Aplikace matematiky

Ivo Marek

Приближенное решение несимметрических задач на собственные значения. Применение к методу сеток

Aplikace matematiky, Vol. 10 (1965), No. 3, 268–271

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102961`

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕСИММЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ. ПРИМЕНЕНИЕ К МЕТОДУ СЕТОК

ИВО МАРЕК (IVO MAREK)

(к теме с)

В докладе исследуется проблема приближенного построения характеристических значений и собственных векторов уравнений

$$Mu = \lambda Cu \,, \tag{1}$$

где M, C – линейные операторы, отображающие в некоторое банахово пространство X соответствующие области определения $\mathscr{D}(M) \subset X$, $\mathscr{D}(C) \subset X$, $u \in X$. Задача на собственные значения сводится к некоторой последовательности неоднородных задач, для которых предполагается известным порядок точности схемы $\{M_h\}$ приближенного решения уравнений

$$Mu = v \,, \quad v \in X \,,$$

$$M_h u^h = v^h \,, \quad v^h \in X_h \,,$$

где X – некоторое подходящее пространство Банаха, M_h соответствует в X_h операторы M и C_h оператору C. Пусть P_h отображает X в X_h так, что $S_h P_h u \to u$ для $u \in X$ и $h \to 0$, где $S_h : X_h \leftrightarrow \widetilde{X}_h$, $\widetilde{X}_h \subset X$. Обычно X_h является конечномерным пространством.

Введем итерационные процессы типа Келлога [2]

$$Mu^{(n+1)} + Cu_{(n)} \,, \quad u_{(n+1)} = \lambda_{(n)} u^{(n+1)} \,, \tag{2}$$

$$M_h u_h^{(n+1)} = C_h u_{(n)}^h \,, \quad u_{(n+1)}^h = \lambda_{(n)}^h u_h^{(n+1)} \,,$$

$$\lambda_{(n)} = \frac{y'(u_{(n)})}{y'(u^{(n+1)})} \,, \tag{3}$$

$$\lambda_{(n)}^h = \frac{y_h'(u_{(n)}^h)}{y_h'(u_h^{(n+1)})} \,,$$

где y' (y'_h) — линейные непрерывные функционалы в X (X_h), для которых $y'(u_0) \neq 0$, $y'_h(u^h_i) \neq 0$, где $u_0(u^h_0)$ — собственный вектор оператора $T = M^{-1}C$ $(T_h = M_h^{-1}C_h)$, соответствующий характеристическому значению μ_0 (μ^h_0), для которого

(4) $$|\lambda| < |\mu_0|\,, \quad \mu_0 = \lambda_0^{-1}\,, \quad \left(|\lambda| < |\mu^h_0|,\ \mu^h_0 = (\lambda^h_0)^{-1}\right),$$

для $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq \mu_0$ ($\sigma(T)$ обозначает спектр оператора T), ($\lambda \in \sigma(T_h)$, $\lambda \neq \mu^h_0$).

С помощью итераций (2), (3) исходная задача сводится к последовательности неоднородных задач типа $Mu = v$ $(M_h u^h = v^h)$.

Теорема 1. *Пусть*

(а) *оператор* $T = M^{-1}C$ $(T_h = M_h^{-1}C_h)$ *имеет простое доминантное собственное значение* μ_0 (μ^h_0) (*т.е. имеет место* (4)).

(б) *Схема* $\{M_h, P_h\}$ *приближенного решения уравнения* $Mu = v$, $v \in X$, *имеет порядок точности* p (*т.е. для решений* u, u^h, *где* $Mu = v$ $M_h u^h = v^h$, $v^h = P_h v$, *имеет место неравенство*

$$\|P_h u - u^h\| = O(h^p)\,.$$

(в) *Для произвольного вектора* $v \in M^{-1}z$, $z \in X$, *справедливы соотношения*

$$C_h v = P_h C v + w^h\,, \quad \|w^h\| = O(h^p)\,.$$

(г) *Система операторов* $\{T_h\}$, $T_h = M_k^{-1}C_h$, *и функционалов* $\{y'_h\}$ *равномерно ограничены*

$$\|M_h^{-1}C_h\| \leqq c\,, \quad \|y'_h\| \leqq c\,.$$

(д) *Существует* $\alpha > 0$ *независящее от* h *такое, что неравенства*

$$|u'_h(P_h u_0)| \geqq \alpha$$

сираведливы для собственного вактора $u_0 = \mu_0^{-1}Tu_0$ *и для собственных функционалов* $\{u'_h\}$

$$u'_h(x_h) = \mu_{0h}^{-1} u'_h(T_h x_h)\,, \ x_h \in X_h\,.$$

Тогда для определенных собственных векторов u_0, u^h_0 *операторов* T, T_h *соответствующих* λ_0, λ^h_0 *имеют место неравенства*

$$|\lambda_0 - \lambda^h_0| \leqq c_1 h^p\,, \quad \|P_h u_0 - u^h_0\| \leqq c_2 h^p\,,$$

где c_1, c_2 — *постоянные, не зависящие от* h.

Решение приближенной проблемы $M_h u^h = \lambda^h C_h u^h$ мы можем строить разными методами, не применяя итерационных процессов (2), (3). Тем не менее метод итераций является часто весьма удобным, как показывают многочисленные примеры, например, расчеты ядерных реакторов, где такой метод носит название метода итераций источника [1].

В качестве примера покажем применение приведенного метода для системы уравнений

$$M_j u_j \equiv -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k_j(x)\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right] + q_j(x)\,u_j(x) = \lambda \sum_{k=1}^{m} c_{jk}(x)\,u_k(x)\,, \quad x \in (0,1)\,,$$

с краевыми условиями

$$l_{j1}u_j \equiv k_j(x)\left.\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} - \sigma_{j1}u_j(0) = 0\,,$$

$$l_{j2}u_j \equiv k_j(x)\left.\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1} + \sigma_{j2}u_j(1) = 0\,,$$

в предположении, что

$$0 < c_3 \leqq k_j(x) \leqq c_4\,,$$

$$0 \leqq q_j(x) \leqq c_5\,, \quad 0 \leqq c_{jk}(x) \leqq c_6\,,$$

$$0 \leqq \sigma_{j1} \leqq c_7\,, \quad 0 \leqq \sigma_{j2} \leqq c_8\,, \quad \sigma_{j1} + \sigma_{j2} > 0\,, \quad j = 1, \dots, m\,.$$

Коэффициенты могут быть разрывными, матрица $C = (c_{jk})$, в общем, несимметрической. Чтобы обеспечить сходимость и высокий порядок точности в классе разрывных коэффициентов, применим для неоднородных уравнений $Mu = v$, где

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_m \end{pmatrix},$$

однородные разностные схемы $\{M_h, l_{j1}^h, l_{j2}^h\}$ ([4] — случай равномерных сеток, [5] — случай неравномерных сеток). Для применимости теоремы 1 является достаточным лишь существование доминантных собственных значений операторов $T = M^{-1}C$, $T_h = M_h^{-1}C_h$, ввиду инвариантности этих операторов относитеьно конуса неотрицательных функций.

Для определенности мы рассмотрим случай равномерной сетки.

Теорема 2. *Пусть операторы T, T_h обладают доминантными собственными значениями μ_0, μ_0^h. Если разностная схема $\{M_h, l_{j1}^h, l_{j2}^h\}$ имеет порядок точности p, то справедливы неравенства*

$$|\lambda_0 - \lambda_0^h| = O(h^p)\,, \quad \|P_h u_0 - u_0^h\| = O(h^p)\,, \quad h = \frac{1}{N}\,.$$

Теорема 1 применима также для решения подобных проблем для уравнений с частными производными если только известен порядок точности соответствующей системы неоднородных уравнений. Переход от одномерных задач к задачам многомерным можно осуществить с помощью методов А. А. Самарского [3].

Литература

[1] *Г. И. Марчук:* Численные методы расчета ядерных реакторов. Изд. гл. упр. по использ. атом. энергии, Москва 1958.

[2] *I. Marek:* Iterations of linear bounded operators and Kellogg's iterations in non self-adjoint eigenvalue problems. Czech. Math. Journ. 12 (1962), 536—554.

[3] *А. А. Самарский:* О разностных схемах для многомерных дифференциальных уравнений математической физики. Apl. mat. 10 (1965), 146—164.

[4] *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский:* Об однородных разностных схемах. ЖВМ и МФ 1 (1961), 5—63.

[5] *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский:* Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках. ЖВМ и МФ 1 (1961), 425—440.

Ivo Marek, Matematický ústav university Karlovy, Sokolovská 83, Praha 8, ČSSR.