František Zítek

Über die Kundenreihenfolge in Systemen $M/E_r/1$

Aplikace matematiky, Vol. 17 (1972), No. 3, 191–208

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103409`

ÜBER DIE KUNDENREIHENFOLGE IN SYSTEMEN $M/E_r/1$

FRANTIŠEK ZÍTEK

(Eingelangt am 12. März 1971)

In diesem Artikel wollen wir die Untersuchungen unserer früheren Arbeit [7] fortsetzen und für die Bedienungssysteme des Typs $M/E_r/1$ dieselben Probleme betrachten, die wir in [7] nur für die Systeme $M/M/n$ gelöst haben. Es wird sich vor allem um ein Studium der Änderungen der Kundenreihenfolge handeln, welche in Bedienungssystemen mit einer Vašíčekschen Warteordnung (s. [5], bzw. [7], § 5 und 6) während der Wartezeit vorkommen.

1. Die Systeme $M/E_r/1$

Zuerst möchten wir hier an einige einfache Ergebnisse erinnern, welche für die Systeme $M/E_r/1$ wohlbekannt sind. Die Eintreffenszeitpunkte der Kunden in einem solchen System bilden einen homogenen Poissonprozeß mit dem Parameter λ, $0 < \lambda < \infty$; die Bedienungszeiten der Kunden sind voneinander unabhängige Zufallsgrößen mit derselben Erlang-Verteilung mit den Parametern μ, $0 < \mu < \infty$ und r, $r = 1, 2, 3, \ldots$ Wir setzen immer voraus, daß $r\lambda < \mu$, d. h. $\varrho = r\lambda/\mu < 1$ ist, so daß sich das System stabilisieren kann. Im folgenden werden wir uns stets nur für stabilisierte Systeme (Systeme im Gleichgewicht) interessieren.

Die Erlang-Verteilung der Bedienungszeiten wird gewöhnlich so interpretiert, daß man die gesamte Bedienungszeit eines Kunden als aus r voneinander unabhängigen Phasen bestehend betrachtet; jede Phase ist exponentialverteilt mit dem Parameter μ. Dasselbe Model läßt jedoch noch eine andere Interpretation zu (s. z.B. [6], S. 122 bis 123), und zwar als ein Bedienungssystem mit exponentialverteilten Bedienungszeiten aber mit Gruppeneingang: in den Zeitpunkten, die durch den Poissonprozeß bestimmt sind, kommt immer je eine Gruppe von genau r Kunden ein. Die Kunden, die eine und dieselbe Gruppe bilden, bleiben immer gemeinsam im System; sie trennen sich weder während der Wartezeit noch während der Bedienung voneinander und verlassen dann auch alle gemeinsam das System; erst wenn der letzte Kunde der

Gruppe bedient ist, wird die Bedienungsstelle frei und kann eine andere Kundengruppe einnehmen.

Um jedenfalls alle möglichen Mißverständnisse zu vermeiden, werden wir hier das Wort „Kunde" nur in dem ersten Sinne verwenden; wir werden also stets über Kunden und (ihre) Phasen sprechen und nicht über Kundengruppen und einzelne Kunden, auch wenn wir auf diese Weise manchmal weniger natürliche Formulationen bekommen. Zu dem Fall der Systeme mit Gruppeneingang kehren wir erst am Ende unserer Arbeit wieder zurück.

Es sei nun X die Anzahl der Phasen und Y die Anzahl der Kunden, die in unserem System $M/E_r/1$ im Gleichgewicht zu einem gewissen, willkürlich (zufällig) gewählten Zeitpunkt anwesend sind, und es seien

$$p_j = \mathbf{P}\{X = j\}, \quad p_j^* = \mathbf{P}\{Y = j\}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.1}$$

die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Da die Größen X und Y gegeneinander in folgenden Beziehungen stehen

$$\begin{gathered} X = 0 \Leftrightarrow Y = 0, \\ kr - r < X \leqq kr \Leftrightarrow Y = k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \end{gathered}$$

gelten für die Wahrscheinlichkeiten (1.1) die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} p_0^* &= p_0, \\ p_k^* &= \sum_{j=1}^{r} p_{kr-r+j}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \end{aligned} \tag{1.2}$$

die es uns ermöglichen, die Wahrscheinlichkeiten p_k^* aus den p_k zu berechnen.

Das ist wichtig, denn für die Wahrscheinlichkeiten p_j ($j = 0, 1, 2, \ldots$) können wir leicht auf gewöhnliche Weise die folgenden linearen Gleichungen herleiten (vgl. auch die Gleichungen (IV.2.2) in [6])

$$\begin{aligned} p_1 &= \beta p_0, \\ p_j &= (1 + \beta)\, p_{j-1}, && 1 < j \leqq r, \\ p_j &= (1 + \beta)\, p_{j-1} - \beta p_{j-r}, && r < j, \end{aligned} \tag{1.3}$$

wo $\beta = \lambda/\mu = \varrho/r$ ist. Zu den Gleichungen (1.3) gehört natürlich noch die Bedingung

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1. \tag{1.4}$$

Aus (1.3) und (1.4) können wir also die Wahrscheinlichkeiten p_j und daraus dann mit Hilfe von (1.2) auch die Wahrscheinlichkeiten p_j^* berechnen.

Zu diesen Rechnungen eignet sich u. a. die Methode der erzeugenden Funktionen.

Es sei

$$G(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j ;$$

aus den Gleichungen (1.3) können wir dann für die Funktion $G(z)$ die Gleichung

$$G(z) - p_0 = \beta z\, G(z) + z[G(z) - p_0] - \beta z^{r+1}\, G(z)$$

herleiten, so daß

$$G(z) = \frac{p_0(1 - z)}{(1 - z) - \beta z(1 - z^r)} = \frac{p_0}{1 - \beta \sum_{j=1}^{r} z^j} \tag{1.5}$$

ist. Aus (1.4) folgt $G(1) = 1$, also ist

$$p_0 = 1 - r\beta = 1 - \varrho .$$

Wir bekommen also endgültig die Formeln

$$\begin{aligned} G(z) &= (1 - \varrho)\,[1 - (\varrho/r) \sum_{j=1}^{r} z^j]^{-1} = \\ &= (1 - \varrho) \sum_{j=0}^{\infty} (\varrho/r)^j\,(z + z^2 + \ldots + z^r)^j = \\ &= (1 - r\beta) \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j (z + z^2 + \ldots + z^r)^j , \end{aligned} \tag{1.6}$$

(vgl. die Formel (4.165) in [1], S. 134, oder die Formel (6–58) in [3], S. 165).

Die entwickelten Ausdrücke für die Wahrscheinlichkeiten p_j und p_j^*, welche aus (1.6) folgen, sind ziemlich kompliziert (vgl. z.B. [3], S. 165); deswegen werden wir uns mit den Formeln (1.5) und (1.6) begnügen, die ja für unsere Zwecke ganz hinreichend sind.

Allerdings wollen wir aber hier noch eine interessante Gleichheit herbeiführen, die wir auch später noch anwenden werden. Für $j = 1, 2, \ldots, r$ gilt nämlich

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{kr+j} = \beta = \varrho/r . \tag{1.7}$$

Tatsächlich, gemäß (1.3) haben wir für $j = 2, 3, \ldots, r$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{kr+j} = p_j + \sum_{k=1}^{\infty} p_{kr+j} = (1 + \beta)\, p_{j-1} + (1 + \beta) \sum_{k=1}^{\infty} p_{kr+j-1} - \beta \sum_{k=1}^{\infty} p_{kr+j-r-1} =$$

$$= (1 + \beta - \beta) \sum_{k=0}^{\infty} p_{kr+j-1} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{kr+j-1} ,$$

so daß die Summe auf der linken Seite von (1.7) von j unabhängig ist (für $j = 1, 2, \ldots, r$). Da aber offenbar

$$\varrho = 1 - p_0 = \sum_{j=1}^{\infty} p_j = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=0}^{\infty} p_{kr+j} = r \sum_{k=0}^{\infty} p_{kr+1}$$

ist, so gilt tatsächlich (1.7).

Die Gleichheit (1.7) ist auch leicht zu interpretieren: Setzen wir voraus, daß zu einem zufällig gewählten Zeitpunkt (also z.B. zum Eintreffenszeitpunkt eines beliebigen, zufällig gewählten Kunden – vgl. [4]), die Bedienung besetzt ist, da können wir die Verteilung der Anzahl der noch zu bedienenden Phasen suchen. Aus (1.7) ergibt sich, daß diese Verteilung eine Gleichverteilung ist: jeder mögliche Wert $1, 2, \ldots, r$ hat dieselbe Wahrscheinlichkeit r^{-1}.

2. Die gemischte Warteordnung; die Kundenüberholungen

Um unser Bedienungssystem vollständig zu beschreiben, müssen wir noch die in ihm angewandte Warteordnung angeben. Die Wahrscheinlichkeiten p_j und p_j^* sind von der Warteordnung unabhängig, aber andere Charakterististiken des Systems, wie z.B. die Wartezeitverteilung, die uns auch interessiert, hängen von der Warteordnung wesentlich ab.

Als erste werden wir hier die sogenannte gemischte Warteordnung (s. z.B. [7], Absatz 3 des Paragraphen 6, oder auch [5] und [6], S. 97–98) betrachten. Die kann man so beschreiben: Jeder in das System neu eintreffende Kunde, der nicht gleich ohne Warten bedient werden kann, wählt im Zeitpunkt seines Eintreffens unabhängig von den anderen Kunden seinen Platz in der Schlange, und zwar so, daß er sich mit einer fest gegebenen Wahrscheinlichkeit ϑ $(0 \leqq \vartheta \leqq 1)$ auf dem ersten Platz und mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \vartheta$ auf dem letzten Platz in die Schlange einreiht (wenn im System noch keine Schlange steht, fallen die beiden Fälle zusammen). Nach dem Einreihen ändert sich die Reihenfolge der in der Schlange stehenden Kunden nicht mehr. Wenn die Bedienungsstelle frei wird, so wird immer der erste Kunde von der Schlange in die Bedienung eingenommen.

Diese Warteordnung bildet einen Spezialfall der allgemeinen Vašíčekschen Warteordnung (s. [5], [7]). Wir haben eben diese Warteordnung gewählt, da sie schon ziemlich allgemein ist – so sind z.B. die natürliche (falls $\vartheta = 0$) wie auch die inverse (falls $\vartheta = 1$) Warteordnung Spezialfälle der gemischten Warteordnung – und da gleichzeitig es noch möglich ist, bei der gemischten Warteordnung die Lösung der gestellten Aufgaben bis zu relativ konkreten Ergebnissen und expliziten Formeln zuzuführen, was im Fall der allgemeinen Vašíčekschen Warteordnung bisher nicht einmal für die einfachsten Systeme des Typs $M/M/1$ gelungen ist.

Wenn in unserem System eine gemischte Warteordnung gilt (mit etwa $\vartheta > 0$), so kommen wirklich auch Kundenüberholungen vor, und zwar in den Augenblicken, wenn sich ein neuer Kunde in die Schlange auf dem ersten Platz einreiht. Wir können uns also wie in [7] für die Verteilung der Anzahl der aktiven, bzw. passiven Überholungen eines Kunden interessieren.

Genau wie in den Systemen $M/M/n$ in [7] ist auch hier die Anzahl der *aktiven* Überholungen des betrachteten Kunden endgültig schon im Zeitpunkt seines Eintreffens in das System bestimmt. Es gilt (vgl. [7], S. 379)

$$P_{\text{akt}}(k) = \vartheta p_{k+1}^* = \vartheta \sum_{j=1}^{r} p_{kr+j}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.1}$$

und

$$\begin{aligned} P_{\text{akt}}(0) &= p_0^* + p_1^* + (1 - \vartheta) \sum_{j=2}^{\infty} p_j^* = \\ &= 1 - \vartheta \sum_{j=2}^{\infty} p_j^* = 1 - \vartheta\varrho + \vartheta p_1^* . \end{aligned} \tag{2.2}$$

Bei dem Untersuchen der *passiven* Überholungen werden wir wieder dem Beispiel der Arbeit [7] folgen: wir werden nämlich die Lage unseres Kunden in der Schlange und ihre Änderungen während seiner Wartezeit betrachten, also von dem Augenblick seines Eintreffens in das System bis zu dem Zeitpunkt, in dem er in die Bedienungsstelle eintritt. Die Lage unseres Kunden $\mathscr{K}$ werden wir aber hier immer durch die Anzahl L der Phasen bestimmen, welche entweder eben bedient werden (also in der Bedienungsstelle sind) oder noch auf die Bedienung in der Schlange warten, aber vor unserem Kunden $\mathscr{K}$ in der Schlange stehen. Der Wert $L = 0$ bedeutet dann die Lage eines Kunden, der schon die Bedienung erreicht hat (also nicht mehr schlangesteht); wenn einmal $L = 0$ wird, kann sich L nicht mehr ändern.

Im Augenblicke seines Eintreffens in das Bedienungssystem nimmt unser Kunde $\mathscr{K}$ eine gewisse Anfangslage ein, welche einerseits von der Situation im System zu diesem Zeitpunkt abhängt, d. h. von der Anzahl der eben anwesenden Phasen, andererseits aber auch davon, ob der Kunde $\mathscr{K}$ den ersten oder den letzten Platz in der Schlange einnimmt. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind dann offensichtlich

$$\begin{aligned} q_0 &= \mathbf{P}\{L = 0\} = p_0 = 1 - \varrho , \\ q_j &= \mathbf{P}\{L = j\} = p_j + \vartheta \sum_{k=1}^{\infty} p_{kr+j} = \\ &= (1 - \vartheta)\, p_j + \vartheta\beta \qquad \text{für} \quad 1 \leqq j \leqq r , \\ q_j &= \mathbf{P}\{L = j\} = (1 - \vartheta)\, p_j \quad \text{für} \quad r < j . \end{aligned} \tag{2.3}$$

Deren erzeugende Funktion bezeichnen wir

$$Q(z) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j z^j . \tag{2.4}$$

Solange der Kunde $\mathscr{K}$ in der Schlange steht, ändert sich schrittweise seine Lage L, bis sie zum Endwert $L = 0$ gelangt. Die Lage L kann sich natürlich nur in solchen Zeitpunkten ändern, in welchen sich die Anzahl der im System anwesenden (und noch immer nicht bedienten) Phasen ändert. Das geschieht nur dann, wenn entweder die Bedienung einer Phase vollendet wird – da verkleinert sich L um 1 – oder wenn ein neuer Kunde in das System eintrifft; der reiht sich dann entweder auf dem ersten Platz in die Schlange ein – und da vergrößert sich L um r – oder auf dem letzten Platz – dabei bleibt L unverändert. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die *erste* nachfolgende Änderung der Phasenanzahl im System dadurch verursacht wird, daß ein neuer Kunde in das System eintrifft, bzw. daß die Bedienung einer Phase vollendet wird, sind stets $\lambda(\mu + \lambda)^{-1}$, bzw. $\mu(\mu + \lambda)^{-1}$ gleich, unabhängig von dem Zeitpunkt, in dem die Änderung geschieht, von der gegenwärtigen Lage L unseres Kunden sowie auch von der Gesamtanzahl der Phasen im System (solange $\mathscr{K}$ wartet, ist das System sicher nicht leer und die Bedienungsstelle arbeitet).

Aus allen diesen Tatsachen ergibt sich, daß der Prozeß, der die Änderungen der Lage L unseres Kunden $\mathscr{K}$ beschreibt – wenn wir uns nur auf die Änderungen selbst begrenzen, ohne die dazu verbrauchte Zeit zu betrachten – eine homogene Markovsche Kette ist, mit möglichen Zuständen 0, 1, 2, ... und den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$(2.5) \qquad p_{00} = 1\,,$$

$$p_{jj-1} = \frac{\mu}{\mu + \lambda}\,, \quad p_{jj} = \frac{(1 - \vartheta)\,\lambda}{\mu + \lambda}\,, \quad p_{jj+r} = \frac{\vartheta\lambda}{\mu + \lambda}\,, \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

$$p_{jk} = 0 \quad \text{in anderen Fällen.}$$

Der Zustand 0 ist absorbierend. Die Anfangsverteilung ist durch die Formeln (2.3) gegeben.

Bezeichnen wir wieder $P(k, j)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Kunde $\mathscr{K}$, der eben die Lage $L = j$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ besitzt, noch k-mal $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ überholt wird, bevor er selbst in die Bedienung gelangt. Ähnlich wie in [7] können wir dann für diese $P(k, j)$ die folgende Gleichung schreiben (vgl. die Gleichungen (5.8) und (6.13) in [7])

$$(2.6) \qquad P(k, j) = \frac{\mu}{\mu + \lambda}\, P(k, j - 1) + \frac{(1 - \vartheta)\,\lambda}{\mu + \lambda}\, P(k, j) + \frac{\vartheta\lambda}{\mu + \lambda}\, P(k - 1, j + r)\,.$$

Dazu gehören noch die üblichen Randbedingungen, nämlich die Bedingung

$$(2.7) \qquad P(0, 0) = 1\,, \quad P(k, 0) = 0 \quad \text{für} \quad k > 0\,,$$

die die Tatsache ausdrückt, daß ein Kunde, der sich schon in der Bedienungsstelle befindet, nicht mehr überholt werden kann, und für $k = 0$ noch die aus der Gleichung

$$P(0, j) = \frac{\mu}{\mu + \lambda}\, P(0, j - 1) + \frac{(1 - \vartheta)\,\lambda}{\mu + \lambda}\, P(0, j)$$

folgende Bedingung

$$(2.8) \qquad P(0,j) = \left(\frac{\mu}{\mu + \vartheta\lambda}\right)^j = (1 + \vartheta\beta)^{-j}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Die Lösung der Gleichung (2.6) mit den Randbedingungen (2.7) und (2.8) ergibt eine Formel, die der Formel (6.14) von [7] analog ist (für $n = 1$ ist ja (6.14) ein Spezialfall von unserer Formel), nämlich

$$(2.9) \qquad P(k, j) = \frac{\mu^{kr+j}(\vartheta\lambda)^k}{(\mu + \vartheta\lambda)^{kr+k+j}} \binom{kr + k + j}{k} \frac{j}{kr + k + j} =$$

$$= \frac{(\vartheta\beta)^k}{(1 + \vartheta\beta)^{kr+k+j}} \binom{kr + k + j}{k} \frac{j}{kr + k + j}.$$

Die Anzahl der passiven Überholungen des Kunden $\mathscr{K}$, die nach einem gewissen Zeitpunkt geschehen, hängt nicht von dem Schicksal des Kunden vor diesem Zeitpunkt ab, so daß wir wieder (vgl. die Formel (5.11) in [7])

$$(2.10) \qquad P_{\text{pas}}(k) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j \, P(k, j), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

bekommen, wohin wir für q_j gemäß (2.3) und für $P(k, j)$ gemäß (2.9) einzusetzen haben. Die expliziten Ausdrücke sind jedenfalls ziemlich kompliziert. Wir begnügen uns deswegen nur mit $P_{\text{pas}}(0)$. Setzen wir

$$\gamma = (1 + \vartheta\beta)^{-1} = \mu(\mu + \vartheta\lambda)^{-1},$$

so ist $|\gamma| \leqq 1$ und wegen (2.8) ist dann

$$(2.11) \qquad P_{\text{pas}}(0) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j \gamma^j = Q(\gamma) =$$

$$= (1 - \varrho) + (1 - \vartheta) \sum_{j=1}^{\infty} p_j \gamma^j + \vartheta\beta \sum_{j=1}^{r} \gamma^j =$$

$$= \vartheta(1 - \varrho) + (1 - \vartheta)\, G(\gamma) + \vartheta\beta \sum_{j=1}^{r} \gamma^j =$$

$$= \vartheta(1 - \varrho) + (1 - \vartheta)(1 - \varrho) \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \Big[\sum_{j=1}^{r} \gamma^j\Big]^k + \vartheta\beta \sum_{j=1}^{r} \gamma^j .$$

Wir bemerken nur noch (vgl. wieder [7]), daß auch hier die mittlere Anzahl der passiven Überholungen der mittleren Anzahl der aktiven Überholungen gleich sein muß. Diese Mittelwerte sind

$$\sum_{k=1}^{\infty} k P_{\text{akt}}(k) = \vartheta \sum_{k=1}^{\infty} k p_{k+1}^* = \vartheta \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{j=1}^{r} p_{kr+j}$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} kP_{\text{pas}}(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} q_j k\, P(k, j) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \sum_{k=1}^{\infty} k\, P(k, j) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j\, M(j)\,,$$

wo wir wieder $M(j) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, P(k, j)$ schreiben – es ist die mittlere Anzahl der passiven Überholungen, die ein Kunde, der eben in der Lage $L = j$ ($j = 1, 2, 3, \ldots$) in der Schlange steht, noch zu erwarten hat.

Es ist vielleicht nicht notwendig besonders zu betonen, daß bei $r = 1$ alle hier hergeleiteten Formeln in die entsprechenden Formeln der Arbeit [7] bei $n = 1$ übergehen, denn es ist $M/E_1/1 = M/M/1$.

3. Die gemischte Warteordnung; die Wartezeitverteilung

Eines der interessanten Ergebnisse der Arbeit [7] war die Formel (6.11) für die charakteristische Funktion der Wartezeit der Kunden im System $M/M/n$ mit inverser Warteordnung. Ein ähnliches Ergebnis wollen wir jetzt für den Fall der Systeme $M/E_r/1$ mit gemischter Warteordnung herleiten. Wir werden dabei jedoch einen anderen Weg begehen als in [7], wo wir die Markovsche Kette betrachteten, die die Irrfahrt eines Kunden in der Schlange beschreibt. Hier werden wir von einer Analogie der Gleichung (5.22) von [7] ausgehen.

In dem gegebenen System $M/E_r/1$ mit gemischter Warteordnung mit dem Parameter ϑ, $0 \leqq \vartheta \leqq 1$, bezeichnen wir $\chi_j(s)$ die charakteristische Funktion der nachfolgenden Wartezeit W_j eines Kunden, der sich eben in der Lage $L = j$ ($j = 0, 1, 2, \ldots$) befindet. Der Wert $L = 0$ entspricht dem Fall eines Kunden, der schon bedient wird, so daß natürlich $\chi_0(s) \equiv 1$ ist. Wenn $j > 0$ ist, zerfällt die Wartezeit W_j in zwei Zeitintervalle: das erste ist die Zeitlücke, während deren sich die Phasenanzahl im System nicht ändert – dieses Zeitintervall hat eine Exponentialverteilung, und zwar mit dem Parameter $\mu + \lambda$ – der zweite Teil der Wartezeit W_j ist dann die Wartezeit eines Kunden, der sich in der Lage $L = j - 1$, $L = j$ oder $L = j + r$ befindet, jenachdem, ob sich die Phasenanzahl dadurch ändert, daß die Bedienung einer Phase vollendet wird, oder dadurch, daß ein neuer Kunde in das System eintrifft, der sich dabei auf dem letzten, bzw. auf dem ersten Platz in die Schlange einreiht.[1]) Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten kennen wir schon; wir können also für die charakteristischen Funktionen $\chi_j(s)$ die folgende Gleichung schreiben:

$$(3.1) \qquad \chi_j(s) = \frac{\mu + \lambda}{\mu + \lambda - is}\left[\frac{\mu}{\mu + \lambda}\,\chi_{j-1}(s) + \frac{(1 - \vartheta)\,\lambda}{\mu + \lambda}\,\chi_j(s) + \frac{\vartheta\lambda}{\mu + \lambda}\,\chi_{j+r}(s)\right],$$

[1]) Vgl. auch die Fußnote [6]) auf der Seite 373 in [7].

woraus wir nach einigen Umformungen die Gleichung

$$\chi_j(s)\,[\mu + \vartheta\lambda - is] = \mu\,\chi_{j-1}(s) + \vartheta\lambda\,\chi_{j+r}(s) \tag{3.2}$$

bekommen.

Betrachten wir jetzt aber die Zeitlücke, die unser Kunde $\mathscr{K}$ dazu braucht, um von der Lage $L = j$ zum ersten Mal die Lage $L = j - 1$ zu erreichen. Da die Wahrscheinlichkeit, mit welcher beim Eintreffen eines neuen Kunden eine Überholung unseres Kunden $\mathscr{K}$ vorkommt, stets gleich ϑ ist, unabhängig von der Lage L, sehen wir, daß die Verteilung dieser Wartezeit auf den ersten Übergang von $L = j$ zu $L = j - 1$ dieselbe sein muß, wie die Wartezeitverteilung eines Kunden, der eben in der Lage $L = 1$ schlangesteht. Da aber die nachfolgende Wartezeit des Kunden von seiner Vergangenheit nicht abhängt, sondern nur von seiner gegenwärtigen Lage (denn die Bewegung des Kunden in der Schlange ist durch eine homogene Markovsche Kette beschrieben), so gilt offenbar

$$\chi_j(s) = [\chi_1(s)]^j\,, \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.3}$$

Wenn wir (3.3) in (3.2) einsetzen, bekommen wir eine Gleichung für die Funktion $\chi_1(s)$:

$$(\mu + \vartheta\lambda - is)\,\chi_1(s) = \mu + \vartheta\lambda[\chi_1(s)]^{r+1}\,. \tag{3.4}$$

Man kann beweisen – z.B. mit Hilfe des üblichen Rouché-Satzes – daß die Gleichung

$$\vartheta\lambda z^{r+1} - (\mu + \vartheta\lambda - is)\,z + \mu = 0 \tag{3.5}$$

in dem Gebiet $|z| \leqq 1$ immer genau eine Wurzel hat. Im allgemeinen Fall ist jedoch die explizite Lösung der Gleichung (3.4) keine leichte Aufgabe.

Die Gleichung (3.4) direkt zu lösen ist nur in einigen Spezialfällen möglich. So z.B. für $\vartheta = 0$, d.h. für die natürliche Warteordnung im System $M/E_r/1$, gibt (3.4) das fast triviale Ergebnis

$$\chi_1(s) = \mu(\mu - is)^{-1}\,. \tag{3.6}$$

Ein anderes einfaches Beispiel ist die allgemeine gemischte Warteordnung in Systemen $M/M/1$. Hier ist $r = 1$, so daß die Gleichung (3.4) quadratisch, also leicht lösbar ist. Die offenbare Bedingung $\chi_1(0) = 1$, bzw. $|\chi_1(s)| \leqq 1$, ist dann aber nur für eine der zwei Wurzeln erfüllt, nämlich für

$$\chi_1(s) = (2\vartheta\lambda)^{-1}\,\{\mu + \vartheta\lambda + is - [(\mu + \vartheta\lambda - is)^2 - 4\vartheta\lambda]^{1/2}\}\,; \tag{3.7}$$

(vgl. die Formel (6.11) in [7] für den Fall $\vartheta = 1$).

Sobald wir die Funktion $\chi_1(s)$ kennen, ist es schon leicht die allgemeine Wartezeitverteilung eines beliebigen Kunden zu finden. Für die charakteristische Funktion

$\chi_W(s)$ der gesamten Wartezeit W eines beliebigen, zufällig gewählten Kunden können wir nämlich den folgenden Ausdruck schreiben

$$(3.8) \qquad \chi_W(s) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j[\chi_1(s)]^j = Q[\chi_1(s)] =$$
$$= (1 - \vartheta)\, G[\chi_1(s)] + \vartheta\{1 - r\beta + \beta \sum_{j=1}^{r} [\chi_1(s)]^j\}\,.$$

Für den Fall $\vartheta = 0$ können wir (3.6) in (3.8) einsetzen, was zum Ergebnis

$$(3.9) \qquad \chi_W(s) = G\left[\frac{\mu}{\mu - is}\right] = (1 - \varrho)\left[1 - \beta \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{\mu}{\mu - is}\right)^j\right]^{-1} =$$
$$= \frac{(1 - \varrho)\, is(\mu - is)^r}{(\mu - is)^r\,(\lambda + is) - \lambda\mu^r}$$

führt. Das Einsetzen von (3.7) in (3.8) für den Fall $r = 1$ überlassen wir dem Leser.

Die Schwierigkeiten, die mit dem Lösen der Gleichung (3.4) in allgemeineren Fällen verbunden sind, können wir vermeiden, wenn wir uns anstatt der Verteilung der Wartezeit W mit ihren Momenten begnügen; z.B. mit dem Erwartungswert $\mathbf{E}[W]$ und der Varianz $\mathbf{D}[W]$. Die kann man aus den Werten von $\chi_W'(0)$ und $\chi_W''(0)$ berechnen.

Wir fangen mit der Gleichung (3.4) an und differenzieren diese. So bekommen wir

$$(3.10) \qquad \chi_1'(0) = \frac{i}{\mu - r\vartheta\lambda} = \frac{i}{\mu(1 - \vartheta\varrho)}$$

und

$$(3.11) \qquad \chi_1''(0) = -\frac{2\mu + r\vartheta\lambda(r - 1)}{(\mu - r\vartheta\lambda)^3} = -\frac{2 + r\vartheta\varrho - \vartheta\varrho}{\mu^2(1 - \vartheta\varrho)^3}\,.$$

Zu den weiteren Berechnungen brauchen wir noch die Werte der ersten zwei Ableitungen der erzeugenden Funktion $G(z)$ zu kennen. Aus (1.6) ergibt sich unmittelbar

$$(3.12) \qquad G'(1) = \frac{r + 1}{2}\,\frac{\varrho}{1 - \varrho}$$

und

$$(3.13) \qquad G''(1) = \frac{\varrho(r + 1)\,[\varrho(r + 5) + 2(r - 1)]}{6(1 - \varrho)^2}\,.$$

Gemäß (3.8) ist dann

$$\chi_W'(s) = (1 - \vartheta)\, G'[\chi_1(s)]\, \chi_1'(s) + \vartheta\beta\, \chi_1'(s) \sum_{j=1}^{r} j[\chi_1(s)]^{j-1}\,,$$

so daß

$$\chi_W'(0) = (1 - \vartheta)\, G'(1)\, \chi_1'(0) + \vartheta\beta\, \chi_1'(0) \binom{r+1}{2}$$

ist. Wenn wir hierher nach (3.10) und (3.12) einsetzen, bekommen wir

$$\chi_W'(0) = \frac{(1-\vartheta)\, i\varrho(r+1)}{2\mu(1-\varrho)(1-\vartheta\varrho)} + \frac{i\varrho(r+1)\,\vartheta}{2\mu(1-\vartheta\varrho)} = i\,\frac{r+1}{2}\,\frac{\varrho}{\mu(1-\varrho)}$$

und endlich also ist

$$\mathbf{E}[W] = \frac{r+1}{2}\,\frac{\varrho}{\mu(1-\varrho)}\,. \tag{3.14}$$

Dieses Ergebnis kann uns nicht überraschen, denn die mittlere Wartezeit ist ja von der Warteordnung – und also auch vom Wert des Parameters ϑ – unabhängig (vgl. [7], [5]).

Durch weiteres Differenzieren erhalten wir dann den Ausdruck für die zweite Ableitung $\chi_W''(s)$ und daraus dann mit Hilfe von (3.10)–(3.13) das Resultat

$$\chi_W''(0) = -\frac{\varrho(r+1)}{6\mu^2(1-\varrho)^2(1-\vartheta\varrho)}\left[2(r+2) + \varrho(r+1)\right],$$

so daß wir jetzt auch das zweite Moment $\mathbf{E}[W^2] = -\chi_W''(0)$ kennen. Daraus und aus (3.14) ergibt sich dann die Formel

$$\mathbf{D}[W] = \frac{\varrho(r+1)}{12\mu^2(1-\varrho)^2(1-\vartheta\varrho)}\left[(4-2\varrho)(r+2) + 3\vartheta\varrho^2(r+1)\right] \tag{3.15}$$

für die Varianz der Wartezeit im System $M/E_r/1$ bei beliebigem ϑ, $0 \leqq \vartheta \leqq 1$.

Wir dürfen es vielleicht schon dem Leser als eine leichte Übung überlassen, die Übereinstimmung unserer allgemeinen Formel (3.15) mit den für gewisse Spezialfälle (wie z.B. $\vartheta = 0$; $r = 1$, usw. – s. [1], [3] und [2]) wohlbekannten Ergebnissen zu verifizieren. Wir wollen nur noch bemerken, daß die Formel (3.15) noch das zeigt, daß die Varianz der Wartezeit eine monotone Funktion des Parameters ϑ ist. Auch in diesem Sinne stellen also die natürliche ($\vartheta = 0$) und die inverse ($\vartheta = 1$) Warteordnungen zwei Extreme dar, zwischen denen alle andere gemischte Warteordnungen liegen (vgl. [5] und [6]).

Bei den Systemen $M/M/n$ haben wir in [7] bemerkt, daß die Wartezeitverteilung bei der inversen Warteordnung mit der Verteilung der Betriebsperioden zusammenhängt. Auch bei den Systemen $M/E_r/1$ können wir einen ähnlichen Zusammenhang feststellen. Jede Betriebsperiode fängt nämlich immer in dem Eintreffenszeitpunkt eines Kunden an, der in ein leeres System kommt; am Anfang befinden sich also immer genau r Phasen im System. Ein weiterer Kunde, welcher jetzt (d.h. gleich nach dem ersten) in das System eintreffen würde, müßte bei der inversen Warteordnung genau so lange warten, wie lange die Bedienungsstelle von dem ersten Kunden und von allen weiteren während dieser Zeitlücke noch eingetroffenen Kunden ohne Unterbrechen besetzt wäre. Das bedeutet also, daß die Betriebsperiode mit der Wartezeit eines Kunden, welcher in der Lage $L = r$ ist, zusammenfällt; die charakteristische Funktion $\varphi(s)$ der Betriebsperioden ist also gleich der Funktion, die wir früher als $\chi_r(s)$ bezeichnet haben (und zwar für $\vartheta = 1$), d.h.

$$\varphi(s) = \chi_r(s) = [\chi_1(s)]^r .$$

Die Funktion $\chi_1(s)$ ist dabei durch (3.4) bestimmt. Wenn wir aber (3.4) zu der Form

$$\chi_1(s) = \frac{\mu}{\mu + \lambda - is - \lambda[\chi_1(s)]^r}$$

überführen und dann zur r-ten Potenz erhöhen, so bekommen wir für $\varphi(s)$ die Gleichung

$$\varphi(s) = \frac{\mu^r}{[\mu + \lambda - is - \lambda\, \varphi(s)]^r} . \tag{3.16}$$

Das ist aber nichts anderes als die wohlbekannte Gleichung von Takács-Kendall – vgl. die Gleichung (8–9) in [3], S. 195 – für den Spezialfall der Erlangschen Bedienungszeitverteilung.

4. Andere Vašíčeksche Warteordnungen

Die gemischte Warteordnung, mit der wir uns in den vorgehenden zwei Absätzen beschäftigt haben, ist allerdings nur ein Spezialfall der Vašíčekschen Warteordnungen (s. [7], bzw. [5]). Im allgemeinen Fall kann sich der Kunde im Augenblick seines Eintreffens in das System auch auf einem anderen Platz in die Schlange einreihen, also nicht nur am ersten oder am letzten. Wir führen die üblichen Bezeichnungen ein: $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ ist eine gegebene Folge reeller Zahlen, $0 \leqq r_k \leqq 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} r_k \leqq 1$; die Warteordnung ist dann folgendermaßen erklärt: ein Kunde, der zu seinem Eintreffenszeitpunkt im System eine Schlange von l ($l = 1, 2, 3, \ldots$) Kunden findet, reiht sich mit der Wahrscheinlichkeit r_k ($k = 1, 2, \ldots, l$) auf dem k-ten Platz und mit der Wahrscheinlichkeit $R_l = 1 - \sum_{k=1}^{l} r_k$ auf dem letzten, $(l + 1)$-ten Platz in die Schlange ein.

Wir gehen jetzt wieder zu den Fragen über, die wir vorher für den Fall der gemischten Warteordnung betrachtet haben, nämlich Kundenüberholungen und Wartezeitverteilung. In dem ganz allgemeinen Fall ist es jedoch kaum zu erwarten, daß mehr als die Ausgangsgleichungen geschrieben werden können.

Die Situation ist noch ziemlich übersichtbar, wenn es sich um *aktive* Überholungen handelt. Ganz wie im Fall der gemischten Warteordnung ist auch bei allgemeiner Warteordnung des betrachteten Typs die Anzahl der aktiven Überholungen eines Kunden schon in seinem Eintreffenszeitpunkt ganz bestimmt. Die entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilung ist dann durch die Ausdrücke (vgl. die Formel (5.5) in [7])

$$P_{\text{akt}}(k) = \sum_{j=k+1}^{\infty} p_j^* r_{j-k}\,, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.1}$$

und

$$P_{\text{akt}}(0) = p_0^* + p_1^* + \sum_{j=1}^{\infty} p_{j+1}^* R_j \tag{4.2}$$

gegeben.

Wenn es sich um *passive* Überholungen handelt, so muß man sich vor allem dessen bewußt sein, daß sich *Kunden und nicht einzelne Phasen* überholen. Die Gleichung (2.6) nimmt demgemäß im allgemeinen Fall die nicht sehr hoffnungsvolle Form an

(4.3)

$$P(k, j) = \frac{\mu}{\mu + \lambda} P(k, j - 1) + \frac{\lambda R_{a+1}}{\mu + \lambda} P(k, j) + \frac{\lambda(1 - R_{a+1})}{\mu + \lambda} P(k - 1, j + r)\,,$$

wo die nichtnegative ganze Zahl a durch die Gleichheit $j = ar + b$, $1 \leqq b \leqq r$, bestimmt wird.

Auch wenn wir die Wartezeitverteilung suchen, ist die Situation ziemlich kompliziert. Wir vermögen es zwar die allgemeine Analogie der Gleichung (3.1), bzw. (3.2) zu schreiben

$$\chi_j(s)\,[\mu + \lambda(1 - R_{a+1}) - is] = \mu\,\chi_{j-1}(s) + \lambda(1 - R_{a+1})\,\chi_{j+r}(s) \tag{4.4}$$

– es ist wieder $j = ar + b$, $1 \leqq b \leqq r$ – aber im allgemeinen Fall gilt (3.3) nicht, da die Wahrscheinlichkeit einer passiven Überholung von dem Platz, den der Kunde in der Schlange besitzt, abhängen kann.

Wenn wir also überhaupt irgendwelche konkrete Ergebnisse erreichen wollen, müssen wir die Folge $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ irgendwie bestimmen, am besten jedoch so, daß die entsprechende Warteordnung eine plausible Interpretation hat. Einige Beispiele anderer Warteordnungen dieses Typs hat schon O. Vašíček in [5] betrachtet, z.B. die Warteordnung mit $r_k = (k^2 + k)^{-1}$, oder $r_k = (1 - \alpha)\,\alpha^{k-1}$, $0 < \alpha < 1$, usw. Wir wollen da eine einfache Verallgemeinerung der gemischten Warteordnung untersuchen, die durch die Bedingungen

$$r_N = \vartheta\,, \quad r_k = 0 \quad \text{für} \quad k \neq N\,, \tag{4.5}$$

mit $0 \leqq \vartheta \leqq 1$, N ganz und positiv, bestimmt ist. (Ist $N = 1$, so bekommen wir die gewöhnliche gemischte Warteordnung.)

Eine solche Warteordnung kann — besonders wenn $N = 2$ ist — in reellen Bedienungssystemen vorkommen. Der Kunde, der als erster in der Schlange steht, ist schon sozusagen „mit einem Beine in der Bedienungsstelle“ und kann nicht mehr überholt werden. Man kann sich dies z.B. so vorstellen, daß sich die Kunden irgendwie vorbereiten, oder an irgendein bestimmtes Ort stellen müssen, bevor ihre Bedienung anfangen kann. Die Schlange steht dann eigentlich erst *vor* dieser Vorbereitung, welche gleich vor der Bedienung stattfindet und jedenfalls *keine Zeit* benötigt, denn sonst hätten wir ja eigentlich ein Tandemsystem.

Aus den Formeln (4.1) und (4.2) ergeben sich für dieses System sofort die Wahrscheinlichkeiten

$$(4.6) \qquad P_{\text{akt}}(k) = \vartheta p^*_{k+N}\,, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$P_{\text{akt}}(0) = 1 - \vartheta \sum_{j=N+1}^{\infty} p^*_j = 1 - \vartheta \sum_{j=Nr+1}^{\infty} p_j\,.$$

Für die Wahrscheinlichkeiten $P(k, j)$, die wir zum Untersuchen der *passiven* Überholungen brauchen, bekommen wir aus (4.3) einerseits die Gleichungen

$$(4.7) \qquad P(k, j) = \frac{\mu}{\mu + \lambda} P(k, j - 1) + \frac{\lambda}{\mu + \lambda} P(k, j)$$

für $0 < j \leqq Nr - r$, $k \geqq 0$, anderseits die Gleichungen

$$(4.8) \qquad P(k, j) = \frac{\mu}{\mu + \lambda} P(k, j - 1) + \frac{\lambda(1 - \vartheta)}{\mu + \lambda} P(k, j) + \frac{\vartheta\lambda}{\mu + \lambda} P(k - 1, j + r)$$

für $j > Nr - r$, $k > 0$, bzw.

$$(4.8') \qquad P(0, j) = \frac{\mu}{\mu + \lambda} P(0, j - 1) + \frac{\lambda(1 - \vartheta)}{\mu + \lambda} P(0, j)$$

für $j > Nr - r$. Dazu kommen natürlich noch die Randbedingungen (2.7).

Man sieht sofort aus (4.7), daß für $0 < j \leqq Nr - r$ stets $P(k, j) = P(k, j - 1) = \ldots$ $\ldots = P(k, 0)$ ist, also ist

$$(4.9) \qquad P(0, j) = 1 \quad \text{für} \quad 0 \leqq j \leqq Nr - r\,,$$
$$P(k, j) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq j \leqq Nr - r\,, \quad k > 0.$$

Setzen wir jetzt $Q(k, j) = P(k, j + Nr - r)$ für $k \geqq 0, j \geqq 0$. Wie wir eben gezeigt haben, ist $Q(0, 0) = 1$, $Q(k, 0) = 0$ für $k > 0$. Wegen (4.8′) ist weiter

$$Q(0, j) = \frac{\mu}{\mu + \vartheta\lambda} Q(0, j - 1)\,, \quad j = 1, 2, 3, \ldots,$$

so daß

$$(4.10) \qquad P(0, j + Nr - r) = Q(0, j) = \left(\frac{\mu}{\mu + \vartheta\lambda}\right)^j = (1 + \vartheta\beta)^{-j}$$

für $j = 0, 1, 2, \ldots$ Wenn wir noch die Gleichungen (4.8) mit $Q(k, j)$ anstatt $P(k, j)$ schreiben, so sehen wir, daß die Wahrscheinlichkeiten $Q(k, j)$ die Gleichung (2.6) mit denselben Randbedingungen erfüllen. Die Lösung der Gleichung (2.6) ist aber durch die Formel (2.9) gegeben; wir haben also für die Wahrscheinlichkeiten $P(k, j)$ den Ausdruck

(4.11)
$$P(k, j) = \frac{\vartheta^k \beta^k}{(1 + \vartheta\beta)^{kr+k+j-Nr+r}} \binom{kr + k + j - Nr + r}{k} \frac{j - Nr + r}{kr + k + j - Nr + r}$$

(für $j > Nr - r$), was zusammen mit (4.9) die vollständige Lösung der Gleichungen (4.7), (4.8), (4.8′) mit der Randbedingung (2.7) darstellt.

Zum Einsetzen in die Formel (2.10) für die Verteilung der Anzahl der passiven Überholungen brauchen wir noch die Wahrscheinlichkeiten q_j, d.h. die Anfangsverteilung der Lage L eines Kunden in der Schlange zum Zeitpunkt seines Eintreffens in das System. Im allgemeinen ist

$$q_0 = p_0 = 1 - \varrho\,,$$
$$q_{ar+b} = p_{ar+b} R_a = r_{a+1} \sum_{k=a+1}^{\infty} p_{kr+b}$$

für $a \geqq 0$, $1 \leqq b \leqq r$ (ganzzahlig), wobei $R_0 = 1$ ist. Für unsere durch (4.5) bestimmte Warteordnung bedeutet dieses, daß

$$(4.12) \qquad \begin{aligned} q_j &= p_j \quad \text{für} \quad 0 \leqq j \leqq Nr - r\,, \\ q_j &= p_j + \vartheta \sum_{k=1}^{\infty} p_{kr+j} \quad \text{für} \quad Nr - r < j \leqq Nr\,, \\ q_j &= (1 - \vartheta)\, p_j \quad \text{für} \quad j > Nr\,, \end{aligned}$$

(vgl. (2.3)) ist. Wenn wir dann gemäß (4.12), (4.9) und (4.10) in (2.10) einsetzen, bekommen wir für $k = 0$ den Ausdruck (vgl. (2.11))

$$(4.13) \qquad \begin{aligned} P_{\text{pas}}(0) &= \sum_{j=0}^{Nr-r} p_j + \sum_{j=Nr-r+1}^{\infty} (1 - \vartheta)\, p_j (1 + \vartheta\beta)^{Nr-r-j} + \\ &\quad + \sum_{j=Nr-r+1}^{Nr} \vartheta (1 + \vartheta\beta)^{Nr-r-j} \sum_{k=0}^{\infty} p_{kr+j} = \\ &= \sum_{j=0}^{Nr-r} p_j + (1 - \vartheta) \sum_{j=1}^{\infty} p_{Nr-r+j} (1 + \vartheta\beta)^{-j} + \vartheta \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{r} (1 + \vartheta\beta)^j\, p_{kr-Nr-r+j}\,; \end{aligned}$$

der Leser kann sich selbst ein ähnliches Einsetzen für $k > 0$ durchführen.

Wir werfen nun noch einen kurzen Blick auf die *Wartezeitverteilung.*

Eine nicht schwierige Überlegung ähnlich der, die uns im dritten Absatz zur Gleichheit (3.3) führte, gibt uns diesmal das folgende Ergebnis: bei der Warteordnung (4.5) gilt einerseits

$$\chi_j(s) = [\chi_1(s)]^j = \left(\frac{\mu}{\mu - is}\right)^j \tag{4.14}$$

für $0 \leqq j \leqq Nr - r$, anderseits aber ist für $j > Nr - r$

$$\chi_j(s) = [\chi_1(s)]^{Nr-r}\,[\psi_1(s)]^{j-Nr+r}\,, \tag{4.15}$$

wo $\psi_1(s)$ die charakteristische Funktion ist, welche die Gleichung

$$(\mu + \vartheta\lambda - is)\,\psi_1(s) = \mu + \vartheta\lambda[\psi_1(s)]^{r+1}\,,$$

d.h. die Gleichung (3.4) erfüllt. Für die charakteristische Funktion $\chi_W(s)$ der gesamten Wartezeit W gilt dann

$$\begin{aligned}\chi_W(s) = &\sum_{j=0}^{Nr-r} p_j[\chi_1(s)]^j + (1 - \vartheta)\,[\chi_1(s)]^{Nr-r}\sum_{j=1}^{\infty} p_{j+Nr-r}[\psi_1(s)]^j + \\ &+ \vartheta[\chi_1(s)]^{Nr-r}\sum_{j=1}^{r}\Big(\sum_{k=N-1}^{\infty} p_{kr+j}\Big)\,[\psi_1(s)]^j\,.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Die Aufgabe, die Wartezeitverteilung zu finden, ist damit im wesentlichen gelöst, bzw. auf die Lösung desselben Problems für $N = 1$ reduziert, welche wir schon vom Absatz 3 kennen. Das entsprechende Einsetzen sowie die weiteren Berechnungen samt der Überprüfung der Übereinstimmung der allgemeinen Formel (4.16) mit den für Spezialwerte der Parameter r, ϑ, N bekannten Ergebnissen dürfen wir vielleicht schon dem Leser überlassen.

Wir möchten jedoch noch erwähnen, daß eine gemeinsame Verallgemeinerung der hier betrachteten Warteordnungen mit verschiedenen Werten N durch die Warteordnung dargestellt ist, die auch schon von O. Vašíček in [5] untersucht wurde (jedenfalls nur für Systeme des Typs $M/M/n$). Es ist die Warteordnung mit „Überholungen auf nur endlich vielen Plätzen", welche dadurch charakterisiert ist, daß die Folge $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ nur endlich viele positive Zahlen enthält.

5. Systeme mit Gruppeneintreffen

Am Anfang dieser Arbeit haben wir im ersten Absatz die Möglichkeit erwähnt, die Erlang-Verteilung der Bedienungszeit als die Bedienung von r-gliedrigen Kundengruppen zu interpretieren; die einzelnen Kunden haben unabhängige und exponentialverteilte (mit dem Parameter μ) Bedienungszeiten, aber die Gruppen sind unzertrennbar und werden gemeinsam bedient. Wenn wir uns hier für die Kundenreihenfolge und ihre Änderungen interessieren wollen, müssen wir zuerst die Reihenfolge der Kunden in jeder Gruppe irgendwie bestimmen.

Wir werden also voraussetzen, daß die Kunden in jeder Gruppe schon geordnet sind, so daß es sinnvoll ist, von dem ersten, zweiten, ..., r-ten Kunden in der Gruppe zu sprechen. Die Warteordnung bezieht sich jedenfalls auf die ganzen Gruppen, die nie untereinander gemischt werden, weder während der Wartezeit, noch in der Bedienung.

Das bedeutet aber, daß sich die Reihenfolge der Kunden in der Gruppe während des ganzen Aufenthaltes der Gruppe im System nicht ändert; der Kunde, der in seiner Gruppe als erster in das System eintrifft, tritt auch als erster in die Bedienungsstelle ein. Wenn wir jetzt mit $\psi_1(s)$ die charakteristische Funktion der Wartezeit des ersten Kunden in einer beliebigen, zufällig gewählten Gruppe im System im Gleichgewicht bezeichnen, dann wird die Wartezeit des j-ten ($j = 1, 2, \ldots, r$) Kunden in derselben Gruppe offenbar die charakteristische Funktion

$$(5.1) \qquad \psi_j(s) = \psi_1(s) \left(\frac{\mu}{\mu - is} \right)^{j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, r\,,$$

haben.

Es ist jedoch leicht zu sehen, daß die Wartezeit des ersten Kunden in der Gruppe dieselbe ist, wie die Wartezeit eines Kunden bei der ursprünglichen Interpretation (s. Absatz 3), d. h. es gilt $\psi_1(s) = \chi_W(s)$, wo $\chi_W(s)$ durch die Formel (3.8) gegeben ist.

Ähnlich sieht es auch mit den Kundenüberholungen aus: jede – aktive oder passive – Überholung des ersten Kunden in der Gruppe bedeutet eine Überholung derselben Art aller anderen Kunden dieser Gruppe. Die Überholungen kommen also stets in r-tupeln vor. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten kennen wir jedenfalls schon vom Absatz 3.

Wir sehen also, daß eine so interpretierte gemischte Warteordnung für Kundengruppen *keine wesentlich neue Probleme* vorstellt.

Die Lage sieht jedoch ganz anders aus, wenn wir voraussetzen, daß die betrachtete Warteordnung die einzelnen Kunden betrifft, die sich also selbständig und voneinander unabhängig in die Schlange einreihen. In diesem Fall aber, wo die Gruppen in den Eintreffenszeitpunkten gelöst werden, verliert sich der Zusammenhang mit der Erlang-Verteilung der Bedienungszeiten, so daß das Studium solcher Systeme nicht mehr als ein Beitrag zur Theorie der Systeme $M/E_r/1$ angesehen werden kann. Da unser Artikel eben den Systemen $M/E_r/1$ gewidmet ist, wollen wir diese neue Interpretation an einer anderen Stelle untersuchen.

Literatur

[1] *F. Ferschl:* Zufallsabhängige Wirtschaftsprozesse. Physica-Verlag, Wien—Würzburg 1964.
[2] *N. U. Prabhu:* Queues and Inventories. J. Wiley, New York 1965.
[3] *T. L. Saaty:* Elements of Queueing Theory with Applications. McGraw-Hill, New York 1961.
[4] *R. E. Strauch:* When a queue looks the same to an arriving customer as to an observer. Management Science, *17* (1970), 140—141.
[5] *O. Vašíček:* Jedna speciální čekací disciplína v systému hromadné obsluhy. Aplikace matematiky, *10* (1965), 59—71.
[6] *F. Zítek:* Ztracený čas. Academia, Praha 1969.
[7] *F. Zítek:* Über die Kundenreihenfolge in Bedienungssystemen. Aplikace matematiky, *15* (1970), 356—383.

Souhrn

O POŘADÍ ZÁKAZNÍKŮ V SYSTÉMECH $M/E_r/1$

FRANTIŠEK ZÍTEK

Článek navazuje na předchozí práci [7]. Zkoumá se tu především vzájemné předstihování zákazníků během doby čekání na obsluhu v systémech typu $M/E_r/1$ se smíšeným frontovým režimem; jsou odvozeny též některé výsledky, jež se týkají zákona rozložení doby čekání a délek period nepřetržitého chodu obsluhy v takovýchto systémech, např. vzorec (3.15) pro varianci doby čekání v ustáleném systému $M/E_r/1$ s libovolným smíšeným režimem. Vedle standardního smíšeného režimu se vyšetřuje i určité jeho zobecnění (paragraf 4).

Anschrift des Verfassers: Dr. *František Zítek*, CSc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, Praha 1.