

Aplikace matematiky

Pavel Galajda

Všeobecná metóda zostrojovania spojnicových nomogramov pomocou kritických bodov

Aplikace matematiky, Vol. 15 (1970), No. 5, 321–327

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103303>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1970

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

VŠEOBECNÁ METÓDA ZOSTROJOVANIA SPOJNICOVÝCH
NOMOGRAMOV POMOCOU KRITICKÝCH BODOV

PAVEL GALAJDA

(Došlo dňa 30. mája 1969)

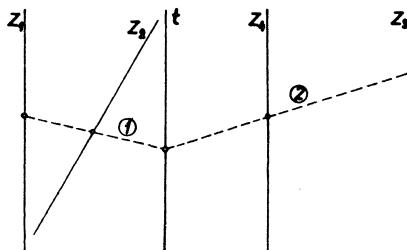
V práci [1] sú rozpracované rozličné tvary združených spojnicových nomogramov. V súvislosti s rozborom týchto tvarov sa uvádza metóda a nesprávne tvrdenie konštrukcie nomogramu pre určitý typ rovníc. Najprv uvedieme stručný výťah tejto metódy. Uvažuje sa rovnice tvaru

$$(1) \quad z_4 = \frac{z_1^2}{z_2^2} + z_3,$$

kde rozsah premenných z_1 a z_2 je dostatočne veľký. Rovnicu (1) môžeme zobrazit združeným spojnicovým nomogramom, ktorého čiastkové vzťahy sú

a) Z-nomogram $t = \frac{z_1^2}{z_2^2}$

b) Nomogram o troch rovnobežných stupniciach $z_4 = t + z_3$ (obr. 1).



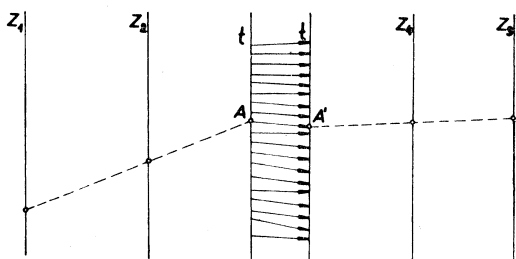
Obr. 1.

V takomto prípade stupnica z_1 bude kvadratickou, čo nie je výhodne pri rozsiahlych hraniciach stupnice z_1 . Aby sa odstránil tento nedostatok, nomogram

sa projektívne transformuje, na základe čoho stupnica t a teda aj z_4 (ktorú snažíme zachovať medzi stupnicami t a z_3) konverguje k nule, čo zhoršuje čitateľnosť nomogramu. Potom sa postupuje tak, že pre prvý čiastkový vzťah $t = z_1^2/z_2^2$ sa zostrojujú nomogram s rovnobežnými logaritmickými stupnicami, a nomogramy sa umiestňujú tak, aby stupnica t v oboch nomogramoch bola za sebou (obr. 2). Čítanie sa prevádza tak, že na prvom nomograme pre dané z_1 a z_2 na stupnici t dostaneme bod A , potom berieme tú istú kótu na stupnici t druhého nomogramu bod A' a spojíme ju priamkou s kótou z_3 . Aby sa vyhlo nutnosti čítania čiastočných výsledkov t v bodoch A a A' sa spájajú body priamkami, ktoré majú rovnaké kóty na oboch

stupniciach t . Vtedy dostaneme bod A na stupnici t prvého nomogramu a pomocou jednej z priamok sa prejde na stupnicu t druhého nomogramu; tým sa dostane bod A' .

V závere v práci [1] sa hovorí, že pomocou tejto metódy sa združujú nomogramy v prípade, ak iným spôsobom ich nie je možné zobraziť. Uvádza sa príklad o ktorom



Obr. 2.

sa tvrdí, že sa nedá združiť tak, aby pomocná premenná bola spoločná pre oba čiastkové vzťahy, a preto sa zobrazuje vyššie uvedenou metódou.

V práci [2] je konštruovaný združený spojnicový nomogram o jednej spoločnej pomocnej stupnici pre ten istý vzťah, čím sa aj vyvracia nesprávnosť tvrdenia v práci [1].

V tejto práci rozpracujeme všeobecnú metódu konštrukcie združovania spojnicových nomogramov o jednej spoločnej pomocnej stupnici pomocou kritických bodov pre systém rovníc (2)–(5). Dokážeme nesprávnosť tvrdenia práce [1], ako aj existenciu tohto nomogramu s aplikáciou na tom istom príklade.

Všeobecne nech je daný systém rovníc (a, b, c, d, e, f sú konštanty)

$$(2) \quad z_4 = \frac{x(a + z_3 + bz)}{z_1(a + z_3) + z}$$

$$(3) \quad z = c + z_1 z_3 + z_2,$$

$$(4) \quad x = \frac{d}{e + fz_3},$$

$$(5) \quad y = \frac{cz_3}{e + fz_3},$$

ktorý je treba nomograficky zobraziť.

Vylúčením pomocných premenných x, y, z zo systému štyroch rovníc (2)–(5) dostaneme nasledujúcu ekvivalentnú, veľmi nevýhodnú závislosť medzi štyrmi premennými z_1, z_2, z_3, z_4 .

$$(6) \quad z_4 = \frac{d}{e + fz_3} \left[\frac{a + z_3 + b(c + z_1 z_3 + z_2)}{z_1(a + z_3) + c + z_1 z_3 + z_2} \right] + \frac{cz_3}{e + fz_3}$$

Ak zavedieme do tejto rovnice pomocnú premennú t dostaneme systém dvoch rovníc tretieho nomografického rádu

$$(7) \quad \frac{a' + z_1}{f + z_2} = \frac{b' + t}{c' + at},$$

$$(8) \quad \frac{d'z_4 + e'}{f' + \frac{d'}{e + fz_3}} = t + g',$$

kde $a', b', c', d', e', f', g'$ sú konštanty, ktoré dostaneme pri vylúčení parametru t . Nomogram pre tento systém je nulového rodu, t.j. pozostáva z priamochárých stupníc, ktoré sú projektívne.

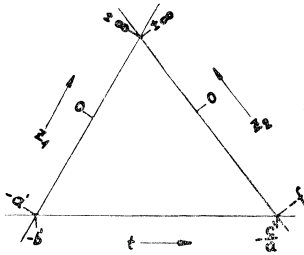


Schéma 1 kritických bodov pre prvý čiastkový vzťah nomogramu.

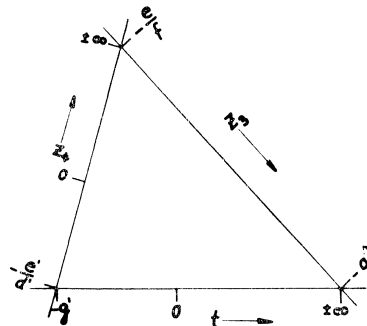


Schéma 2 kritických bodov pre druhý čiastkový vzťah nomogramu.

Konštrukciu budeme prevádzať pomocou kritických bodov t.j. bodov, kde sa pretínajú stupnice nomogramu. Hodnoty kritických bodov vypočítame z dvoch čiastkových vzťahov združeného nomogramu t.j. z rovníc (7) a (8), ktoré uvedieme do schém 1 a 2. Pomocou týchto schém sa potom zostrojujú stupnice nomogramu.

Schéma združeného spojnicového nomogramu pre sústavu rovníc (7) a (8) je uvedená na schéme 3.

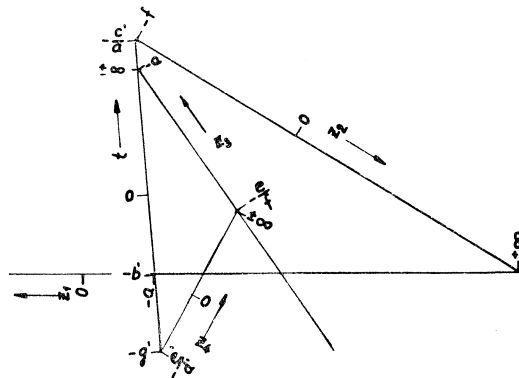


Schéma 3 kritických bodov pre združený spojnicový nomogram.

Ako prakticky sa zostrojuje takýto združený spojnicový nomogram pre danú sústavu rovníc, kde stupnice z_1, z_2, z_3 , sú rovnomerné a stupnica z_4 je projektívna. (Z týchto štyroch stupníc môžeme ľubovoľne voliť jednu za projektívnu a ostatné za rovnomerné a to tak, aby boli zachované schémy 1 a 2).

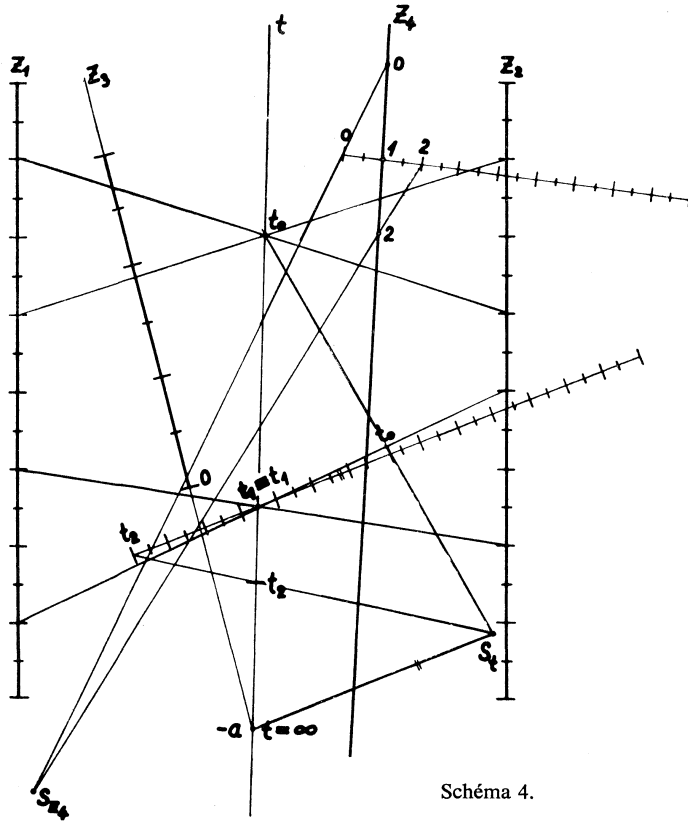


Schéma 4.

Zo schémy 1 kritických bodov vidíme, že stupnice z_1 a z_2 sa pretínajú v nekonečno. To znamená, že stupnice sú rovnobežné. Zvoľme si v určitej vzdialenosti od seba dve rovnobežné priamky (schéma 4), ktoré budú nositeľkami stupnice z_1 a z_2 . Pretože požadujeme, aby tieto stupnice boli rovnomerné, volíme moduly a kóty už zostrojujeme bez ťažkosti. Potom zostrojujeme pomocnú stupnicu t . Ak priesečiek tejto stupnice sa nachádza mimo pracovnej časti nomogramu (čo býva často), potom stupnicu t zostrojujeme tak, že volíme ľubovoľné hodnoty z_1 a z_2 a zo systému (7) vypočítame kóty stupnice t . Pre vypočítanú hodnotu t a pre jednu z daných z_1 (alebo z_2), ktorá je rôzna od predtým použitej vypočítame zodpovedajúcu hodnotu z_2 (alebo z_1).

Týmito dvoma krokmi zrejme určujeme jeden bod stupnice t . Ak tú istú metódu ešte raz opakujeme dostaneme druhý bod stupnice t , ktoré ak spojíme dostaneme pomocnú stupnicu t . Stupnica t , ako je vidieť zo (7) a (8) je projektívna. Ďalej zostrojíme stupnicu z_3 , ktorá pretína stupnicu t , ako je vidieť zo schémy 2 kritických bodov v kóte rovnaj nekonečnu hľadanej stupnice, ktorý (bod $t = \infty$) dostaneme, ak vedieme rovnobežku zo stredom premietania rovnomernej stupnice, ktorá bola použitá na zostrojenie projektívnej stupnice. Zo schémy 2 je vidieť, že v tomto bode kóta stupnice z_3 je rovná $(-a)$.

Preto cez bod $t = \infty$ a $z_3 = -a$ vedíme pod ľubovoľným uhlom priamku. Volíme vhodne polohu nuly stupnice z_3 , čím sa určuje aj modul tejto stupnice, pretože chceme ju mať rovnomernú. Potom zostrojujeme stupnicu z_4 , ktorá sa zostrojuje analogicky ako stupnica t . Pretože dva kritické body tejto stupnice sú nám známe ako je vidieť zo schémy 2 vypočítame z_4 podľa (8) pre predtým už nájdenú hodnotu pomocnej stupnice (k odpovedajúcim predtým vzatým hodnotou z_1 a z_2) a pre ľubovoľnú hodnotu z_3 . Ostatné kóty stupnice z_4 zostrojujeme pomocou priemetania pomocnej rovnomernej stupnice.

Túto všeobecnú metódu aplikujeme na konkrétnom príklade o ktorom sa v práci [1] tvrdí, že nie je možné ho iným spôsobom zobraziť.

Nech je daný systém rovníc

$$(9) \quad \alpha = \frac{x(0,605 + \beta - 0,005z)}{RO_2(0,605 + \beta + z)} + y,$$

$$(10) \quad z = 21 - \beta RO_2 - (RO_2 + O_2),$$

$$(11) \quad x = \frac{1660}{79 + 100\beta},$$

$$(12) \quad y = \frac{21\beta}{79 + 100\beta},$$

Vylúčením pomocných premenných x , y , z zo systému štyroch rovníc (9)–(12) dostaneme

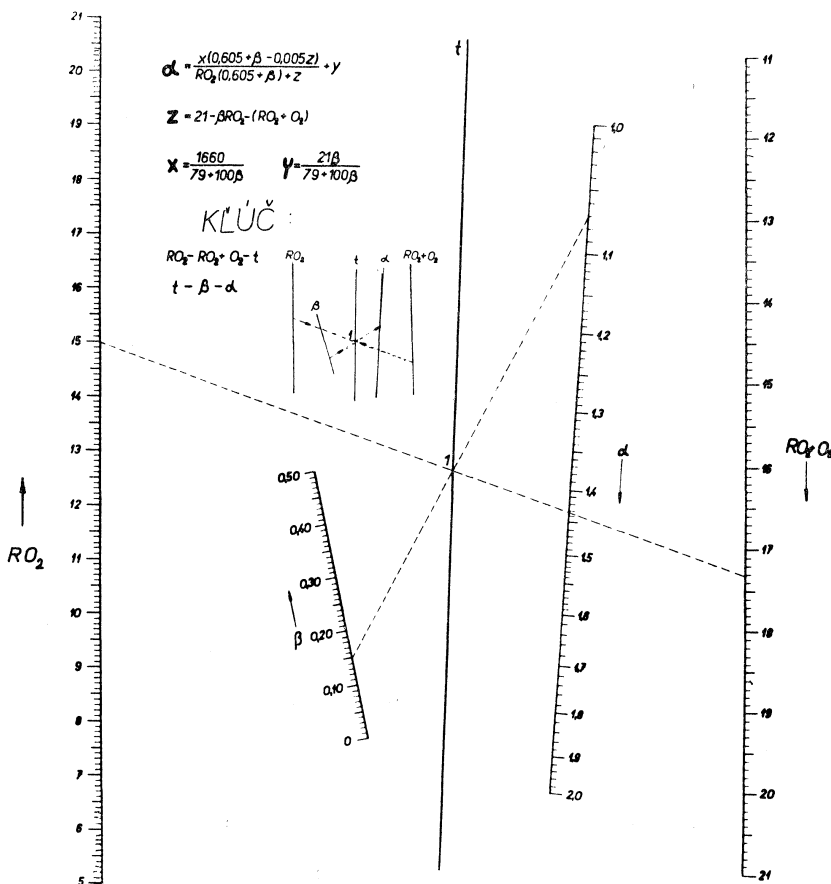
$$(13) \quad 100\alpha + \frac{1}{79 + 100\beta} \frac{82979 - 3873,805RO_2 - 2489(RO_2 + O_2)}{21 + 0,605RO_2 - (RO_2 + O_2)} - \\ - \frac{2101 + 21,005RO_2 - 21(RO_2 + O_2)}{21 + 0,605RO_2 - (RO_2 + O_2)} = 0, \\ \left(60,5\alpha + \frac{1044,595}{79 + 100\beta} - 21,005\right) RO_2 + \left(21 - \frac{2489}{79 + 100\beta} - 100\alpha\right) \cdot \\ \cdot (RO_2 + O_2) + \left(2100\alpha - 2101 + \frac{82979}{79 + 100\beta}\right) = 0.$$

Zavedením pomocnej premennej t do (13) dostaneme systém dvoch rovníc tretieho nomografického rádu

$$(14) \quad \frac{200 + RO_2}{100 + (RO_2 + O_2)} = \frac{1270 + t}{614,8 + 0,605t},$$

$$(15) \quad \frac{15355\alpha + 17434,15}{8,3 - \frac{153,55}{79 + 100\beta}} = t + 3759.$$

Súradnice kritických bodov sú znázornené na schéme 1 a 2. Na základe predchádzajúcej teórie združený spojnicový nomogram pre sústavu rovníc (14) a (15) je zobrazený na (obr. 3). Nomogram (obr. 3) je uverejnený aj v práci [2].



Obr. 3.

Príklad: Pre dané $RO_2 = 15$, $RO_2 + O_2 = 17,33$, $\beta = 0,15$ čítame na nomogramе $\alpha \approx 1,070$.

Je treba zdôrazniť, že pre zvýšenie presnosti nomogramu postupujeme analytickou metódou t.j. rovnice (14) a (15) zapíšeme v tvare Massauovho determinantu.

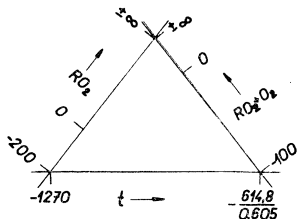


Schéma 1 kritických bodov pre prvý čiastkový vzťah nomogramu.

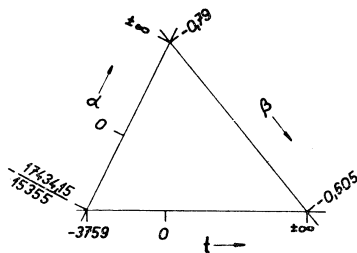


Schéma 2 kritických bodov pre druhý čiastkový vzťah nomogramu.

Literatúra

- [1] Б. А. Невский: Методика построения номограмм НКТПСССР (1937).
- [2] И. А. Вильер, П. Галайда: Номограмма для определения избытка воздуха при неполном сгорании топлива. Теплоэнергетика, (1966) Москва, (13), № 5.
- [3] Н. А. Глаголев: Курс номографии. Государственное издательство. Высшая школа, Москва (1961).

Резюме

ОБЩИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ НОМОГРАММ ИЗ ВЫРАВНЕННЫХ ТОЧЕК ПО МЕТОДУ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК

ПАВЕЛ ГАЛАЙДА (PAVEL GALAJDA)

В статье разработан общий принцип номографирования по методу критических точек систем уравнений вида

$$z_4 = \frac{x(a + z_3 + bz)}{z_1(a + z_3) + z} + y,$$

$$z = c + z_1 z_3 + z_2, \quad x = \frac{d}{e + fz_3}, \quad y = \frac{cz_3}{e + fz_3}.$$

На основании приведенного метода построена односвязная составная номограмма для уравнения определяемого избыток воздуха при неполном сгорании топлива, о котором утверждалось [1], что совместить мнимые шкалы у зет — номограмм нельзя.

Adresa autora: Doc. Dr. Pavel Galajda, CSc., Katedra matematiky Strojnickej fakulty VŠT, Februárového víťazstva 9, Košice.