František Pecka

Poznámka ke kvadraturám s minimálním odhadem zbytku

Aplikace matematiky, Vol. 12 (1967), No. 5, 364–372

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103113`

POZNÁMKA KE KVADRATURÁM S MINIMÁLNÍM ODHADEM ZBYTKU

FRANTIŠEK PECKA

(Došlo dne 23. května 1966.)

Při určování kvadraturních formulí, které dávají minimální odhad zbytku na dané množině funkcí, předpokládá se jistý stupeň algebraické přesnosti a hledaná formule se určí metodami pro nalezení vázaného extrému. V tomto článku chci upozornit na to, že v některých případech je algebraická přesnost již důsledkem požadované minimalisace odhadu. Než uvedu znění věty, která je obsahem tohoto článku, vyslovím několik potřebných definic a pomocných vět. V celé práci se omezuji pouze na reálné obory a přívlastek reálný budu vynechávat.

Definice 1. *Označme jako C_r normovaný prostor všech funkcí $f(x)$, které mají na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ spojité derivace r-tého řádu. Normu definujme takto*:

$$\|f\| = \max\left(|f(0)|, |f'(0)|, \ldots, |f^{(r-1)}(0)|, \max_{x \in \langle 0,1 \rangle} |f^{(r)}(x)|\right).$$

Symbolem $C_r(M)$ budeme označovat množinu těch funkcí $f \in C_r$, pro které platí $\|f\| \leqq M$.

Definice 2. *Funkcionál Q_n, který každé funkci $f(x)$ definované a integrace schopné na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ přiřadí číslo*

$$Q_n(f) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k), \quad 0 \leqq x_1 < \ldots < x_n \leqq 1, \quad |A_k| < \infty,$$

budeme nazývat kvadraturní formulí s n uzly.

Zbytkem kvadraturní formule Q_n budeme rozumět hodnotu funkcionálu R_n definovaného rovnicí

$$R_n(f) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - Q_n(f).$$

Analogicky jako v knize [1] lze dokázat, že platí

$$(1) \qquad \sup_{f\in C_r(M)} |R_n(f)| = \max_{f\in C_r(M)} |R_n(f)| = M\left[\sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} |R_n(x^k)| + \int_0^1 |K_r(t)|\,\mathrm{d}t\right],$$

kde

$$(2) \qquad K_r(t) = \frac{1}{r!}\left[(1-t)^r - r\sum_{k=1}^{n} A_k(x_k - t)^{r-1} E(x_k - t)\right]$$

a

$$E(x_k - t) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad t \leqq x_k, \\ 0 & \text{pro} \quad t > x_k. \end{cases}$$

Definice 3. *Nechť existuje taková kvadraturní formule $\bar{Q}_n$, že pro její zbytek platí*

$$\max_{f\in C_r(M)} |\bar{R}_n(f)| = \min_{Q_n} \max_{f\in C_r(M)} |\bar{R}_n(f)|.$$

Pak budeme říkat, že $\bar{Q}_n$ je optimální kvadraturní formule třídy C_r.

Věta. *Buď $n \geqq r - 1 \geqq 0$ a $r \leqq 3$. Pak optimální kvadraturní formule $\bar{Q}_n$ třídy C_r je přesná pro každý polynom stupně menšího než r.*

Důkaz rozdělíme na tři části.

a) Nechť $r = 1$. Pak je podle (2)

$$(3) \qquad K_1(t) = 1 - t - \sum_{k=i+1}^{n} A_k \quad \text{pro} \quad t \in (x_i, x_{i+1}\rangle, \quad 0 \leqq i \leqq n,$$

kde jsme položili $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$.

Podle (1) a definice 3 musí být pro optimální formuli dosaženo minima výrazu

$$F = |R_n(1)| + \int_0^1 |K_1(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Předpokládejme, že u extremální formule je $R_n(1) \neq 0$. Pak existují všechny parciální derivace funkce F a pro uzly a koeficienty optimální formule musí uvnitř oboru J: $0 \leqq x_j \leqq 1$, $|A_i| < \infty$, $i = 1, \ldots, n$ platit rovnice

$$(4) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_j} = |K_1(x_j -)| - |K_1(x_j +)| = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial A_j} = -\operatorname{sgn} R_n(1) - \int_0^{x_j} |K_1(t)|\,\mathrm{d}t = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

Pokud je $n > 2$, obdržíme z posledních rovnic

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |K_1(t)| \, dt = 0 \, , \quad j = 1, \ldots, n - 1 \, .$$

$K_1(t)$ musí tedy mít kořen uvnitř každého intervalu (x_j, x_{j+1}), $j = 1, \ldots, n - 1$, tzn. musí být $A_j > 0$ a $K_1(x_j -) < 0$ pro $j = 2, \ldots, n$. Z rovnic (4) dále vyplývá

$$K_1(x_j -) = -K_1(x_j +) \, , \quad j = 2, \ldots, n$$

neboli

$$2(1 - x_j) = A_{j+1} + 2 \sum_{k=j}^{n} A_k \, , \quad j = 2, \ldots, n - 1 \, .$$

Z podmínky $K_1(x_j -) < 0$ dostáváme

$$0 \leqq 1 - x_j < \sum_{k=j}^{n} A_k \, , \quad j = 2, \ldots, n \, .$$

Srovnáním s předchozí rovnicí pak obdržíme, že je $A_{j+1} < 0$, $j = 2, \ldots, n - 1$. Tím jsme dospěli ke sporu.

V případě $n \leqq 2$ a při vyšetření hranice oboru J dospějeme opět ke sporu, pokud budeme předpokládat $R_n(1) \neq 0$. Je tedy optimální kvadraturní formule $\bar{Q}_n$ třídy C_1 přesná pro lib. konstantu, což je tvrzení věty.

b) Nechť $r = 2$. Označíme si opět

$$F = \frac{1}{M} \max_{f \in C_2(M)} |R_n(f)| \, .$$

Pak podle (1) bude

$$F = |R_n(1)| + |R_n(x)| + \int_0^1 |K_2(t)| \, dt \, ,$$

kde je podle (2)

$$K_2(t) = \tfrac{1}{2}(1 - t)^2 - \sum_{k=1}^{n} A_k (x_k - t) \, E(x_k - t) \, . \tag{5}$$

Snadno se ověří, že parciální derivace $\partial K_2 / \partial A_i$, $\partial K_2 / \partial x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ jsou po částech spojité pro x_j, A_j z oboru J a pro $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Lze tedy při derivování funkce F použít věty o derivaci integrálu podle parametru. Hledejme minimum funkce F nejprve za předpokladu, že v extremálním bodě existují všechny parciální derivace. V tom případě musejí platit rovnice

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = -A_i \operatorname{sgn} R_n(x) - A_i \int_0^1 E(x_i - t) \operatorname{sgn} K_2(t) \, dt = 0 \, , \tag{6}$$

$$\frac{\partial F}{\partial A_i} = -\operatorname{sgn} R_n(1) - x_i \operatorname{sgn} R_n(x) - \int_0^1 (x_i - t) \, E(x_i - t) \operatorname{sgn} K_2(t) \, dt = 0 \, ,$$

$$i = 1, \ldots, n \, .$$

Položíme-li v první rovnici $i = 1$, můžeme ji napsat ve tvaru

$$\int_0^1 \operatorname{sgn} K_2(t)\, \mathrm{d}t = - \operatorname{sgn} R_n(x) .$$

Tato rovnice může být splněna buď pro $R_n(x) = 0$ nebo pro $x_1 = 1$. Ale v případě $R_n(x) = 0$ neplatí předpoklad o existenci všech parciálních derivací funkce F. Zbývá tedy jediná možnost $x_1 = 1$. Pak je ale $n = 1$ a ze druhé rovnice soustavy (6) dostaneme

$$\int_0^1 (1 - t) \operatorname{sgn} K_2(t)\, \mathrm{d}t = - \operatorname{sgn} R_1(1) - \operatorname{sgn} R_1(x) .$$

Poslední rovnice může být splněna jen tehdy, když $R_1(1)$ a $R_1(x)$ mají opačná znaménka a když ještě $K_2(t)$ mění znaménko na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Podle (5) je $K_2(t) = (1 - t)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t - A_1\right)$ a z řečeného plyne, že musí být $\frac{1}{2} - A_1 = R_1(x) > 0$. Ale pak je i $R_1(1) = 1 - A_1 > 0$. Tedy rovnice (6) nemohou být splněny v extremálním bodě ani při $x_1 = 1$.

Tím je dokázáno, že extremální body funkce F leží buď na hranici oboru J, nebo v nich nejsou definovány všechny parciální derivace. Nyní vyšetříme hranici oboru J za předpokladu, že je $R_n(1) \neq 0$ i $R_n(x) \neq 0$. Je-li $x_1 = 0$, pak podle (6) máme $\partial F/\partial A_1 = - \operatorname{sgn} R_n(1) = 0$. Je-li $x_n = 1$, $x_1 \neq 0$, pak platí úvahy provedené v předchozím odstavci.

Zjistili jsme, že funkce F může dosáhnout minima na J pouze v takovém bodě, ve kterém je alespoň jedno z čísel $R_n(1)$, $R_n(x)$ rovno nule. Dokážeme, že u optimální formule musí být rovno nule i druhé z těchto čísel. Nechť je např. $R_n(x) = 0$. Budeme hledat vázané minimum funkce F metodou neurčitých koeficientů. Za tím účelem si utvoříme pomocnou funkci

$$G = |R_n(1)| + \int_0^1 |K_2(t)|\, \mathrm{d}t + s\left[\tfrac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n} A_k x_k\right] .$$

Dále budeme postupovat jako předešle. Předpokládejme, že v extremálním bodě je $R_n(1) \neq 0$. Pak v tomto bodě existují všechny parciální derivace a pro určení uzlů a koeficientů optimální formule dostáváme tyto rovnice:

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = -A_i \int_0^1 E(x_i - t) \operatorname{sgn} K_2(t)\, \mathrm{d}t - sA_i = 0 ,$$

$$\frac{\partial G}{\partial A_i} = - \operatorname{sgn} R_n(1) - \int_0^1 (x_i - t)\, E(x_i - t) \operatorname{sgn} K_2(t)\, \mathrm{d}t - sx_i = 0 , \quad i = 1, \ldots, n .$$

První část rovnic přepíšeme na tvar

$$\int_0^{x_i} \operatorname{sgn} K_2(t)\, \mathrm{d}t = -s , \quad i = 1, \ldots, n$$

a druhou část rovnic lze pak upravit takto

$$x_i \int_0^{x_i} \operatorname{sgn} K_2(t)\, \mathrm{d}t - \int_0^{x_i} t \operatorname{sgn} K_2(t)\, \mathrm{d}t = - \operatorname{sgn} R_n(1) - s x_i\,.$$

Odtud

$$\int_0^{x_i} t \operatorname{sgn} K_2(t)\, \mathrm{d}t = \operatorname{sgn} R_n(1)\,, \quad i = 1, \ldots, n\,. \tag{7}$$

Platí $\left|\int_0^{x_i} t \operatorname{sgn} K_2\, \mathrm{d}t\right| \leqq \int_0^{x_i} t\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}x_i^2 \leqq \frac{1}{2}$. Z toho vyplývá, že za našeho předpokladu nemohou být rovnice (7) splněny, a tedy funkce G dosahuje svého minima na hranici oboru J. Dá se obdobným způsobem ukázat, že pak v bodě minima musí být splněna rovnost $R_n(1) = 0$.

Tím je dokázáno, že z optimálnosti formule a z podmínky $R_n(x) = 0$ plyne i $R_n(1) = 0$. Úplně analogicky se dá dokázat, že z požadavku optimálnosti formule a z podmínky $R_n(1) = 0$ plyne zase rovnost $R_n(x) = 0$.

Důkaz části b) je ukončen. Požadavek $n \geqq r - 1$ neklade v případech a) a b) žádné omezení na počet uzlů kvadraturní formule. Tak tomu bude teprve ve zbývajícím případě, který nyní vyšetříme.

c) Nechť $r = 3$. Označíme

$$F = \frac{1}{M} \max_{f \in C_3(M)} \left|R_n(f)\right|$$

a budeme hledat minimum funkce F na oboru J za předpokladu, že je $R_n(x^k) \neq 0$ pro $k = 0, 1, 2$. V tomto případě existují všechny parciální derivace funkce F. Budeme vyšetřovat pouze vnitřní body pásu J, neboť na hranici lze postupovat téměř stejným způsobem. To jsme viděli již v části b).

Za našeho předpokladu musí v extremálním bodě uvnitř pásu J platit systém rovnic $\partial F / \partial x_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Vyjádříme F pomocí vztahu (1) a po jednoduché úpravě obdržíme

$$\int_0^{x_i} (x_i - t) \operatorname{sgn} K_3(t)\, \mathrm{d}t = - \operatorname{sgn} R_n(x) - x_i \operatorname{sgn} R_n(x^2)\,, \quad i = 1, \ldots\, n\,.$$

Podle předpokladu věty je $n \geqq 2$ a tedy můžeme od sebe odečíst předchozí rovnice pro $i = 1$ a $i = 2$. Bude

$$(x_2 - x_1) \int_0^{x_1} \operatorname{sgn} K_3\, \mathrm{d}t + \int_0^{x_2} (x_2 - t) \operatorname{sgn} K_3\, \mathrm{d}t = - (x_2 - x_1) \operatorname{sgn} R_n(x^2)\,. \tag{8}$$

Absolutní hodnota levé strany rovnice (8) nemůže být větší než $\frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2)$ a tedy je menší než $x_2 - x_1$, neboť je $x_1 + x_2 < 2$. To znamená, že rovnice (8) nemůže být splněna, pokud je $R_n(x^2) \neq 0$. Proto v extremálním bodě funkce F musí alespoň pro jednu hodnotu $k \in \{0, 1, 2\}$ platit rovnost $R_n(x^k) = 0$. Nechť $R_n(x^j) = 0$. Budeme hledat vázaný extrém funkce F metodou neurčitých koeficientů. Utvoříme si pomocnou funkci

$$G = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{2} \frac{1}{i!} |R_n(x^i)| + \int_0^1 |K_3(t)| \, dt + s \, R_n(x^j) .$$

Pro určení extremálního bodu dostaneme následující systém rovnic:

$$\int_0^{x_k} (x_k - t) \operatorname{sgn} K_3 \, dt = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{2} x_k^{i-1} \operatorname{sgn} R_n(x^i) - j \, . \, s \, . \, x_k^{j-1} , \tag{9}$$

$$\int_0^{x_k} (x_k - t)^2 \operatorname{sgn} K_3 \, dt = 2 \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{2} \frac{1}{i!} x_k^i \operatorname{sgn} R_n(x^i) - 2 s x_k^j , \quad k = 1, \ldots, n .$$

Je-li $j \neq 0$, můžeme první z rovnic (9) vynásobit číslem $2/j \; x_k$ a odečíst od nich druhé Dostaneme

$$\int_0^{x_k} (x_k - t) \left(\frac{2}{j} x_k - x_k + t \right) \operatorname{sgn} K_3 \, dt = - 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{2} \left(\frac{1}{i!} - \frac{1}{j} \right) x_k^i \operatorname{sgn} R_n(x^i) - 2 \operatorname{sgn} R_n(1) .$$

Je $2/j - 1 \leqq 1$ pro $j = 1, 2$. Proto absolutní hodnota levé strany rovnice nemůže být větší než

$$\int_0^{x_k} (x_k^2 - t^2) \, dt = \frac{2}{3} x_k^3 \leqq \frac{2}{3} .$$

Pokud je $R_n(1) \neq 0$, nemůže být absolutní hodnota pravé strany rovnice menší než $2 - x_k^3 \geqq 1$. To znamená, že rovnice (9) nemohou být splněny.

Je-li $j = 0$, pak první rovnice soustavy (9) mají tvar

$$\int_0^{x_k} (x_k - t) \operatorname{sgn} K_3 \, dt = - \operatorname{sgn} R_n(x) - x_k \operatorname{sgn} R_n(x^2) , \quad k = 1, \ldots, n .$$

Odečtením těchto rovnic pro $k = 1$ a $k = 2$ obdržíme rovnici

$$(x_2 - x_1) \int_0^{x_1} \operatorname{sgn} K_3 \, dt + \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - t) \operatorname{sgn} K_3 \, dt = - (x_2 - x_1) \operatorname{sgn} R_n(x^2) .$$

Levá strana poslední rovnice nepřesáhne v absolutní hodnotě číslo

$$x_1(x_2 - x_1) + \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1)^2 = \tfrac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) < (x_2 - x_1) .$$

Tedy daná rovnice může být splněna jen tehdy, bude-li $R_n(x^2) = 0$.

Tímto jsme dokázali, že pro optimální formuli může být nejvýše jedna z hodnot $R_n(x^k)$ $(k = 0, 1, 2)$ různá od nuly. Označme ji jako $R_n(x^j)$. Utvoříme opět pomocnou funkci

$$G_1 = \frac{1}{j!} |R_n x^j| + \int_0^1 |K_3(t)| \, \mathrm{d}t + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{2} s_i \, R_n(x^i) \, .$$

V bodě minima musí být splněny rovnice

$$\text{(10)} \qquad \int_0^{x_k} (x_k - t) \operatorname{sgn} K_3 \, \mathrm{d}t = -\frac{j}{j!} x_k^{j-1} \operatorname{sgn} R_n(x^j) - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{2} i \, s_i x_k^{i-1} \, ,$$

$$\tfrac{1}{2} \int_0^{x_k} (x_k - t)^2 \operatorname{sgn} K_3 \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{j!} x_k^j \operatorname{sgn} R_n(x^j) - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{2} s_i x_k^i \, , \quad k = 1, \ldots, n \, .$$

Položíme-li $j = 0$, obdržíme ze soustavy (10) tyto rovnice:

$$\text{(11)} \qquad \int_0^{x_k} (x_k - t) \operatorname{sgn} K_3 \, \mathrm{d}t = -s_1 - 2 s_2 x_k \, , \quad k = 1, \ldots, n \, ,$$

$$\tfrac{1}{2} \int_0^{x_2} (x_2 - t)^2 \operatorname{sgn} K_3 \, \mathrm{d}t = -\operatorname{sgn} R_n(1) - s_1 x_2 - s_2 x_2^2 \, .$$

Odečtením prvních rovnic soustavy (11) pro $k = 1$ a $k = 2$ dostaneme

$$2 s_2 (x_1 - x_2) = (x_2 - x_1) \int_0^{x_1} \operatorname{sgn} K_3 \, \mathrm{d}t + \int_0^{x_2} (x_2 - t) \operatorname{sgn} K_3 \, \mathrm{d}t$$

a tedy $|s_2| \leqq \frac{1}{4}(x_1 + x_2) < \frac{1}{2} x_2$. Nyní položíme v systému (11) $k = 2$ a z obou rovnic vyloučíme parametr s_1. Bude

$$\text{(12)} \qquad \tfrac{1}{2} \int_0^{x_2} (x_2^2 - t^2) \operatorname{sgn} K_3 \, \mathrm{d}t = \operatorname{sgn} R_n(1) - s_2 x_2^2 \, .$$

Absolutní hodnota levé strany rovnice (12) nemůže být větší než $\frac{1}{3} x_2^3$. Dále je

$$|\operatorname{sgn} R_n(1) - s_2 x_2^2| \geqq 1 - |s_2 x_2^2| > 1 - \tfrac{1}{2} x_2^3 \, .$$

To však znamená, že rovnice (12) nemůže být splněna pro $R_n(1) \neq 0$, protože pak je $\frac{1}{3} x_2^3 < 1 - \frac{1}{2} x_2^3$. Nechť je $j \neq 0$. Pak lze systém rovnic (10) přepsat takto

$$\int_0^{x_k} (x_k - t) \operatorname{sgn} K_3 \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{(j-1)!} x_k^{j-1} \operatorname{sgn} R_n(x^j) - i s_i x_k^{i-1} \, ,$$

$$\tfrac{1}{2} \int_0^{x_k} (x_k - t)^2 \operatorname{sgn} K_3 \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{j!} x_k^j \operatorname{sgn} R_n(x^j) - s_0 - s_i x_k^i \, ,$$

$$k = 1, \ldots, n \, , \quad 0 \neq i \neq j \quad (i = 1, 2) \, .$$

Utvoříme-li rozdíl prvních rovnic pro hodnoty $k = 1$, $k = 2$ a učiníme-li totéž i s druhými rovnicemi, dostaneme po menší úpravě

$$(13) \qquad (x_2 - x_1) \int_0^{x_1} \operatorname{sgn} K_3 \, \mathrm{d}t + \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - t) \operatorname{sgn} K_3 \, \mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{(j-1)!} (x_1^{j-1} - x_2^{j-1}) \operatorname{sgn} R_n(x^j) + i s_i (x_1^{i-1} - x_2^{i-1}),$$

$$(14) \qquad \tfrac{1}{2} \int_0^{x_2} (x_2 - t)^2 \operatorname{sgn} K_3 \, \mathrm{d}t - \tfrac{1}{2} \int_0^{x_1} (x_1 - t)^2 \operatorname{sgn} K_3 \, \mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{j!} (x_1^j - x_2^j) \operatorname{sgn} R_n(x^j) + s_i (x_1^i - x_2^i).$$

Přitom je v rovnicích (13) a (14) $i \neq j$ ($i = 1, 2$; $j = 1, 2$).

Je-li $j = 1$, pak $i = 2$ a v rovnici (13) se anuluje člen obsahující výraz $\operatorname{sgn} R_n(x)$. V tomto případě vyloučíme parametr s_2 z rovnic (13) a (14). Upravením dostaneme rovnici

$$(15) \qquad \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - t)(x_1 + t) \operatorname{sgn} K_3 \, \mathrm{d}t + 2(x_2 - x_1) \int_0^{x_1} t \operatorname{sgn} K_3 \, \mathrm{d}t =$$
$$= 2(x_2 - x_1) \operatorname{sgn} R_n(x).$$

Vypočteme maximální možnou absolutní hodnotu L levé strany rovnice (15). Je

$$L = \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - t)(x_1 + t) \, \mathrm{d}t + 2(x_2 - x_1) \int_0^{x_1} t \, \mathrm{d}t =$$
$$= \tfrac{1}{6}(x_2 - x_1)(x_2^2 + 7x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_1) \leqq \tfrac{1}{6}(x_2 - x_1)(x_2^2 + 5x_1^2 + 6x_1).$$

Znaménko rovnosti může platit pouze tehdy, je-li $x_1 = 0$. Pak je $L = \frac{1}{6}x_2^3$. Jinak je vždy $L < 2(x_2 - x_1)$. Opět docházíme k závěru, že rovnice (15) může být splněna jen v případě $R_n(x) = 0$.

Je-li $j = 2$, pak $i = 1$ a v rovnici (13) se anuluje člen obsahující parameter s_1. Absolutní hodnota levé strany rovnice (13) je menší než $x_2 - x_1$, a proto může být tato rovnice splněna pouze pro $R_n(x^2) = 0$.

Vyčerpáním všech možností jsme dokázali poslední část věty.

Literatura

[1] *В. И. Крылов:* Приближенное вычисление интегралов. Москва 1959.

[2] *С. М. Никольский:* Квадратурные формулы. Москва 1958.

[3] *A. Sard:* Best approximate integration formulas. Best approximation formulas. American Journal of Math. 71, 1949, 80—91.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ О КВАДРАТУРАХ С НАИМЕНЬШЕЙ ОЦЕНКОЙ ОСТАТКА

ФРАНТИШЕК ПЕЦКА (František Pecka)

Работа занимается вопросом минимизации нормы остатка квадратурной формулы как линейного функционала в пространстве C_r. Говорят, что функция $f(x)$ принадлежит пространству C_r, если она обладает непрерывной производной порядка $r - 1$. Норма в C_r задана равенством

$$\|f\| = \max\left(|f(0)|, |f'(0)|, \ldots, |f^{(r-1)}(0)|, \max_{x \in \langle 0,1 \rangle} |f^{(r)}(x)|\right).$$

В статье показано, что в случае $r \leqq 3$ квадратурные формулы с наименьшей нормой остатка являются точными для всех многочленов степени $< r$, как только число узлов $\geqq r - 1$.

Случай $r > 3$ остается открытым.

Summary

NOTE ON THE BEST APPROXIMATE INTEGRATION FORMULAE

František Pecka

The remainder of an integration formula is considered as a linear functional on the space C_r of functions $f(x)$ possessing continuous r-th derivative on $\langle 0, 1 \rangle$ with the norm

$$\|f\| = \max\left(|f(0)|, |f'(0)|, \ldots, |f^{(r-1)}(0)|, \max_{x \in \langle 0,1 \rangle} |f^{(r)}(x)|\right).$$

In the case $r \leqq 3$ the author proves the following theorem: Let $n \geqq r - 1$. Then for n-point integration formulae the least norm of the remainder is achieved only if the remainder vanishes whenever $f(x)$ is a polynomial of degree $< r$.

The case $r > 3$ remains open.

Adresa autora: František Pecka, Katedra numerické matematiky přírodovědecké fakulty UJEP, Janáčkovo nám. 2a, Brno.