler im Integrand des letzten Integrals in (3.20) durch  $\overline{z - z_0}$  ersetzen können. Für  $k = 0$  hat der Zähler schon diese Form. Wir können also in der Transformation des Integrals in (3.20) für  $k = 0, 1, \dots, n - 1$  weiter fortschreiten und es zuletzt auf ein Flächenintegral überführen:

$$(3.21) \quad \dots = \int_{C_k} \frac{(\overline{z - z_0})^2}{|z - z_0|^2} dz = \int_{C_k} (\vec{A} \cdot \vec{i}_z + i \vec{A} \cdot \vec{n}_z) ds_z = \iint_{\text{Int } C_k} (\text{rot}_3 \vec{A} + i \text{div } \vec{A}) dS_z,$$

wobei  $\vec{A}(x, y)$  ein Vektor ist, dessen Komponenten dem reellen und dem imaginären Teil der komplexen Zahl  $(z - z_0)^2/|z - z_0|^2$  gleich sind. Dabei ist

$$\text{rot}_3 \vec{A} + i \text{div } \vec{A} = \frac{2i(\overline{z - z_0})}{|z - z_0|^2} = \frac{2i}{z - z_0}.$$

Nun können wir die Transformation des Integrals von (3.20) beschließen. Es gilt

$$\int_C \frac{\overline{z - z_0}}{z \exp(2k\pi i/n)} dz = \dots = 2i \iint_{\text{Int } C_k} \frac{1}{z - z_0} dS_z.$$

Dieses Integral müssen wir noch nach  $z_0$  längs der Kurve  $C$  gemäß (3.19) integrieren. Wir vertauschen die Reihenfolge der Integrationen. Infolge des Residuensatzes ( $z \in \text{Int } C_k$ ) ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int_C 2i \left( \iint_{\text{Int } C_k} \frac{1}{z - z_0} dS_z \right) dz_0 = \\ & = 2i \iint_{\text{Int } C_k} \left( \int_C \frac{1}{z - z_0} dz_0 \right) dS_z = \begin{cases} 0, & k = 1, 2, \dots, n - 1, \\ 4\pi P, & k = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Der dritte Summand in (3.19) ist also gleich  $4\omega P$  und addiert mit dem zweiten ergibt Null. Die Bedingung (3.16) ist also erfüllt.

Nach der Behauptung c) hat die allgemeine Lösung der Gleichung (3.15) die Form  $V_1 + \text{const } V_0$ , wobei die Bedingung (3.17) die Möglichkeit gibt, diese Konstante in eindeutiger Weise so zu bestimmen, damit auch die Gleichung (3.9) erfüllt wird:

$$(2.22) \quad \int_D V(\xi) ds_\xi = \int_C v(z) ds_z = \Gamma - 2\omega P.$$

Die Gleichung (3.10) mit der Bedingung (3.9) hat also eine einzige Lösung  $v$ , und diese Lösung ist auf  $C$  eine Hölder'sche Funktion.

Mittels dieser Funktion  $v$  definieren wir nun die Funktion  $w$  und zwar folgendermaßen:

- auf der Kurve  $C$  nach der Gleichung (2.13),
- auf der Kurve  $L$  nach der Gleichung (2.9),
- und in dem Gebiet  $\Omega$  nach der Gleichung (3.1).

Es ist ersichtlich, daß die Funktion  $w$  die Bedingungen (2.9) bis (2.14) der Problemstellung erfüllt. Zu beweisen bleibt nur noch die Bedingung (2.8), das heißt die Stetigkeit dieser Funktion auf  $\Omega \cup L$ .

Durch die Formel (3.1) wird die Funktion  $w$  im Gebiet  $\Omega$  definiert. Die Funktion  $w$  läßt sich stetig auf  $C$  erweitern. Diese Erweiterung bezeichnen wir mit  $w_{ex}$ . Wir müssen beweisen, daß auf der Kurve  $C$   $w = w_{ex}$  gilt. Falls wir die Formel (3.1) auch für Punkte  $\zeta \in \text{Int } C$  benützen, bekommen wir in  $\text{Int } C$  eine bestimmte holomorphe Funktion, die wir mit  $w_{in}$  bezeichnen. Sie läßt sich auch stetig auf  $C$  erweitern. Nach der bekannten Formel über Grenzwerte von Integralen Cauchy'schen Typs gilt

$$(3.23) \quad w_{ex}(z_0) = \left( \frac{Q_0 - i\Gamma_0}{2\pi} \frac{1}{z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{w(z)}{z - z_0} dz \right) + \frac{w(z_0)}{2} = \\ = w_{in}(z_0) + w(z_0), \quad z_0 \in C.$$

Erinnern wir uns, daß die Funktion  $v$  die Gleichung (3.10) erfüllt. Diese Gleichung ist der reelle Teil der mit  $t(z_0)$  multiplizierten Gleichung (3.2). Daraus ergibt sich, daß die Funktion  $w$  auf der Kurve  $C$  die Gleichung

$$\text{Re} \left[ t(z_0) \left( \frac{w(z_0)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{w(z)}{z - z_0} dz \right) \right] = \text{Re} \left[ t(z_0) \frac{Q_0 - i\Gamma_0}{2\pi} \frac{1}{z_0} \right], \quad z_0 \in C,$$

erfüllt.

Aus dieser Gleichung bekommen wir unter Benützung von (3.23) und durch Multiplikation mit der Zahl  $t(z_0)$

$$(3.24) \quad \text{Re} [w_{in}(z_0) t(z_0)] = 0, \quad z_0 \in C.$$

Wir wählen nun einen beliebigen Punkt  $z^*$  auf der Kurve  $C$ . Das Gebiet  $\text{Int } C$  ist einfach zusammenhängend und deswegen hängt das Integral

$$F(z) = \int_{z^*}^z w_{in}(z) dz, \quad z \in \overline{\text{Int } C},$$

von dem Integrationsweg in  $\overline{\text{Int } C}$  nicht ab. Dieses Integral definiert dort eine stetige und in  $\text{Int } C$  holomorphe Funktion  $F$ . Durch Integration längs der Bögen der Kurve  $C$  kann festgestellt werden, daß gemäß (3.24) die Funktion

$$\text{Re } F(z) = \int_{z^*}^z \text{Re} [w_{in}(z) t(z)] ds_z$$

auf der Kurve  $C$  gleich Null ist. Nach dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen ist dann  $\operatorname{Re} F(z) = 0$  im ganzen  $\operatorname{Int} C$  und nach den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen ist im  $\operatorname{Int} C$  die Funktion  $F$  konstant. Infolgedessen ist in  $\operatorname{Int} C$   $w_{in} = 0$  und daraus bekommen wir mit (3.23), daß auf  $C$  gilt  $w = w_{ex}$ . Dadurch wurde bewiesen, daß die Funktion  $w$  in  $\Omega \cup L$  stetig ist, und daß sie also wirklich die einzige Lösung unseres Problems darstellt.

#### § 4. Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die Integralgleichung (3.10) mit der Bedingung (3.9) für die Konturgeschwindigkeit auf einem Profil bei Potentialumströmung eines rotierenden radialen Profilvergitters hergeleitet. Aus dieser Geschwindigkeit kann man mit den Beziehungen (2.13) und (3.1) die Werte der Funktion  $w$  im beliebigen Zeitpunkt und im beliebigen Punkt des Gebietes  $\Omega$  bestimmen, d. h. man kennt das ganze Strömungsfeld. Es wurde gezeigt, daß dieses Problem genau eine Lösung hat.

Auf gleiche Weise kann man auch bei der Lösung der quasistationären Aufgabe (d. h. ohne Berücksichtigung der abströmenden Wirbel) der zweidimensionalen Potentialumströmung eines einzigen Profils, das in seiner Ebene eine beliebige Bewegung ausübt, fortschreiten. Es genügt, dieses Profil im gegebenen Augenblick als ein radiales Profilvergitter zu betrachten. Dieses radiale Profilvergitter besteht nur aus einem Profil, das um den momentanen Drehmittelpunkt rotiert. Das äußere potentielle Strömungsfeld braucht dabei nicht das Strömungsfeld einer in dem Drehmittelpunkt situierten Wirbelquelle zu sein.

Die Gleichungen (3.10) bzw. (3.15) zeigen, daß bei der numerischen Bearbeitung dieses Problems der gleiche Algorithmus, wie bei der Berechnung der potentialen Umströmung eines Einzelprofils oder eines geraden Profilvergitters, benutzt werden kann [8]. Die linke Seite der Gleichung (3.15) ist nämlich die gleiche, wie die linke Seite der entsprechenden Gleichung bei der Umströmungsberechnung eines Einzelprofils. Die wesentlichen Unterschiede liegen auf den rechten Seiten dieser Gleichungen. Zur Festlegung der Werte, die die rechte Seite in (3.15) annimmt, müssen jetzt Kurvenintegrale berechnet werden. Aus diesen Gründen kann nicht das schon früher ausgearbeitete Programm zur Berechnung der Umströmung von Einzelprofilen und geraden Profilvergittern [8] für die rotierenden radialen Profilvergitter adaptiert werden. Für diese Aufgabe müssen wir ein neues Programm von Anfang an aufbauen. Dabei werden wir alle Erfahrungen und Rechenvorgänge ausnützen, durch welche erst die Methode der Integralgleichungen zu einem effektiven und allgemein benutzbaren Rechenverfahren für die Berechnung der potentialen Umströmung von geraden Profilvergittern wurde.

## Verzeichnis wichtiger Bezeichnungen

$n$	die Zahl der Profile im radialen Profilvergitter
$\omega$	die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Profilvergitters
$Q_0, \Gamma_0$	die Intensität der Quelle und des Wirbels im Drehmittelpunkt des radialen Profilvergitters
$\Gamma$	die Zirkulation der absoluten Geschwindigkeit um ein Gitterprofil
$E$	die offene Ebene der komplexen Zahlen
$C$	die definierende Kurve der Profilkontur
$z(\varphi)$	die Parameterdarstellung der Kurve $C$ , $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$
Ext $C$	das Äußere der Kurve $C$
Int $C$	das Innere der Kurve $C$
$E_1$	die endlichen reellen Zahlen
$C_k, z_k(\varphi)$	die definierende Kurve des $k$ -ten Profils und ihre Parameterdarstellung
$L$	$C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{n-1}$
$\Omega$	das Gebiet des Strömungsfeldes
$t(z)$	der Einheitsvektor (komplexe Zahl) der Tangente zur Kurve $C$
$w(z)$	die komplexe Geschwindigkeit
Re $z$ , Im $z$	der Realteil und der Imaginärteil der komplexen Zahl $z$
$v(z)$	die tangentielle Komponente der relativen Geschwindigkeit auf der Profilkontur
$\dot{z}(\varphi)$	die Ableitung der Funktion $z(\varphi)$
$P$	der Flächeninhalt von Int $C$

## Literatur

- [1] *Martensen, E.*: Berechnung der Druckverteilung an Gitterprofilen in ebener Potentialströmung mit einer Fredholmschen Integralgleichung, Arch. Rat. Mech. Anal. 3 (1959), S. 235–270.
- [2] *Jacob, K.*: Berechnung der inkompressiblen Potentialströmung für Einzel- und Gitterprofile nach einer Variante des Martensen-Verfahrens, Bericht 63 R 02 der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen (1963).
- [3] *Kazimierski, Z.*: Plaski przepływ przez osiowy stopień maszyny przepływowej o dowolnych parametrach geometrycznych, Arch. Budowy maszyn XIII (1966), zeszyt 2, 213–232.
- [4] *Kazimierski, Z.*: Plaski nieustalony opływ palisady dowolnie drgających profili o dowolnych kształtach, Ciepłota Masz. Przepływowe, 1967, No 66, S. 7–14.
- [5] *Poláček, J.*: Výpočet obtékání kruhových lopatkových mříží, Strojnický časopis SAV, XIII (1962), č. 5.
- [6] *Muschelischvili, N. I.*: Singuljarnyje intěgralnyje uravnenija, Moskva 1968.
- [7] *Petrovskij, I. G.*: Lekcii ob urovněnjach s častnymi proizvodnymi, Moskva 1961.
- [8] *Poláček, J. & Vlášek, Z.*: Řešení rovinného potenciálního obtékání přímých lopatkových mříží, Forschungsbericht für „Turbiny, ŠKODA Plzeň“, 1969.
- [9] *Poláček, J. & Vlášek, Z.*: Výpočet pole rychlostí a proudnic při rovinném potenciálním proudění lopatkovou mříží, Forschungsbericht No CTP-1/70 für „Turbiny, ŠKODA Plzeň“, 1970.

## Souhrn

# ROVINNÉ POTENCIÁLNÍ OBTÉKÁNÍ ROTUJÍCÍ KRUHOVÉ LOPATKOVÉ MŘÍŽE

JAN POLÁŠEK a ZDENĚK VLÁŠEK

V článku je odvozena integrální rovnice (3.10) s podmínkou (3.9) pro povrchovou rychlost na profilu v rotující kruhové lopatkové mříži v proudovém poli víru a zdroje umístěných ve středu otáčení (obr. 1). Pomocí této rychlosti lze ze vztahů (2.13) a (3.1) určit okamžitou hodnotu komplexní rychlosti  $w$  v libovolném bodě oblasti  $\Omega$ , tj. určit celé proudové pole. Je ukázáno, že tato úloha má právě jedno řešení.

Stejný postup lze užít i při výpočtu kvazistacionárního potenciálního obtékání profilu konajícího libovolný pohyb ve své rovině.

Na základě těchto teoretických výsledků je možno vypracovat metodu pro numerický výpočet potenciálního obtékání rotující kruhové lopatkové mříže. Nároky na strojový čas budou zhruba stejné jako při výpočtu obtékání přímé lopatkové mříže [8].

*Adresse der Verfasser:* Doc. Dr. Jan Polášek DrSc., Dr. Zdeněk Vlášek, Matematicko-fyzikální fakulta Karlovy university, Malostranské nám. 25, Praha 1.