Jaroslav Záhora

Nomogramy se třemi listy jako početní pravítka

Aplikace matematiky, Vol. 12 (1967), No. 3, 209–216

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103090

NOMOGRAMY SE TŘEMI LISTY JAKO POČETNÍ PRAVÍTKA

JAROSLAV ZÁHORA

(Došlo dne 30. června 1966.)

1. ÚVOD

Článek pojednává o nomogramu se třemi listy π, π', π'', který je upraven jako početní pravítko. Předpokládáme, že listy π a π' jsou neprůhledné a posouvají se vedle sebe jako pevná část (podklad) π a šoupátko π' početního pravítka. Třetí list π'' je průhledný posuvný jezdec, překrývající listy π i π'. Předpokládáme, že na listech π a π' jsou stupnice nebo binární pole a na listu π'' soustavy isoplét.

Kótované útvary na listech π resp. π' resp. π'' vyjádříme v pravoúhlém souřadnicovém systému $(\xi; \eta)$ resp. $(\xi'; \eta')$ resp. $(\xi''; \eta'')$. V základní poloze všech tří částí pravítka nechť se souřadnicové osy všech tří systémů ztotožní. Předpokládáme, že šoupátko i jezdec jsou posuvné ve směru osy ξ.

Výsledků tohoto článku lze použíti rovněž při navrhování rotačního početního pravítka se třemi soustřednými kruhovými listy. V tomto případě je třeba položiti v zobrazovacích rovnicích místo souřadnic pravoúhlých $(\xi; \eta)$ souřadnice polární $(\varphi; \varrho)$.

2. POČETNÍ PRAVÍTKO PRO ŘEŠENÍ VZTAHŮ O $6n$ PROMĚNNÝCH

Na podkladu π nechť jsou dvě binární pole

$$\xi = f_{1,2}\,, \quad \eta = g_{1,2} \tag{1}$$

a

$$\xi = f_{3,4}\,, \quad \eta = g_{3,4}\,, \tag{2}$$

na šoupátku π' nechť je $2(n-1)$ binárních polí

$$\xi' = f_{6i-5,6i-4}\,, \quad \eta' = g_{6i-5,6i-4} \quad (i = 2, 3, \ldots, n)\,, \tag{3}$$

$$\xi' = f_{6i-3,6i-2}\,, \quad \eta' = g_{6i-3,6i-2} \quad (i = 2, 3, \ldots, n) \tag{4}$$

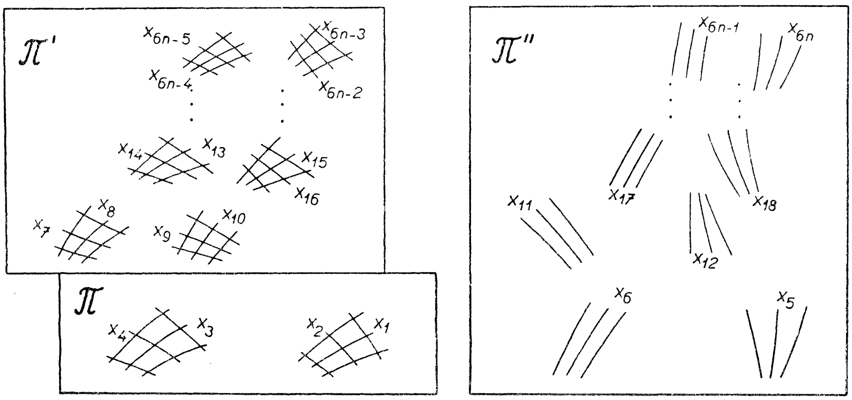
a na jezdci π'' nechť je $2n$ systémů isoplét o rovnicích

$$(5) \qquad \xi'' = F_{6i-1}(x_{6i-1}; \eta''), \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

a

$$(6) \qquad \xi'' = F_{6i}(x_{6i}; \eta''), \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Schéma tohoto početního pravítka je na obr. 1.



Obr. 1. Schéma početního pravítka pro řešení kanonického tvaru (20).

Předpokládáme, že se při výpočtu bude střídavě posouvati jezdcem a šoupátkem. Bude celkem n nastavení jezdce a $n - 1$ nastavení šoupátka. Výpočet se provede tímto postupem:

Nejprve posuneme jezdce π'' o M_1 délkových jednotek vzhledem k podkladu tak, aby byl splněn kontakt

$$(7) \qquad B_{3,4} \mapsto L''_6 .$$

Mezi souřadnicemi ξ a ξ'' při této první poloze jezdce platí vztah

$$(8) \qquad \xi'' = \xi - M_1$$

a vzhledem k (2), (6), (7) a (8) platí

$$(9) \qquad M_1 = f_{3,4} - F_6(x_6; g_{3,4}).$$

Dále posouváme střídavě vždy nejprve šoupátko a potom jezdce. Pro $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ nechť je i-té posunutí šoupátka o K_i délkových jednotek vzhledem k i-té poloze jezdce definováno kontaktem

$$(10) \qquad B'_{6(i+1)-5, 6(i+1)-4} \mapsto L''_{6(i+1)-1} .$$

Mezi souřadnicí ξ' při i-té poloze šoupátka a souřadnicí ξ'' při i-té poloze jezdce platí vztah

(11) $$\xi'' = \xi' + K_i$$

a vzhledem k (3), (5), (10) a (11) platí pro $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ vztah

(12) $$K_i = -f_{6(i+1)-5,6(i+1)-4} + F_{6(i+1)-1}(x_{6(i+1)-1}\,;\; g_{6(i+1)-5,6(i+1)-4})\,.$$

Pro $i = 2, 3, \ldots, n$ nechť je i-té posunutí jezdce o M_i délkových jednotek vzhledem k $(i - 1)$ poloze šoupátka definováno kontaktem

(13) $$B'_{6i-3,6i-2} \mapsto L''_{6i}\,.$$

Při tom mezi souřadnicemi ξ' a ξ'' platí

(14) $$\xi'' = \xi' - M_i$$

a vzhledem k (4), (6), (13) a (14) platí

(15) $$M_i = f_{6i-3,6i-2} - F_{6i}(x_{6i};\, g_{6i-3,6i-2})\,, \quad i = 2, 3, \ldots, n\,.$$

Čtecí kontakt nechť je

(16) $$B_{1,2} \mapsto L''_5$$

mezi podkladem a poslední (n-tou) polohou jezdce. Je-li při kontaktu (16) podklad posunut o K_n délkových jednotek vzhledem k n-té poloze jezdce, platí

(17) $$\xi'' = \xi + K_n\,.$$

Odtud a ze vztahů (1), (5) a (16) plyne

(18) $$K_n = -f_{1,2} + F_5(x_5;\, g_{1,2})\,.$$

Z definic veličin M_i a K_i plyne platnost rovnice

(19) $$\sum_{i=1}^{n} (M_i + K_i) = 0\,.$$

Do rovnice (19) můžeme za M_i a K_i dosaditi výrazy z rovnic (9), (12), (15) a (18). Tak získáme výsledek

(20) $$\sum_{i=1}^{n} \{f_{6i-5,6i-4} - f_{6i-3,6i-2} - F_{6i-1}(x_{6i-1};\, g_{6i-5,6i-4}) + F_{6i}(x_{6i};\, g_{6i-3,6i-2})\} = 0\,.$$

Tato rovnice (20) je kanonickým tvarem, který lze zobraziti uvažovaným početním pravítkem. Výsledek vyjádříme touto větou:

Věta 2.1. *Početní pravítko o zobrazovacích rovnicích* (1), (2), (3), (4), (5) *a* (6) *řeší vztah* (20) *podle tohoto klíče*:

1. *Jezdce posuneme do první polohy tak, aby byl splněn kontakt* (7).

2. *Posunujeme střídavě vždy šoupátkem a jezdcem tak, aby byl splněn při posunutí šoupátka kontakt* (10) *a při posunutí jezdce kontakt* (13). (*Šoupátko se tímto postupem posune do* 1., 2., ..., $(n - 1)$. *polohy, jezdec do* 2., 3., ..., *n-té polohy.*)

3. *Poslední* (*n-tá*) *poloha jezdce určí řešící kontakt* (16).

Poznámka 2.1. Změnou označení proměnných v rovnici (20) a v zobrazovacích rovnicích pravítka lze kteroukoliv z $2n$ proměnných pokládati za neznámou a vyjádřiti kótovaným útvarem obsaženým v řešícím kontaktu (16).

Poznámka 2.2. Snadno nahlédneme, že bez dalších úprav pravítka lze za řešící kontakt pokládati místo kontaktu (16) také $B_{3,4} \mapsto L''_6$ nebo $B'_{7,8} \mapsto L''_{11}$ nebo $B'_{6n-3,6n-2} \mapsto L''_{6n}$.

Chceme-li na pravítku počítati mimo proměnné, uvedené v možných řešících kontaktech ještě některou jinou proměnnou, opatříme jezdce indexem I (např. $\xi'' = 0$) a podklad pomocnou stupnicí (např. měřítkem $\xi = \alpha p$) na přímce rovnoběžné s osou ξ. K i-té poloze jezdce lze potom přiřaditi číslo p_i, které index I vytíná na pomocné stupnici a jezdce lze do této i-té polohy znovu nastaviti bez ohledu na eventuálně změněnou polohu šoupátka. Je-li např. neznámá proměnná x_{6i-2}, $(1 < i < n)$, lze na pravítu počítati takto:

1. Posunouti jezdec do n-té polohy. (Kontakt (16).)

2. Posouvati střídavě nejprve šoupátkem a potom jezdcem do $(n - 1)$. polohy, $(n - 2)$. polohy atd. až posunouti jezdcem do i-té polohy, tak, aby byl splněn kontakt (10). Přitom přečísti hodnotu p_i.

3. Jezdcem posunouti do 1. polohy. (Kontakt (7).)

4. Šoupátkem posunouti do 1. polohy (kontakt (10) pro $i = 1$) a potom střídavě nejprve jezdcem a potom šoupátkem posouvati do 2, 3., ..., $(i - 1)$. polohy.

5. Šoupátko ponechati v $(i - 1)$. poloze a jezdec nastaviti do i-té polohy pomocí hodnoty p_i. Přečísti neznámou hodnotu x_{6i-2} pomocí kontaktu (13).

Poznámka 2.3. Zvětšení počtu možných řešících kontaktů lze dosáhnouti také zvětšením počtu šoupátek. Je např. možné uvažovati na našem pravítku místo jediného šoupátka $(n - 1)$ šoupátek tak, aby na každém z nich byla dvě binární pole (3) a (4) odpovídající téže hodnotě i. Předpokládáme-li, že kótované útvary na podkladu i jezdci jsou nezměněné, je postup výpočtu obdobný postupu uvedenému ve větě 2.1. Na tomto pravítku lze libovolnou z $6n$ proměnných pokládati za neznámou a její hodnotu přečísti bez užití pomocné stupnice.

3. SPECIALISACE PŘEDCHÁZEJÍCÍCH VÝSLEDKŮ

3.1. Všimněme si nejprve početního pravítka z odst. 2., pro které $n = 1$. V tomto případě nejsou na šoupátku žádné kótované útvary a pravítko se redukuje na nomogram s jednou průsvitkou o jednom stupni volnosti. Schéma tohoto pravítka získáme z obr. 1., uvažujeme-li pouze útvary kótované prvními šesti proměnnými. Tento nomogram řeší rovnici $f_{1,2} - f_{3,4} - F_5(x_5; g_{1,2}) + F_6(x_6; g_{3,4}) = 0$ podle klíče $B_{3,4} \vdash\!\dashv L''_6$, $B_{1,2} \vdash\!\dashv L''_5$.

Pro $n = 2$ získáme početní pravítko, jehož schéma obdržíme z obr. 1, uvažujeme-li pouze útvary, kótované proměnnými $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$. Toto pravítko řeší rovnici

$$(21) \qquad f_{1,2} - f_{3,4} + f_{7,8} - f_{9,10} - F_5(x_5; g_{1,2}) + F_6(x_6; g_{3,4}) - \\ - F_{11}(x_{11}; g_{7,8}) + F_{12}(x_{12}; g_{9,10}) = 0$$

podle tohoto klíče:

1. První nastavení jezdce: $B_{3,4} \vdash\!\dashv L''_6$.
2. První nastavení šoupátka při nezměněné první poloze jezdce: $B'_{7,8} \vdash\!\dashv L''_{11}$.
3. Druhé nastavení jezdce při nezměněné první poloze šoupátka: $B'_{9,10} \vdash\!\dashv L''_{12}$.
4. Čtení výsledku $B_{1,2} \vdash\!\dashv L''_5$.

V článku [4] upozorňuje E. Jokl na možnost řešení rovnice (21) početním pravítkem s podkladem, jedním šoupátkem a dvěma jezdci.

V dalších odstavcích si všimneme početních pravítek, získaných speciální volbou kótovaných útvarů.

3.2. Jsou-li na podkladu početního pravítka z odst. 2. místo binárních polí (1), (2) přímé stupnice

$$(1') \qquad \xi = \varphi_1\,, \quad \eta = k_1$$

a

$$(2') \qquad \xi = \varphi_3\,, \quad \eta = k_3\,,$$

kde k_1, k_3 jsou konstanty, jsou-li na šoupátku místo binárních polí (3) a (4) stupnice

$$(3') \qquad \xi' = \varphi_{6i-5}\,, \quad \eta' = k_{6i-5}$$

a

$$(4') \qquad \xi' = -\varphi_{6i-3}\,, \quad \eta' = k_{6i-3}\,, \quad (i = 2, 3, \ldots, n)\,,$$

kde k_{6i-5}, k_{6i-3} jsou konstanty a jsou-li na jezdci systémy přímých isoplét

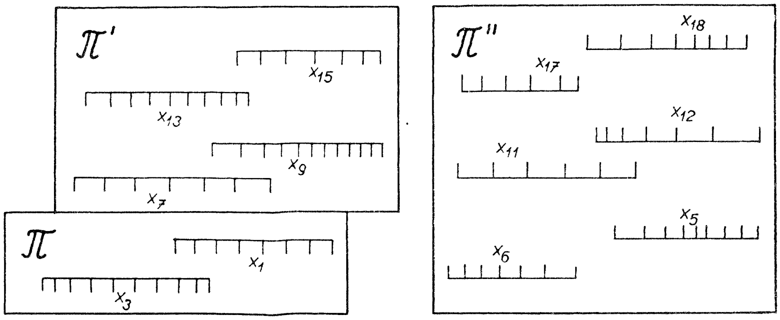
$$(5') \qquad \xi'' = -\varphi_{6i-1}\,,$$

$$(6') \qquad \xi'' = \varphi_{6i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

zobrazuje početní pravítko součtový tvar o $4n$ proměnných

$$\sum_{i=1}^{n} (\varphi_{6i-5} + \varphi_{6i-3} + \varphi_{6i-1} + \varphi_{6i}) = 0\,.$$

Z isoplét (5') resp. (6') stačí rýsovati stupnice $\xi'' = -\varphi_{6i-1}$, $\eta'' = k_{6i-5}$ resp. $\xi'' = \varphi_{6i}$, $\eta'' = k_{6i-3}$ a kontakty (7), (10), (13) se stanou dvojkontakty $P_3 \boxminus P''_6$, $P'_{6(i+1)-5} \boxminus P''_{6(i+1)-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$, $P'_{6i-3} \boxminus P''_{6i}$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$. Na obr. 2 je schéma takového pravítka pro $n = 3$.



Obr. 2. Schéma početního pravítka pro řešení součtového tvaru o dvanácti proměnných.

3.3. Jsou-li na podkladu početního pravítka binární pole $\xi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\eta = \varphi_1$ a $\xi = -\varphi_3 - \varphi_4$, $\eta = \varphi_3$, na šoupátku binární pole $\xi' = \varphi_{6i-5} + \varphi_{6i-4}$, $\eta' = \varphi_{6i-5}$ a $\xi' = -\varphi_{6i-3} - \varphi_{6i-2}$, $\eta' = \varphi_{6i-3}$ kde $i = 2, 3, \ldots, n$ a na jezdci systémy isoplét $\xi'' = -\varphi_{6i-1}$ a $\xi'' = \varphi_{6i}$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, zobrazuje pravítko součtový tvar o $6n$ proměnných

$$\sum_{i=1}^{n} (\varphi_{6i-5} + \varphi_{6i-4} + \varphi_{6i-3} + \varphi_{6i-2} + \varphi_{6i-1} + \varphi_{6i}) = 0\,.$$

3.4. Jsou-li na podkladu binární pole $\xi = \varphi_1\varphi_2$, $\eta = \varphi_1$ a $\xi = -\varphi_3\varphi_4$, $\eta = \varphi_3$, na šoupátku binární pole

$$\xi' = \varphi_{6i-5}\varphi_{6i-4}\,, \quad \eta' = \varphi_{6i-5} \quad \text{a} \quad \xi' = -\varphi_{6i-3}\varphi_{6i-2}\,,$$

$\eta' = \varphi_{6i-3}$ pro $i = 2, 3, \ldots, n$, a na jezdci systémy isoplét $\xi'' = -\varphi_{6i-1}$ a $\xi'' = \varphi_{6i}$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, zobrazuje pravítko kanonický tvar

$$\sum_{i=1}^{n} (\varphi_{6i-5}\varphi_{6i-4} + \varphi_{6i-3}\varphi_{6i-2} + \varphi_{6i-1} + \varphi_{6i}) = 0\,.$$

Literatura

[1] *Hruška Václav:* Nomogramy s jednou průsvitkou. Praha 1947.
[2] *Hruška Václav:* Počet grafický a graficko-mechanický. Praha 1952.
[3] *Хованский Г. С.* Номограммы с ориентированным транспарантом. Москва 1957.
[4] *Jokl Evžen:* Nomogramy s pohyblivými součástmi. Sborník ČVUT č. 24, Praha 1961.
[5] *Pleskot Václav:* Nomografie. Praha 1963.
[6] *Pleskot Václav:* Nomografické metody. Praha 1962.

Резюме

НОМОГРАММЫ С ТРЕМЯ ЛИСТАМИ В ВИДЕ СЧЕТНЫХ ЛИНЕЕК

ЯРОСЛАВ ЗАГОРА (JAROSLAV ZÁHORA)

В статье говорится о номограмме с тремя листами, упорядоченной в виде счетной линейки для решения отношений с $6n$ переменными.

На фоне π имеются два бинарных поля $\xi = f_{1,2}, \eta = g_{1,2}$ и $\xi = f_{3,4}, \eta = g_{3,4}$, на листе π', который передвигается рядом с листом π_1 — $2(n-1)$ бинарных полей

$$\xi' = f_{6i-5,6i-4}, \eta' = g_{6i-5,6i-4} \quad \text{и} \quad \xi' = f_{6i-3,6i-2}\,, \quad \eta' = g_{6i-3,6i-2}\,,$$

где $i = 2, 3, \ldots, n$, и на прозрачном листе π'', который покрывает листы π и π' — $2n$ систем изоплет $\xi'' = F_{6i-1}(x_{6i-1}, \eta'')$ и $\xi'' = F_{6i}(x_{6i}, \eta'')$, где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Счетная линейка решает каноническую форму

$$\sum_{i=1}^{n} \{f_{6i-5,6i-4} - f_{6i-3,6i-2} - F_{6i-1}(x_{6i-1}; g_{6i-5,6i-4}) + \\ + F_{6i}(x_{6i}; g_{6i-3,6i-2})\} = 0$$

следующим образом:

1. Лист π'' передвигается так, чтобы достичь контакта $B_{3,4} \mapsto L''_6$.
2. Производится смешанное передвижение листов π' и π'' так, чтобы при передвижении листа π' достичь контакта

$$B'_{6(i+1)-5,6(i+1)-4} \mapsto L''_{6(i+1)-1} \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,,$$

   и при передвижении листа π'' достичь контакта $B'_{6i-3,6i-2} \mapsto L''_{6i}$ для $i = 2, 3, \ldots, n$.
3. Последнее (n-ое) положение листа π'' определит решающий контакт $B_{1,2} \mapsto L''_5$.

Счетную линейнку можно применить тоже, например, к решению суммарной формы

$$\sum_{i=1}^{n} (\varphi_{6i-5} + \varphi_{6i-4} + \varphi_{6i-3} + \varphi_{6i-2} + \varphi_{6i-1} + \varphi_{6i}) = 0\,,$$

к решению формы

$$\sum_{i=1}^{n} (\varphi_{6i-5}\varphi_{6i-4} + \varphi_{6i-3}\varphi_{6i-2} + \varphi_{6i-1} + \varphi_{6i}) = 0 \quad \text{и т. д.}$$

Résumé

NOMOGRAMES A TROIS FEUILLES COMME REGLES A CALCUL

JAROSLAV ZÁHORA

L'article traîte des nomogrames à trois feuilles π, π', π'', servant comme règles à calcul pour résoudre des équations à $6n$ variables.

Sur le fond π on a deux réseaux $\xi = f_{1,2}$, $\eta = g_{1,2}$ et $\xi = f_{3,4}$, $\eta = g_{3,4}$, sur la feuille π', qui glisse à côté de la feuille π, on a $2(n-1)$ réseaux $\xi' = f_{6i-5,6i-4}$, $\eta' = g_{6i-5,6i-4}$ et $\xi' = f_{6i-3,6i-2}$, $\eta' = g_{6i-3,6i-2}$ pour $i = 2, 3, \ldots, n$ et sur la feuille transparente π'', qui courve les feuilles π et π', on a $2n$ systèmes d'isoplèthes $\xi'' = F_{6i-1}(x_{6i-1}; \eta'')$ et $\xi'' = F_{6i}(x_{6i}; \eta'')$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

Le règle à calcul résout la forme canonique

$$\sum_{i=1}^{n} \{f_{6i-5,6i-4} - f_{6i-3,6i-2} - F_{6i-1}(x_{6i-1}; g_{6i-5,6i-4}) + \\ + F_{6i}(x_{6i}; g_{6i-3,6i-2})\} = 0$$

d'après la clef suivante:

1. Le glissement de la feuille π' de façon que le contact $B_{3,4} \mapsto L''_6$ soit satisfait.

2. Le glissement alternatif de la feuille π' et π'' de la façon suivante: Le glissement de la feuille π' sera déterminé par le contact $B'_{6(i+1)-5,6(i+1)-4} \mapsto L''_{6(i+1)-1}$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Le glissement de la feuille π'' sera déterminé par le contact $B'_{6i-3,6i-2} \mapsto L''_{6i}$ pour $i = 2, 3, \ldots, n$.

3. La dernière (n-ième) position de la feuille π'' détermine le contact de solution $B_{1,2} \mapsto L''_5$.

Cette règle à calcul peut être utilisée spécialement pour la solution des formes du type suivant:

$$\sum_{i=1}^{n} (\varphi_{6i-5} + \varphi_{6i-4} + \varphi_{6i-3} + \varphi_{6i-2} + \varphi_{6i-1} + \varphi_{6i}) = 0\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\varphi_{6i-5}\varphi_{6i-4} + \varphi_{6i-3}\varphi_{6i-2} + \varphi_{6i-1} + \varphi_{6i}) = 0$$

etc., où le nombre de variables est arbitraire.

Adresa autora: Jaroslav Záhora, Gorkého 42, Brno.