Aplikace matematiky

L. V. Vojtíšek

О вычислении коэффициентов для формул механических кубатур

Aplikace matematiky, Vol. 10 (1965), No. 3, 312–316

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102970

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1965

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

О ВЫЧИСЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ ФОРМУЛ МЕХАНИЧЕСКИХ КУБАТУР

Л. В. ВОЙТИШЕК (L. V. VOJTÍŠEK)

(к теме а)

В одной из работ С. Л. Соболева, относящихся к теории кубатурных формул, изложен прием построения коэффициентов кубатурных формул с помощью преобразования Фурье. Настоящее сообщение посвящено изложению результатов по непосредственному вычислению коэффициентов для формул механических кубатур. Всюду в дальнейшем будем пользоваться обозначениями и терминологией С. Л. Соболева (см. [2]).

Вычисление коэффициентов для пограничной полосы и угла на плоскости для узлов интегрирования, совпадающих с узлами квадратной решетки с шагом 1.

Для угла функционал ошибки можно выразить формулой

$$l(x) = \Psi_1(x_1)\,\Psi_1(x_2) - \Phi_1(x_1)\,\Phi_1(x_2) - \Phi_1(x_1)\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\,\delta(x_2 - k) -$$
$$- \Phi_1(x_2)\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\,\delta(x_1 - k) - \sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}\alpha_{jl}\,\delta(x_1 - l)\,\delta(x_2 - j)\,,$$

где

$$\Psi_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geqq 0, \end{cases} \quad \Phi_1(x) = \tfrac{1}{2}\delta(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\delta(x - k)\,.$$

После некоторых выкладок преобразование Фурье функционала $l(x)$ вблизи начала координат приведется к виду

$$\tilde{l}(\varrho) = \tfrac{1}{2}\delta(\varrho_1)\,\varphi(\varrho_2) + \tfrac{1}{2}\delta(\varrho_2)\,\varphi(\varrho_1) - \frac{i}{\varrho_1}\,\varphi(\varrho_2) - \frac{i}{\varrho_2}\,\varphi(\varrho_1) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{m}\alpha_k e^{i\varrho_1 k}\sum_{l=0}^{m}\alpha_l e^{i\varrho_2 l} - \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}\alpha_{kl}e^{i\varrho_1 k}\,e^{i\varrho_2 l} - \varphi(\varrho_1)\,\varphi(\varrho_2)\,,$$

где через $\varphi(\varrho)$ обозначено выражение

$$\frac{i}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varrho}{2} - \frac{i}{\varrho} - \sum_{k=0}^{m}\alpha_k e^{i\varrho k}\,.$$

Как известно из [2], формула должна быть взята так, чтобы $\tilde{l}(\varrho)$ была функцией порядка m, т.е. имела нуль кратности m в начале координат. Достаточно потребовать, чтобы функциями порядка m были

$$\varphi(\varrho) \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{m} \alpha_k e^{i\varrho_1 k} \sum_{l=0}^{m} \alpha_l e^{i\varrho_2 l} - \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{m} \alpha_{kl} e^{i\varrho_1 k} e^{i\varrho_2 l}.$$

Исходя из первого условия, легко составить систему линейных уравнений для вычисления α_k. Второе условие равносильно равенству $\alpha_{kl} = \alpha_k \alpha_l$. Точки, лежащие в пограничном слое $k^{(1)}$, имеют коэффициенты

$$c_j = 1 + \alpha_j\,, \quad j = 1, \ldots, m \quad \text{и} \quad c_0 = \tfrac{1}{2} + \alpha_0\,,$$

точки слоя $k^{(2)}$ коэффициенты

$$c_{ij} = e_i e_j + e_i \alpha_j + e_j \alpha_i + \alpha_i \alpha_j = (e_i + \alpha_i)(e_j + \alpha_j) = c_i c_j\,,$$

где

$$e_i = 1 \quad \text{при} \quad i = 1, \ldots, m \quad \text{и} \quad e_0 = \tfrac{1}{2}\,.$$

Отсюда получается простой алгоритм для вычисления двойного интеграла по прямоугольнику.

Вычисление коэффициентов в пограничном слое в том случае, когда граница области не совпадает с образующими решетки.

Необходимость в таких коэффициентах может возникнуть при интегрировании по многоугольнику.

Построим коэффициенты для пограничного слоя $k^{(1)}$ (полоса) с границей, сдвинутой относительно решетки интегрирования на расстояние γ и параллельной образующим решетки. Введем обозначения

$$F_1(x, \gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(x - k - \gamma)\,,$$

$$F_0(x, \gamma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k - \gamma)\,.$$

Преобразование Фурье для этих функций представляется в виде

$$\tilde{F}_0(\varrho, \gamma) = \sqrt{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\gamma.2\pi}\, \delta(\varrho - 2k\pi)\,,$$

$$\tilde{F}_1(\varrho, \gamma) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\gamma.2\pi}\, \delta(\varrho - 2k\pi) - \frac{e^{i\varrho\gamma}}{\sqrt{2\pi}(e^{i\varrho} - 1)}\,.$$

Заметим, что функция $(te^{\gamma t})/(e^t - 1)$ является производящей функцией для полиномов Бернулли. Отсюда $e^{i\gamma\varrho}/[\sqrt{2\pi}(e^{i\varrho} - 1)]$ можно разложить в ряд

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{i\varrho} + \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+1}(\gamma) \frac{(i\varrho)^n}{(n+1)!} \right),$$

где $B_n(\gamma)$ — полиномы Бернулли. Функционал ошибки для сдвинутой полосы

$$l(x) = \Psi_0(x_1)\,\Psi_1(x_2) - \Phi_0(x_1)\,F_1(x_2) - \Phi_0(x_1)\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\,\delta(x - k - \gamma)\,.$$

Вычислив преобразование Фурье для $l(x)$ и потребовав, чтобы это преобразование было функцией порядка m, получим систему уравнений для вычисления α_k

$$\sum_{k=0}^{m}\alpha_k(k + \gamma)^n = \frac{B_{n+1}(\gamma)}{n + 1}\,, \quad n = 0, \ldots, m\,.$$

Пусть теперь граница наклонена к решетке на рациональный угол φ ($\operatorname{tg}\varphi = m/n$). Будем предполагать $m < n$. Проведем через точки решетки m прямых, параллельных границе, и будем искать коэффициенты получившегося при этом пограничного слоя. Если провести прямые $y = (m/(n-1))\,x + (k/m)$, $k = 0, 1, \ldots$, то они образуют вместе с прямыми пограничного слоя решетку из параллелограммов. Распрямив эту решетку преобразованием координат

$$x = nx' + \frac{n - 1}{m}\,y'\,,$$

$$y = mx' + 1\,,$$

получим в координатах x', y' прямоугольную решетку, для которой коэффициенты пограничного слоя уже известны. Так как определитель преобразования равен 1, коэффициенты для пограничного слоя $k^{(1)}$ области с наклоненной к решетке границей, совпадают с коэффициентами пограничного слоя $k^{(1)}$ для квадратной решетки.

Перейдем к вычислению коэффициентов для пограничного слоя $k^{(2)}$ (угол), когда стороны угла наклонены к решетке интегрирования на рациональный угол.

Проведем через узлы интегрирования прямые, параллельные сторонам угла. Параллелограм, образованный сторонами угла и прямыми, проходящими через лежащие на сторонах угла точки, ближайшие к началу координат, назовем минимальным. Внутри минимального параллелограмма может оказаться некоторое количество n точек решетки интегрирования. Перемещая минимальный параллелограмм в направлениях, параллельных сторонам угла, получим некоторую решетку из параллелограммов. Очевидно, что решетка интегрирования окажется составленной из $n + 1$ таких решеток, смещенных друг относительно друга. После линейного преобразования координат, переводящего минимальный параллелограмм в единичный квадрат, задача сведется к определению коэффициентов кубатурной формулы с решеткой интегрирования, составленной из $n + 1$ квадратной решетки. Эти коэффициенты могут быть вычислены тем же приемом с использованием преобразования Фурье. Формулы для вычисления коэффициентов в общем виде приводить не будем ввиду их громоздкости.

В качестве примера вычислим коэффициенты для угла при наилучшей решетке интегрирования, которой является решетка, составленная из правильных треугольников. После преобразования $x_2 = \sqrt{3}\, x_2'$ треугольная решетка перейдет в решетку, составленную из двух квадратных решеток, сдвинутых друг относительно друга на $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Для такой решетки функционал ошибки для $m = 4$ можно написать:

$$\begin{aligned} l(x) = {} & \Psi_1(x_1)\, \Psi_1(x_2) - \tfrac{1}{2}\Phi_1(x_1)\, \Phi_1(x_2) - \tfrac{1}{2}F_1(x_1, \tfrac{1}{2})\, F_1(x_2, \tfrac{1}{2}) - \\ & - \Phi_1(x_1) \sum_{k=0}^{2} \alpha_{2k}\delta(x_2 - k) - \Phi_1(x_2) \sum_{k=0}^{2} \alpha_{2k}\, \delta(x_1 - k) - \\ & - F_1(x_1, \tfrac{1}{2}) \sum_{k=0}^{1} \alpha_{2k+1}\, \delta(x_2 - k - \tfrac{1}{2}) - \\ & - F_1(x_2, \tfrac{1}{2}) \sum_{k=0}^{1} \alpha_{2k+1}\, \delta(x_1 - k - \tfrac{1}{2}) - \\ & - \sum_{k=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} \alpha_{2k,2j}\, \delta(x_1 - k)\, \delta(x_2 - j) - \\ & - \sum_{k=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} \alpha_{2k+1,2j+1}\, \delta(x_1 - k - \tfrac{1}{2})\, \delta(x_2 - j - \tfrac{1}{2}) . \end{aligned}$$

Коэффициенты α были вычислены на электронной машине М-20. Коэффициенты для интегрирования по треугольной решетке будут отличаться от α на множитель $\sqrt{3}$.

Аналогичным способом можно вычислить коэффициенты для формул интегрирования по n-мерному кубу для оптимальных решеток. Для $n = 3, 4, 5$ были вычислены оптимальные решетки. Как известно, эти решетки взаимны с решетками наиплотнейшей упаковки. Оказалось, что такими решетками служат центрированные кубы. Для этих n решетка интегрирования может быть составлена из двух кубических решеток, смещенных друг относительно друга на половину шага по всем координатам.

Автором написана программа на электронно-вычислительную машину для автоматического составления и решения уравнений для отыскания коэффициентов кубатурных формул по оптимальной решетке при $n = 3, 4$. Для $n = 3$ вычисленные коэффициенты приведены в работе С. Л. Соболева [2].

Литература

[1] *С. Л. Соболев*, ДАН, 137, № 3, 527 (1961).
[2] *С. Л. Соболев*, ДАН, 150, № 6, 1238 (1963).
[3] *Н. К. Игнатьев*, Сборник трудов Государственного научно-исследовательского института Министерства связи СССР, выпуск 8 (12), (1958).

Л. В. Войтишек, Институт математики Сибирского отделения АН СССР, Новосибирск 90, СССР.

THE FOLLOWING COMMUNICATIONS WERE ALSO PRESENTED:

W. GIVENS: Properties and Specializations of the Lyapunov Mapping of Symmetric Matrices (to topic d)

I. FRIŠ, J. KAUTSKÝ: Round-off Process and Pseudooperation in Computer Machines. (Read by J. Kautský; it will be published as a preprint of Joint Institute of Nuclear Research, Dubna, U.S.S.R., 1965 – in Russian.) (to topic b)

M. NEKVINDA: Влиание переписа краевых условый на точность решения краевой задачи (к теме с)

А. Н. Тихонов: Об оптимизации методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений (к теме а)

R. ZEZULA: Über eine Methode zur Lösung von linearen Gleichungssystemen (zum Thema d)