

Aplikace matematiky

Andrej Kyselovič

Bemerkungen zu Gomorys Algorithmus

Aplikace matematiky, Vol. 16 (1971), No. 3, 164–167

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103341>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1971

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

BEMERKUNGEN ZU GOMORYS ALGORITHMUS

ANDREJ KYSELOVIČ

(Eingegangen am 22. April 1970)

Es sei die folgende Aufgabe der Linearprogrammierung gegeben: Bestimme man den Maximalwert der Linearform

$$(1) \quad z = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

bei den Bedingungen

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

wobei c_i, a_{ij}, b_j reelle Zahlen sind.

Definition 1. Der Vektor $\mathbf{X} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ist genau dann eine ganzzahlige Lösung der Aufgabe der Linearprogrammierung, wenn

1. die Komponenten $x_i, i = 1, \dots, n$ ganze Zahlen sind,
2. die Bedingungen (2) erfüllt sind,
3. für jeden anderen Vektor $\mathbf{X}' \equiv (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, welcher den Bedingungen (2) und dem Punkt 1. dieser Definition genügt, ist

$$\sum_{i=1}^n c_i x'_i \leq \sum_{i=1}^n c_i x_i.$$

Die Weise, auf welche man eine ganzzahlige Lösung der Aufgabe der Linearprogrammierung finden kann, bestimmte Gomory in [1] und diese wird Gomorys Algorithmus genannt.

Definition 2. Es seien d_1, \dots, d_r von einander verschiedene positive rationale Zahlen. Den Vektor $\mathbf{X} \equiv (x_1, \dots, x_n)$ nennen wir ganzzvielfache Lösung der Aufgabe der Linearprogrammierung zum Vektor (d_1, \dots, d_n) , wenn

1. die Komponenten $x_i, i = 1, \dots, n$ durch $d_j, j = 1, \dots, r$ teilbar sind,

2. die Komponenten x_i , $i = 1, \dots, n$ genügen den Bedingungen (2),
 3. für jeden anderen Vektor $\mathbf{X}' \equiv (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, welcher den Bedingungen (2) und dem Punkt 1. von dieser Definition genügt, gilt

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n c_i x'_i \leq \sum_{i=1}^n c_i x_i.$$

Bemerkung 1. Wenn $r = 1$ und $d_1 = 1$ ist, dann ist $\mathbf{X} \equiv (x_1, \dots, x_n)$ eine ganzzahlige Lösung der Aufgabe.

Satz 1. Es seien d_1, d_2, \dots, d_r von einander verschiedene positive ganze Zahlen und sei k deren kleinstes gemeinsames Vielfaches. Setze man in die Aufgabe der Linearprogrammierung $x_i = ky_i$, $i = 1, \dots, n$ ein, d. h. die Linearform

$$(4) \quad z = k \sum_{i=1}^n c_i y_i$$

soll unter den Bedingungen

$$(5) \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i \leq \frac{b_j}{k}, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ihr Maximum erreichen.

Dann gilt: Dazu, dass die Aufgabe der Linearprogrammierung (1), (2) eine ganzzahlige Lösung zum Vektor d_1, \dots, d_r hat, ist notwendig und hinreichend, dass die Aufgabe der Linearprogrammierung (4), (5) eine ganzzahlige Lösung hat.

Für die ganzzahlige Lösung gilt

$$(6) \quad x_i = ky_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Beweis. a) Die hinreichende Bedingung. Die Aufgabe (4), (5) besitze eine ganzzahlige Lösung. Es ist zu beweisen, dass durch diese Lösung eine ganzzahlige Lösung zum Vektor d_1, \dots, d_r bestimmt ist.

Sei y_1, \dots, y_n eine ganzzahlige Lösung von (4), (5). Dann ist ky_1, \dots, ky_n eine ganzzahlige Lösung, nachdem nach der Definition 2 folgendes gilt:

1. ky_i , $i = 1, \dots, n$ ist durch d_1, d_2, \dots, d_r teilbar, nachdem k das kleinste gemeinsame Vielfache von d_1, d_2, \dots, d_r ist und y_i , $i = 1, \dots, n$ sind nichtnegative ganze Zahlen.

2. Wenn die Beziehungen (5) durch k multipliziert werden, ergibt sich

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} ky_i \leq b_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad ky_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

d. h. die Lösung ky_1, \dots, ky_n genügt den Beziehungen (2).

3. Der Vektor y_1, y_2, \dots, y_n ist eine ganzzahlige Lösung von (4), (5) und darum ist die Linearform (4) in der Menge aller ganzen Lösungen der Ungleichung (5) maximal. Setzen wir voraus, dass in der Menge der ganzzvielfachen Lösungen ky_1, \dots, ky_n die Linearform (1) nicht maximalisiert, d. h. die ganzzvielfache Lösung ist x'_1, \dots, x'_n . Nach der Eigenschaft der ganzzvielfachen Lösung gilt

$$(7) \quad \sum_{i=1}^n c_i x'_i > \sum_{i=1}^n c_i k y_i.$$

Ferner muss $x'_i, i = 1, \dots, n$ durch d_1, \dots, d_r und also auch durch deren kleinstes gemeinsames Vielfaches k teilbar sein. Darum sind $x'_i/k = y'_i, i = 1, \dots, n$ nicht-negative ganze Zahlen d. h. $x'_i = k y'_i, y'_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ sind ganze nichtnegative Zahlen, welche den Bedingungen (5) genügen. Von der Beziehung (7) ergibt sich

$$\sum_{i=1}^n c_i k y_i < \sum_{i=1}^n c_i x'_i = k \sum_{i=1}^n c_i y'_i.$$

Dieses ist ein Widerspruch, nachdem y_1, \dots, y_n eine ganzzahlige Lösung der Aufgabe (4), (5) ist.

b) Die notwendige Bedingung. Die Aufgabe der Linearprogrammierung (1), (2) besitze eine ganzzvielfache Lösung zum Vektor d_1, \dots, d_r . Es wird gezeigt, dass die Aufgabe (4), (5) eine ganzzahlige Lösung nach der Beziehung (6) hat.

Sei x_1, \dots, x_n eine ganzzvielfache Lösung der Aufgabe (1), (2). Die ganzzahlige Lösung von (4), (5) ist dann die Lösung $x_1/k, \dots, x_n/k$, wobei k das kleinste gemeinsame Vielfache der positiven ganzen Zahlen d_1, \dots, d_r ist. Nach der Definition 1 ist:

1. $x_1/k, \dots, x_n/k$ sind nichtnegative ganze Zahlen; wenn jedes $x_i, i = 1, \dots, n$ durch d_1, \dots, d_r , der Definition 2 nach, teilbar ist, dann ist es auch durch k teilbar.

2. Der Beweis ist offenbar, wenn man beide Beziehungen (2) mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen k teilt.

3. Der Beweis ist – so wie bei der hinreichenden Bedingung – ersichtlich.

Satz 2. Wenn in den Voraussetzungen des Satzes 1 k nicht das kleinste gemeinsame Vielfache von d_1, \dots, d_r ist, dann muss die Lösung (6) nicht eine Lösung der Aufgabe der Linearprogrammierung (1), (2) sein.

Beweis. Die Lösung (6) erfüllt die Bedingungen (2). Beim Beweis der notwendigen Bedingung im Satz 1 müssen die Komponenten $x_1/k, \dots, x_n/k$ nichtnegative ganze Zahlen sein; dieses muss bei gegebenem k nicht immer der Fall sein.

Satz 3. Es seien d_1, \dots, d_r von einander verschiedene positive Rationalzahlen, $d_i = p_i/q_i, q_i > 0, p_i, q_i$ ganz, $i = 1, \dots, r$. Erweitere man diese Brüche so, dass deren Nenner q das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen q_1, \dots, q_r ist. Bezeichne man dann $d_i = p'_i/q, i = 1, \dots, r$. Es sei k das kleinste gemeinsame Vielfa-

che der Zahlen p'_1, \dots, p'_r . Für diese d_1, \dots, d_r und so gegebenes k gilt die Behauptung des Satzes 1.

Beweis. Der Beweis folgt vom vorgehenden Satz. Nach diesem und mit Rücksicht auf unsere Voraussetzungen gilt: Notwendig und hinreichend dazu, dass die Aufgabe (1), (2) eine zum Vektor p'_1, \dots, p'_r ganzvielfache Lösung $x_i, i = 1, \dots, n$ hat ist, dass die Aufgabe (4), (5) eine ganzzahlige Lösung y_i hat, wobei $x_i = ky_i, i = 1, 2, \dots, n$ ist. Also wenn eine ganzvielfache Lösung der Aufgabe der Linearprogrammierung (1), (2) zum Vektor (p'_1, \dots, p'_r) existiert d. h. der Ausdruck $x_i/p'_j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, r$ ist eine nichtnegative ganze Zahl, dann ist offenbar auch $x_i \cdot q/p'_j = x_i/d_j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, r$ nichtnegativ und ganz. Nachdem weiter die Bedingungen 2. und 3. von der Definition 2 auch in Bezug zu $d_i, i = 1, \dots, r$ erfüllt sind, ist x_1, \dots, x_n eine ganzvielfache Lösung zum Vektor (d_1, \dots, d_r) .

Bemerkung 2. Das Bedürfnis der Bestimmung einer ganzvielfachen Lösung der Aufgabe der Linearprogrammierung ist bei der Lösung der folgenden Aufgabe entstanden: Gegeben seien Blechwickel mit den Gewichten d_1, \dots, d_r und der Breite a . Man soll von diesen Wickeln durch parallele Schnitte Bänder der Breite a_i mit dem Gesamtgewicht $b_i, i = 1, \dots, n$ so schneiden, dass beim Schneiden der Abfall minimal ist und dass man beim Schneiden beliebige ganze Blechwickel mit vorgegebenen Gewichten d_1, \dots, d_r benützen kann.

Literatur

[1] R. T. Gomory: All-integer programming algorithm, Industrial Scheduling.

Súhrn

POZNÁMKA KE GOMORYHO ALGORITMU

ANDREJ KYSELOVIČ

Článok pojednáva o celonásobnom riešení úlohy lineárneho programovania za predpokladu, že existuje celočíselné riešenie odvodenej úlohy. Udáva nutnú i postačujúcu podmienku existencie celonásobného riešenia.

Anschrift des Verfassers RNDr: Andrej Kyselovič, Ul. Slobody 10, Košice.