

Aplikace matematiky

Miroslav Šisler

Über ein Iterationsverfahren für zyklische Matrizen

Aplikace matematiky, Vol. 17 (1972), No. 3, 225–233

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103411>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1972

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ÜBER EIN ITERATIONSVERFAHREN FÜR ZYKLISCHE MATRIZEN

MIROSLAV ŠISLER

(Eingegangen am 13. April 1971)

Es sei $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ein lineares Gleichungssystem und die reguläre Matrix \mathbf{A} sei folgendermassen zerlegt:

$$(1) \quad \mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{P} - \mathbf{R},$$

wo \mathbf{D} eine verallgemeinerte Diagonalmatrix ist, und \mathbf{P}, \mathbf{R} die zugehörigen verallgemeinerten Dreiecksmatrizen sind.

Falls man $\mathbf{M}_1 = \mathbf{D}, \mathbf{N}_1 = \mathbf{P} + \mathbf{R}$ setzt, bekommt man eine Zerlegung der Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{N}_1$, die dem Jacobi-Verfahren entspricht.

Falls man $\mathbf{M}_2 = \mathbf{D} - \mathbf{P}, \mathbf{N}_2 = \mathbf{R}$ setzt, bekommt man eine Zerlegung der Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{M}_2 - \mathbf{N}_2$, die dem Gauss-Seidelschen Verfahren entspricht.

Falls man $\mathbf{M}_3 = \omega^{-1}(\mathbf{D} - \omega\mathbf{P}), \mathbf{N}_3 = \omega^{-1}[\omega\mathbf{R} + (1 - \omega)\mathbf{D}]$ setzt, wo ω ein gewisser reeller, von Null verschiedener Parameter ist, bekommt man eine Zerlegung der Matrix \mathbf{A} von der Form $\mathbf{A} = \mathbf{M}_3 - \mathbf{N}_3$, die dem gewöhnlichen Oberrelaxationsverfahren entspricht (für $\omega = 1$ bekommt man dabei das Gauss-Seidelsche Verfahren).

In dieser Arbeit werden wir uns mit einem gewissen Iterationsverfahren befassen, das der Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ entspricht, wo

$$(2) \quad \mathbf{M} = \mathbf{D} - \omega\mathbf{P}, \quad \mathbf{N} = (1 - \omega)\mathbf{P} + \mathbf{R}$$

ist. Für $\omega = 1$ bekommt man offensichtlich, so wie bei dem Oberrelaxationsverfahren, das Gauss-Seidelsche Verfahren. Für $\omega = 0$ entspricht die Zerlegung (1) dem Jacobi-Verfahren; das ist ein Unterschied von dem Oberrelaxationsverfahren, welches für keinen Parameter ω mit dem Jacobi-Verfahren identisch ist.

In diesem Artikel werden wir uns mit der Frage befassen, für welche Werte des Parameters ω unsere Methode konvergiert und für welchen Parameterwert ω die schnellste Konvergenz eintritt.

Der Einfachheit halber setzt man

$$\mathbf{L} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{P}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{R}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{L} + \mathbf{U}.$$

Die Iterationsformel für das Jacobi-Verfahren, die die Form

$$\mathbf{D}\mathbf{x}_{v+1} = (\mathbf{P} + \mathbf{R})\mathbf{x}_v + \mathbf{b}$$

hat, transformiert sich folgenderweise:

$$(3) \quad \mathbf{x}_{v+1} = \mathbf{B}\mathbf{x}_v + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}.$$

Die Iterationsformel für unsere, der Zerlegung (2) entsprechende Methode, welche die Form

$$(\mathbf{D} - \omega\mathbf{P})\mathbf{x}_{v+1} = [(1 - \omega)\mathbf{P} + \mathbf{R}]\mathbf{x}_v + \mathbf{b}$$

hat, transformiert sich ähnlicherweise in die Form

$$(\mathbf{E} - \omega\mathbf{L})\mathbf{x}_{v+1} = [(1 - \omega)\mathbf{L} + \mathbf{U}]\mathbf{x}_v + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b},$$

d. h.

$$(4) \quad \mathbf{x}_{v+1} = \mathbf{T}(\omega)\mathbf{x}_v + \mathbf{b}',$$

wo $\mathbf{b}' = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$ ist, und wo

$$(4') \quad \mathbf{T}(\omega) = (\mathbf{E} - \omega\mathbf{L})^{-1}[(1 - \omega)\mathbf{L} + \mathbf{U}]$$

gilt.

Nun werden wir uns mit dem Spektralradius $\mathbf{T}(\omega)$ bezüglich ω befassen. Wir setzen dabei voraus, dass die dem Jacobi-Verfahren entsprechende Matrix \mathbf{B} einen linearen Operator darstellt, welcher den Vektorraum R in R abbildet, und dass dieser Vektorraum durch die direkte Summe der Unterräume v_1, \dots, v_m gebildet wird. Ferner setzen wir voraus, dass die Matrizen \mathbf{L}, \mathbf{U} die Bedingungen

$$(5) \quad \begin{aligned} \mathbf{L}v_i &\subset v_{i+h}, \\ \mathbf{U}v_i &\subset v_{i-k}, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

erfüllen, wo h, k positive ganze Zahlen sind, $h + k = p$, und wo h, k, p teilerfremd sind. Dabei setzt man $v_i = 0$ für $i < 1$ und $i > m$. Es gilt der folgende Satz:

1. Die Matrizen $\mathbf{B}, \mathbf{L}, \mathbf{U}$ sollen die oben eingeführte Voraussetzungen erfüllen. Es sei λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{T}(\omega)$, $\omega \neq 0$. Falls $\omega \neq 1$ oder $\omega = 1$, $\lambda \neq 0$ ist und falls die Zahl μ die Beziehung

$$(6) \quad \lambda^p = (1 - \omega + \lambda\omega)^k \mu^p$$

erfüllt, ist μ der Eigenwert der Matrix \mathbf{B} . Falls dagegen μ ein Eigenwert der

Matrix \mathbf{B} ist, dann ist jede der Gleichung (6) ($\omega \neq 0$) genügende Zahl λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{T}(\omega)$.

Vor dem Beweis des Satzes 1 führen wir folgende zwei Hilfssätze an:

2. Es sei R ein Vektorraum, der durch die direkte Summe von p nichtleeren Vektorräumen u_1, \dots, u_p gebildet ist. Besitzt ferner der beschränkte, den Vektorraum R in R abbildende Operator \mathbf{B} die Eigenschaft

$$(7) \quad \mathbf{B}u_i \subset u_{i+1}, \quad i = 1, \dots, p,$$

wo l eine gewisse ganze Zahl ist und wo der Ausdruck u_{i+1} modulo p aufgefasst wird, und ist weiter μ ein Eigenwert des Operators \mathbf{B} , dann sind auch die Zahlen $\zeta\mu$, wo ζ eine beliebige p -te Wurzel von 1 bezeichnet, Eigenwerte des Operators \mathbf{B} .

3. Falls μ^p ein Eigenwert des Operators \mathbf{B}^p ist, dann ist die Zahl μ ein Eigenwert des Operators \mathbf{B} .

Der Hilfssatz 3 folgt aus dem Hilfssatz 2. Für den Beweis des Hilfssatzes 2 siehe [1] und [2].

Beweis des Satzes 1. Der Beweis wird mit Hilfe der Methode von G. Kjellberg ([2]) durchgeführt. Man setze zuerst voraus, dass $\omega \neq 1$ ist. Es sei λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{T}(\omega)$ und \mathbf{x} der entsprechende Eigenvektor. Aus (4') folgt dann

$$(\mathbf{E} - \omega\mathbf{L})^{-1} [(1 - \omega)\mathbf{L} + \mathbf{U}] \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x},$$

d. h.

$$(8) \quad \lambda \mathbf{x} = [(1 - \omega + \lambda\omega)\mathbf{L} + \mathbf{U}] \mathbf{x}.$$

Wir bezeichnen $1 - \omega + \lambda\omega = \tau$. Es gilt dabei, dass $\tau \neq 0$ ist. Wäre nämlich $\tau = 1 - \omega + \lambda\omega = 0$, würde $\lambda = (\omega - 1)/\omega$ sein und aus der Beziehung (8) würde dann

$$\frac{\omega - 1}{\omega} \mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{x}$$

folgen. Da $\omega \neq 1$ ist, hat die Matrix \mathbf{U} einen von Null verschiedenen Eigenwert $(\omega - 1)/\omega$; das ist aber ein Widerspruch, da alle Diagonalblöcke der Matrix \mathbf{U} regulär sind. Es ist also

$$\lambda \mathbf{x} = (\tau\mathbf{L} + \mathbf{U}) \mathbf{x},$$

sodass

$$(9) \quad \lambda^p \mathbf{x} = (\tau\mathbf{L} + \mathbf{U})^p \mathbf{x}.$$

Den Ausdruck $(\tau\mathbf{L} + \mathbf{U})^p$ entwickelt man nach den Potenzen τ^s , $s = 0, \dots, p$. Es gilt

$$(10) \quad (\tau\mathbf{L} + \mathbf{U})^p = \sum_{s=0}^p \tau^s \{L^s \mathbf{U}^{p-s}\},$$

wo der Ausdruck $\{\mathbf{L}^s \mathbf{U}^{p-s}\}$ die Summe von $\binom{p}{s}$ Glieder darstellt, welche als Produkte von Matrizen \mathbf{L} und \mathbf{U} gebildet werden, wobei \mathbf{L} in jedem Produkt s -mal und \mathbf{U} $(p-s)$ -mal vorkommt. Angesichts (5) gilt

$$\{\mathbf{L}^s \mathbf{U}^{p-s}\} \mathbf{x}_i \in v_{i+sh-(p-s)k} = v_{i+p(s-k)}.$$

Es ist also

$$(\tau \mathbf{L} + \mathbf{U})^p \mathbf{x}_{i-p(s-k)} \in v_{i-p(s-k)+p(s-k)} = v_i$$

und aus (9) folgt

$$\lambda^p \mathbf{x}_i = (\tau \mathbf{L} + \mathbf{U})^p \mathbf{x}_{i-p(s-k)}$$

oder

$$\lambda^p \mathbf{x}_i = \sum_{s=0}^p \tau^s \{\mathbf{L}^s \mathbf{U}^{p-s}\} \mathbf{x}_{i-p(s-k)} = \sum_{s=0}^p \tau^s \{\mathbf{L}^s \mathbf{U}^{p-s}\} \mathbf{x}_{i+p(k-s)}.$$

Für jedes i , $1 \leq i \leq m$, wählen wir nun ganze Zahlen $1 \leq j \leq p$ und $t \geq 0$, sodass $i = j + tp$ gilt. Dann definieren wir die Vektoren \mathbf{y}_i durch die Formel

$$(11) \quad \mathbf{x}_i = \tau^t \mathbf{y}_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Dadurch ist der Vektor \mathbf{y} als die direkte Summe der Vektoren \mathbf{y}_i , $i = 1, \dots, m$ definiert. Solange nun $i + p(k-s) < 1$ oder $i + p(k-s) > m$ gilt, ist $v_{i+p(k-s)} = 0$ und es ist also $\mathbf{x}_{i+p(k-s)} = 0$. Falls $1 \leq i + p(k-s) \leq m$ ist, ist $i + p(k-s) = j + tp + p(k-s) = j + (t+k-s)p$ und es gilt $\mathbf{x}_{i+p(k-s)} = \tau^{t+k-s} \mathbf{y}_{i+p(k-s)}$. Man bekommt also schrittweise

$$\lambda^p \tau^t \mathbf{y}_i = \sum_{s=0}^p \tau^{s+t+k-s} \{\mathbf{L}^s \mathbf{U}^{p-s}\} \mathbf{y}_{i+p(k-s)},$$

$$\lambda^p \mathbf{y}_i = \tau^k \sum_{s=0}^p \{\mathbf{L}^s \mathbf{U}^{p-s}\} \mathbf{y}_{i+p(k-s)},$$

$$(12) \quad \lambda^p \mathbf{y} = \tau^k (\mathbf{L} + \mathbf{U})^p \mathbf{y},$$

$$(13) \quad \frac{\lambda^p}{\tau^k} \mathbf{y} = (\mathbf{L} + \mathbf{U})^p \mathbf{y},$$

da $\tau \neq 0$ ist. Daraus folgt, dass die Matrix $(\mathbf{L} + \mathbf{U})^p = \mathbf{B}^p$ den Eigenwert $\lambda^p / \tau^k = \lambda^p / (1 - \omega + \lambda \omega)^k$ besitzt. Die Matrix \mathbf{B} ist aber eine zyklische Matrix vom Index p ; wenn wir nämlich die Unterräume u_j ($j = 1, \dots, p$) durch die Beziehung

$$u_j = v_j + v_{j+p} + v_{j+2p} + \dots \quad (j = 1, \dots, p)$$

definieren, gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{B}u_j &= \mathbf{L}u_j + \mathbf{U}u_j = \mathbf{L}(v_j + v_{j+p} + v_{j+2p} + \dots) + \mathbf{U}(v_j + v_{j+p} + v_{j+2p} + \dots) \in \\ &\subset (v_{j+h} + v_{j+p+h} + v_{j+2p+h} + \dots) + (v_{j-k} + v_{j+p-k} + v_{j+2p-k} + \dots) \subset \\ &\subset v_{j-k} + v_{j-k+p} + v_{j-k+2p} + \dots = u_{j-k} \end{aligned}$$

und es ist also $\mathbf{B}u_j \subset u_{j-k}$. Falls nun die Zahl μ die Beziehung (6) erfüllt, ist $\mu^p = \lambda^p / (1 - \omega + \lambda\omega)^k$ und die Zahl μ^p ist also ein Eigenwert der Matrix \mathbf{B}^p . Nach Hilfssatz 2 ist die Zahl μ ein Eigenwert der Matrix \mathbf{B} .

Es sei im Gegenteil μ ein Eigenwert der Matrix \mathbf{B} , sodass μ^p ein Eigenwert der Matrix \mathbf{B}^p ist, und die Zahl λ erfülle die Beziehung (6). Man setze voraus, dass die Zahl μ^p dem Eigenvektor \mathbf{y} entspricht. Da $\omega \neq 1$ ist, ist $\tau = (1 - \omega + \lambda\omega) \neq 0$ und nach Beziehung (6) folgt (13). Nach der Substitution (11) folgt dann (9). Da beide Matrizen $\tau\mathbf{L} + \mathbf{U}$ und \mathbf{B} die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 erfüllen, ist λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{T}(\omega)$, was wir beweisen sollten.

Es bleibt noch der Fall $\omega = 1$ zu untersuchen.

Falls $\omega = 1$, $\lambda \neq 0$ ist, ist die Zahl $\tau = 1 - \omega + \lambda\omega = \lambda \neq 0$. Da die Gültigkeit des Beweises nur davon abhängt, dass $1 - \omega + \lambda\omega \neq 0$ ist, ist die Behauptung des Satzes für diesen Fall bewiesen.

Es sei $\omega = 1$ und $\mu \neq 0$. Die Gleichung (6) hat dann die Form $\lambda^p = \lambda^k \mu^p$. Dieser Gleichung genügt zuerst die Zahl $\lambda = 0$. In diesem Falle gilt unser Satz, da $\lambda = 0$ wirklich der Eigenwert der Matrix $\mathbf{T}(1)$ ist (das folgt sofort nach der Substitution $\omega = 1$ und $\lambda = 0$ in die Beziehung (8)). Man untersuche jetzt eine beliebige Wurzel der Gleichung $\lambda^p = \lambda^k \mu^p$. Da $\tau = 1 - \omega + \lambda\omega = \lambda \neq 0$ ist, kann man den Beweis ähnlich wie im Falle $\omega \neq 1$ durchführen.

Es sei $\omega = 1$ und $\mu = 0$. Die Gleichung (6) hat dann die Form $\lambda^p = 0$, d. h. $\lambda = 0$. Da die Zahl $\lambda = 0$ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{T}(1)$ ist, ist der Satz 1 voll bewiesen.

Ferner werden wir uns mit dem wichtigen Fall $p = 2$, $h = k = 1$ befassen. In diesem Falle hat die Beziehung (6) die Form

$$(14) \quad \lambda^2 = (1 - \omega + \lambda\omega) \mu^2.$$

Wir werden dabei voraussetzen, dass das der Matrix \mathbf{B} entsprechende Jacobi-Verfahren konvergent ist, d. h. dass der Spektralradius $\varrho(\mathbf{B})$ der Matrix \mathbf{B} kleiner als 1 ist. Man setze ferner voraus, dass die Matrix \mathbf{B}^2 reelle, nichtnegative Eigenwerte besitzt. Es gilt der folgende Satz:

4. Falls die Matrix \mathbf{B} die oben eingeführte Voraussetzungen erfüllt, gilt die folgende Behauptung:

a) Falls $\frac{1}{2}(1 - 1/\varrho^2(\mathbf{B})) < \omega < 1 + 1/\varrho^2(\mathbf{B})$ ist, ist $\varrho(\mathbf{T}(\omega)) < 1$;

b) Der Parameter ω_b , für welchen der Ausdruck $\varrho(\mathbf{T}(\omega))$ minimal ist, liegt im Intervalle $1 < \omega < 2$ und es gilt

$$\omega_b = \frac{2}{1 + \sqrt{(1 - \varrho^2(\mathbf{B}))}}.$$

Dabei ist

$$\varrho(\mathbf{T}(\omega_b)) = \frac{\varrho^2(\mathbf{B})}{1 + \sqrt{(1 - \varrho^2(\mathbf{B}))}}.$$

Beweis. Da die Matrix \mathbf{B}^2 nach der Voraussetzung nichtnegative Eigenwerte μ_i^2 besitzt, hat die Matrix \mathbf{B} nach dem Hilfssatz 2 reelle Eigenwerte $\pm\mu_i$. Man kann jetzt voraussetzen, dass $\mu_i \neq 0$ ist, da der Zahl $\mu_i = 0$ nach dem Satz 3 der Eigenwert $\lambda = 0$ der Matrix $\mathbf{T}(\omega)$ entspricht. In Hinsicht darauf, dass die Zahl μ in der Gleichung (14) im Quadrate steht, können wir voraussetzen, dass

$$0 < \mu_i \leq \varrho(\mathbf{B})$$

ist. Die Gleichung (14) schreiben wir in der Form

$$(15) \quad \frac{\lambda^2}{\mu_i^2} = 1 - \omega + \lambda\omega$$

und definieren die Funktionen

$$m_i(\lambda) = \frac{\lambda^2}{\mu_i^2}, \quad g_\omega(\lambda) = 1 - \omega + \lambda\omega$$

(siehe Abb. 1).

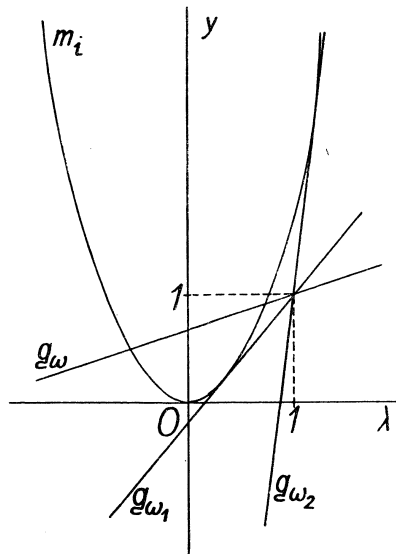


Abb. 1.

Die graphische Darstellung der Funktion m_i ist eine Parabel mit dem Scheitelpunkt im Koordinatenursprung und die graphische Darstellung der Funktion g_ω ist eine durch den Punkt [1,1] gehende Gerade, deren Anstieg gleich ω ist. Die die Formel (15) erfüllenden Punkte λ_i stellen nach dem Satz 1 die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{T}(\omega)$ dar; vom geometrischen Gesichtspunkte aus sind diese Werte λ_i die λ -Koordinaten der Schnittpunkte der Kurven $y = m_i(\lambda)$ und $y = g_\omega(\lambda)$. Zu jeder Zahl μ_i existieren

dann offensichtlich zwei reelle oder imaginäre Werte λ_{i1} und λ_{i2} (die eventuell auch gleich sein können) je nachdem, ob die Gerade die Parabel schneidet (bzw. ihre Tangente bildet), oder ob keine reellen Schnittpunkte existieren.

Aus der Gleichung (15) folgt sofort, dass die dem Eigenwert μ_i der Matrix \mathbf{B} entsprechenden Zahlen $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}$ die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 - \lambda\omega\mu_i^2 + (\omega - 1)\mu_i^2 = 0$$

sind, d. h. dass

$$(16) \quad \begin{aligned} \lambda_{i1} &= \frac{1}{2}\omega\mu_i^2 - \frac{1}{2}\sqrt{(\omega^2\mu_i^4 - 4\omega\mu_i^2 + 4\mu_i^2)}, \\ \lambda_{i2} &= \frac{1}{2}\omega\mu_i^2 + \frac{1}{2}\sqrt{(\omega^2\mu_i^4 - 4\omega\mu_i^2 + 4\mu_i^2)} \end{aligned}$$

ist.

Die Gerade $y = g_\omega(\lambda)$ ist die Tangente der Parabel für solche ω , die die Gleichung

$$\omega^2\mu_i^4 - 4\omega\mu_i^2 + 4\mu_i^2 = 0$$

erfüllen. Das sind aber die Zahlen $\omega_1 = 2/(1 + \sqrt{1 - \mu_i^2})$, $\omega_2 = 2/(1 - \sqrt{1 - \mu_i^2})$. Es ist offensichtlich

$$1 < \omega_1 < 2 < \omega_2.$$

Für $\omega \in (-\infty, \omega_1)$ und $\omega \in (\omega_2, \infty)$ existieren reelle Schnittpunkte beider Kurven, wogegen für $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$ die Schnittpunkte imaginär sind.

Wir werden jetzt das Problem lösen, für welche Werte des Parameters ω die Ungleichung $\max(|\lambda_{i1}|, |\lambda_{i2}|) < 1$ gilt. Betrachten wir zuerst das Intervall $(-\infty, 0)$. Hier sind die Zahlen $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}$ reell und es ist offensichtlich $|\lambda_{i1}| > |\lambda_{i2}|$, wobei $\lambda_{i1} < 0$ ist. Es ist also $|\lambda_{i1}| = -\lambda_{i1}$. Aus der Ungleichung $\max(|\lambda_{i1}|, |\lambda_{i2}|) = -\lambda_{i1} < 1$ und aus (16) folgt sofort

$$-\frac{1}{2}\omega\mu_i^2 + \frac{1}{2}\sqrt{(\omega^2\mu_i^4 - 4\omega\mu_i^2 + 4\mu_i^2)} < 1.$$

Nach einfachen Umformungen bekommt man nun die Ungleichung

$$(17) \quad \frac{1}{2}(1 - 1/\mu_i^2) < \omega.$$

Man untersuche ferner das Intervall $(0, \omega_1)$. In diesem Intervalle ist offensichtlich $|\lambda_{i1}| < |\lambda_{i2}|$, $\lambda_{i2} > 0$ und $0 < \lambda_{i1} < 1$. Es gilt also $\max(|\lambda_{i1}|, |\lambda_{i2}|) = \lambda_{i2} < 1$ im ganzen Intervalle $(0, \omega_1)$.

Man untersuche nun das Intervall (ω_1, ω_2) . Hier existieren zwei komplex konjugierte Schnittpunkte

$$\lambda_{i1,2} = \frac{1}{2}\omega\mu_i^2 \mp \frac{1}{2}i\sqrt{(4\omega\mu_i^2 - \omega^2\mu_i^4 - 4\mu_i^2)}.$$

Es ist also

$$|\lambda_{i1}|^2 = |\lambda_{i2}|^2 = \frac{1}{4}(\omega^2\mu_i^4 + 4\omega\mu_i^2 - \omega^2\mu_i^4 - 4\mu_i^2) = (\omega - 1)\mu_i^2.$$

Aus der Ungleichung $(\omega - 1) \mu_i^2 < 1$ folgt sofort die Ungleichung

$$(18) \quad \omega_1 < \omega < 1 + \frac{1}{\mu_i^2}.$$

Es ist offensichtlich $1 + 1/\mu_i^2 < \omega_2$.

Im Intervalle $\langle \omega_2, \infty \rangle$ existieren wieder zwei reelle (für ω_2 identische) Schnittpunkte und es ist $|\lambda_{i2}| = \lambda_{i2} > 1$.

Aus den obigen Betrachtungen (siehe (17) und (18)) folgt, dass $\max(|\lambda_{i1}|, |\lambda_{i2}|) < 1$ für alle ω aus dem Intervall

$$(19) \quad \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\mu_i^2} \right) < \omega < 1 + \frac{1}{\mu_i^2}$$

gilt.

Der Durchschnitt der Intervalle (19) für alle μ_i ist dann das Intervall

$$(20) \quad \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\varrho^2(\mathbf{B})} \right) < \omega < 1 + \frac{1}{\varrho^2(\mathbf{B})}.$$

Für die Werte des Parameters aus diesem Intervalle ist dann $\varrho(\mathbf{T}(\omega)) < 1$, wodurch die Behauptung a) des Satzes 4 bewiesen ist.

Man wähle nun die Zahl μ_i fest und man frage, für welchen Betrag des Parameters ω_i der Ausdruck $\max(|\lambda_{i1}|, |\lambda_{i2}|)$ minimal ist. Es ist klar, dass diese Zahl ω_i im Intervalle (19) liegt. Das Intervall (19) teilt man jetzt in zwei Intervalle:

$$I_1 = \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\mu_i^2} \right), \omega_1 \right), \quad I_2 = \left(\omega_1, 1 + \frac{1}{\mu_i^2} \right).$$

Für ω aus dem erstem Intervall sind die Zahlen $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}$ reell, für ω aus zweitem Intervall imaginär.

Man untersuche jetzt das Intervall I_2 . Hier ist

$$|\lambda_{i1}|^2 = |\lambda_{i2}|^2 = (\omega - 1) \mu_i^2,$$

wobei die Funktion $(\omega - 1) \mu_i^2$ im Intervalle I_2 wachsend ist und kein Minimum in I_2 annimmt. Man untersuche also das Intervall I_1 . In diesem Intervalle ist offensichtlich der Ausdruck $\max(|\lambda_{i1}|, |\lambda_{i2}|)$ minimal, falls $\lambda_{i1} = \lambda_{i2}$ ist (d. h. im Falle, wenn die Gerade g_ω eine Tangente der Parabel m_i darstellt). Das tritt, wie man schon weiss, für $\omega = \omega_1 = 2/(1 + \sqrt{1 - \mu_i^2})$ ein. Angesichts dessen, dass die Parabel $y = m_i(\lambda) = \lambda^2/\varrho^2(\mathbf{B})$ eine Umhüllungslineie aller Parabeln $y = m_i(\lambda)$ darstellt gleicht der Optimalparameter ω_b der Zahl

$$\omega_b = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \varrho^2(\mathbf{B})}}$$

und es ist offensichtlich $1 < \omega_b < 2$. Nach (16) folgt sofort die Beziehung

$$\varrho(T(\omega_b)) = \frac{\varrho^2(\mathbf{B})}{1 + \sqrt{1 - \varrho^2(\mathbf{B})}}.$$

Dadurch ist der Satz 4 bewiesen.

Literaturverzeichnis

- [1] Romanovsky, V.: Recherches sur les chaines de Markoff. Acta Math., 66, 1936, 147–251.
- [2] Kjellberg, G.: On the successive over-relaxation method for cyclic operators. Numerische Math., 3, 1961, 87–91.
- [3] Varga, R. S.: Matrix Iterative Analysis. Prentice-Hall, INC, 1962.

Souhrn

O JEDNÉ ITERAČNÍ METODĚ PRO CYKlickÉ MATICE

MIROSLAV ŠISLER

Práce se zabývá otázkami rychlosti konvergence jisté iterační metody pro řešení soustavy lineárních rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Iterační metoda je dána předpisem

$$\mathbf{x}_{v+1} = T(\omega) \mathbf{x}_v + \mathbf{b}', \quad v = 0, 1, \dots,$$

kde $T(\omega) = (\mathbf{E} - \omega\mathbf{L})^{-1} [(1 - \omega)\mathbf{L} + \mathbf{U}]$, $\mathbf{L} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{P}$, $\mathbf{U} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{R}$, $\mathbf{b}' = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{P} - \mathbf{R}$ a číslo ω je parameter. (Pro $\omega = 0$ přechází zřejmě tato metoda v Jacobiho metodu, pro $\omega = 1$ v Gauss-Seidelovu metodu.) V práci předpokládáme, že matice $\mathbf{B} = \mathbf{L} + \mathbf{U}$ představuje lineární operátor zobrazující vektorový prostor R do R , přičemž tento vektorový prostor je direktním součtem prostorů v_1, \dots, v_m a dále předpokládáme, že matice \mathbf{L} a \mathbf{U} vyhovují podmínkám $\mathbf{L}v_i \subset v_{i+h}$, $\mathbf{U}v_i \subset v_{i-k}$, $i = 1, \dots, m$, kde h, k jsou celá čísla, $h + k = p$ a h, k, p nemají společného dělitele (klademe $v_i = 0$ pro $i < 1$ a $i > m$). Za těchto předpokladů je dokázána formule (6), vyjadřující souvislost mezi vlastními čísly matice $T(\omega)$ a matice $T(0) = \mathbf{B}$.

Pro případ $p = 2$, $h = k = 1$ je řešena otázka, pro která ω je spektrální poloměr matice $T(\omega)$ menší než 1 a je dále nalezen optimální parametr ω , pro nějž je spektrální poloměr matice $T(\omega)$ minimální.

Anschrift des Verfassers: Dr. Miroslav Šisler, CSc., Matematický ústav ČSAV v Praze, Žitná 25, Praha 1.