

Aplikace matematiky

Vratislav Kafka

Napjatost a deformace homogenního poloprostoru transversálně isotropního při rovnoměrném zatížení povrchu v obdélníkové ploše

Aplikace matematiky, Vol. 7 (1962), No. 1, 37–50

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102785>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1962

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

NAPJATOST A DEFORMACE HOMOGENNÍHO POLOPROSTORU TRANSVERSÁLNĚ ISOTROPNÍHO PŘI ROVNOMĚRNÉM ZATÍŽENÍ POVRCHU V OBDĚLNÍKOVÉ PLOŠE

VRATISLAV KAFKA

(Došlo dne 26. listopadu 1960.)

V práci jsou odvozeny vzorce pro výpočet napětí a deformace v polo-
prostoru, v němž modul pružnosti ve svislém směru se liší od modulu pružnosti
ve směru vodorovném. Je uvažováno rovnoměrné zatížení povrchu v obděl-
níkové ploše, které lze považovat z praktického hlediska za nejdůležitější typ
zatížení. Přes dosti složité a pracné odvození vycházejí výsledné formule zcela
jednoduché.

1. ÚVOD

V současné době se rychle vyvíjí teorie pružnosti anisotropních prostředí s různými
typy anisotropie. Bylo vyřešeno mnoho rovinných úloh v této oblasti, v naší literatuře
jsou to např. práce [1], [2], [3], z cizí literatury je to především souborné dílo
S. G. LECHNICKÉHO [4]. V uvedených pracích, jakož i v přehledu prací z tohoto oboru
v SSSR od M. M. FRIDMANA [5] je uvedeno mnoho dalších odkazů.

Úlohy prostorové byly řešeny hlavně pro zvláštní typ anisotropie, který bývá ozna-
čován jako transversální isotropie neb orthotropie s rovinou isotropie nebo hexa-
gonální anisotropie. Prostorové prostředí tohoto typu je charakterisováno pěti nezá-
vislými konstantami a jeho matematický model je popsán v další kapitole. Důvodem
proč je věnována pozornost hlavně tomuto typu, je především ta okolnost, že při
osově symetrických okrajových podmínkách (když je osa symetrie kolmá na rovinu
isotropie a těleso je též osově symetrické) zůstává napjatost i deformace osově sy-
metrická, což velmi usnadňuje matematickou analýsu. Tento typ však též dobře
vystihuje mnoho skutečných materiálů. Některé úlohy pro poloprostor uvedeného
typu (rovinu isotropie vodorovná) jsou řešeny v knize S. G. LECHNICKÉHO [6]. Je to
problém normální soustředěné síly na povrchu poloprostoru a problém svislé šachty
kruhového průřezu při zatížení vlastní vahou masivu. V práci [7] H. A. ELLIOT podává
obecné řešení osově symetrických úloh a zvláště uvádí řešení pro sílu a moment
v nekonečném prostoru. Práce [8] téhož autora obsahuje řešení pro poloprostor
zatížený tuhým konickým razníkem, razníkem ve tvaru koule a ve tvaru kruhového

válce. Dále je zde řešena úloha Griffithovy teorie porušení – napětí okolo malé kruhové trhliny (vše osově symetrické). R. T. SHIELD v práci [9] uvádí řešení pro eliptickou trhlínu a eliptický razník a pro soustředěnou sílu uvnitř poloprostoru, normálně k povrchu, v určité vzdálenosti pod povrchem.

V naší práci je řešena úloha rovnoměrného obdélníkového zatížení na povrchu. Je to úloha s praktického hlediska důležitá. Teoreticky je jednoduchá, neboť spočívá ve dvojnásobné integraci výrazů, které platí pro soustředěné břemeno. Je však pozoruhodné, že přes složité a pracné matematické postupy, které uvádějí v pochybnost o významu obecného řešení, jsou výsledné formule jednoduché, v některých případech i jednodušší, než stejné výrazy pro prostředí isotropní (např. vzorec pro normální napětí ve svislém směru). Limitním přechodem dostáváme vzorce pro prostředí isotropní.

Praktický význam odvozeného řešení je jednak v přímé aplikaci na materiály makroskopicky homogenní s různým modulem pružnosti ve směru vodorovném a svislém a jednak v aplikaci na výpočet napětí v podloží vrstevnatém při vodorovných vrstvách. Jednoduchá metoda takového výpočtu je uvedena v pracích [10] a [11], přesnější metoda v práci [12].

2. OBECNÉ ŘEŠENÍ

Nechť v poloprostoru, na jehož povrchu x, y je orientován souřadný systém podle obr. 1, platí následující vztahy mezi složkami tensoru napětí a deformace

$$(1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r &= a_{11}\sigma_r + a_{12}\sigma_\varphi + a_{13}\sigma_z, \\ \varepsilon_\varphi &= a_{12}\sigma_r + a_{11}\sigma_\varphi + a_{13}\sigma_z, \\ \varepsilon_z &= a_{13}(\sigma_r + \sigma_\varphi) + a_{33}\sigma_z, \\ \gamma_{\varphi z} &= a_{44}\tau_{\varphi z}, \\ \gamma_{rz} &= a_{44}\tau_{rz}, \\ \gamma_{r\varphi} &= 2(a_{11} - a_{12})\tau_{r\varphi}, \end{aligned}$$

kde σ značí normální napětí, τ smykové napětí, ε poměrné prodloužení, γ poměrné posunutí. Index r značí vodorovný směr nejkratší spojnice vyšetřovaného bodu s osou z , index φ vodorovný směr kolmý na směr r , index z směr svislý. Kladné směry jsou vyznačeny na obr. 1.

Zavedeme dále technické konstanty:

- E_1 – modul pružnosti ve vodorovném směru,
- E_2 – modul pružnosti ve svislém směru,
- ν_1 – Poissonovo číslo pro dva vodorovné směry k sobě kolmé,
- ν_2 – Poissonovo číslo udávající vliv normálního napětí ve svislém směru na poměrné prodloužení ve směru vodorovném,
- G_1 – smykový modul pro dvojici kolmých vodorovných směrů,
- G_2 – smykový modul pro dvojici směru svislé a vodorovného.

Potom platí vztahy

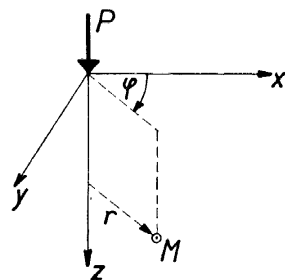
$$(2) \quad \begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{E_1}, & a_{13} &= -\frac{\nu_2}{E_2}, \\ a_{12} &= -\frac{\nu_1}{E_1}, & a_{44} &= \frac{1}{G_2}, \\ a_{33} &= \frac{1}{E_2}, & 2(a_{11} - a_{12}) &= \frac{2(1 + \nu_1)}{E_1} = \frac{1}{G_1}. \end{aligned}$$

Modul G_1 není tedy nezávislý a technických konstant je ovšem zase pět.

Je-li rovina x, y povrchem poloprostoru, který mimo uvedený zobecněný Hookův zákon splňuje předpoklady pružného kontinua, platí pro rozdělení napětí od soustředěné síly podle obr. 1 následující vztahy, odvozené S. G.

LECHNICKÝM v práci [6]

$$(3) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{P}{2\pi} [z(k_1 f_1 - k_2 f_2 + l_1 \varphi_1 - l_2 \varphi_2) + \mu \psi], \\ \sigma_\varphi &= \frac{P}{2\pi} [z(-m_1 f_1 + m_2 f_2 - l_1 \varphi_1 + l_2 \varphi_2) - \mu \psi], \\ \sigma_z &= \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{s_1 s_2}{s_2 - s_1} z(f_2 - f_1), \\ \tau_{rz} &= \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{s_1 s_2}{s_2 - s_1} (f_2 - f_1) \sqrt{(x^2 + y^2)}, \end{aligned}$$



Obr. 1.

kde značí k_i, l_i, m_i, μ, s_i konstanty závislé na materiálu, f_i, φ_i, ψ funkce souřadnic:

$$\begin{aligned} f_i &= \frac{1}{(x^2 + y^2 + s_i^2 z^2)^{3/2}}, \\ \varphi_i &= \frac{1}{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + s_i^2 z^2)^{1/2}}, \\ \psi &= \frac{1}{x^2 + y^2}, \\ k_1 &= \frac{s_1^2}{(s_2 - s_1) \sqrt{d}}, \\ k_2 &= \frac{s_2^2}{(s_2 - s_1) \sqrt{d}}, \\ l_1 &= \frac{\lambda s_1^2 p_2}{s_2 - s_1}, \\ l_2 &= \frac{\lambda s_2^2 p_1}{s_2 - s_1}, \end{aligned}$$

$$m_1 = \frac{s_1^2 g_2 \sqrt{d}}{(s_2 - s_1)(ac - d)},$$

$$m_2 = \frac{s_2^2 g_1 \sqrt{d}}{(s_2 - s_1)(ac - d)}.$$

Konstanty $a, b, c, d, s_1, s_2, p_1, p_2, g_1, g_2, \lambda, \mu$ jsou definovány podle práce [6] při stejném označení:

$$a = \frac{a_{13}(a_{11} - a_{12})}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2} = \frac{-v_2(1 + v_1)}{E_2 - v_2^2 E_1} E_2,$$

$$b = \frac{a_{13}(a_{13} + a_{44}) - a_{12}a_{33}}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2} = \frac{(v_1 E_2 + v_2^2 E_1) G_2 - v_2 E_1 E_2}{(E_2 - v_2^2 E_1) G_2},$$

$$c = \frac{a_{13}(a_{11} - a_{12}) + a_{11}a_{44}}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2} = \frac{E_2 - v_2(1 + v_1) G_2}{E_2 - v_2^2 E_1} \cdot \frac{E_2}{G_2},$$

$$d = \frac{a_{11}^2 - a_{12}^2}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2} = \frac{1 - v_1^2}{E_2 - v_2^2 E_1} \cdot \frac{E_2^2}{E_1},$$

$$s_1 = \sqrt{\frac{a + c + \sqrt{[(a + c)^2 - 4d]}}{2d}},$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{a + c - \sqrt{[(a + c)^2 - 4d]}}{2d}},$$

$$p_1 = 1 - as_1^2,$$

$$p_2 = 1 - as_2^2,$$

$$g_1 = p_1(b - as_2^2),$$

$$g_2 = p_2(b - as_1^2),$$

$$\lambda = \frac{(b - 1)\sqrt{d}}{ac - d} = \frac{1 - v_1}{\sqrt{d}},$$

$$\mu = \frac{(b - 1)(a + \sqrt{d})}{ac - d} = \frac{1 - v_1}{d} (a + \sqrt{d}).$$

Z definice s_1, s_2 je patrné, že

$$(4) \quad d = \frac{1}{s_1^2 s_2^2}, \quad a + c = \frac{1}{s_1^2} + \frac{1}{s_2^2}.$$

Pro náš účel potřebujeme vyjádřit složky tensoru napětí pro ortogonální souřadnicovou soustavu.

Vzorce (3) platí tehdy, je-li působíště soustředěné síly v počátku souřadnicové soustavy podle obr. 1.

Budeme nyní uvažovat souřadnicovou soustavu ξ, η, ζ podle obr. 2, v jejímž počátku působí síla $P = q \cdot d\xi d\eta$.

Napjatost v bodě M , v němž $\xi = x, \eta = y, \zeta = z$, bude dána vzorcí (3). Na povrch poloprostoru nad vyšetřovaný bod M položíme počátek nové souřadnicové soustavy x, y, z podle obr. 2. Protože $\sigma_\xi = \sigma_x, \sigma_\eta = \sigma_y$ atd., můžeme psát:

$$\sigma_x = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\varphi) + \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\varphi) \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

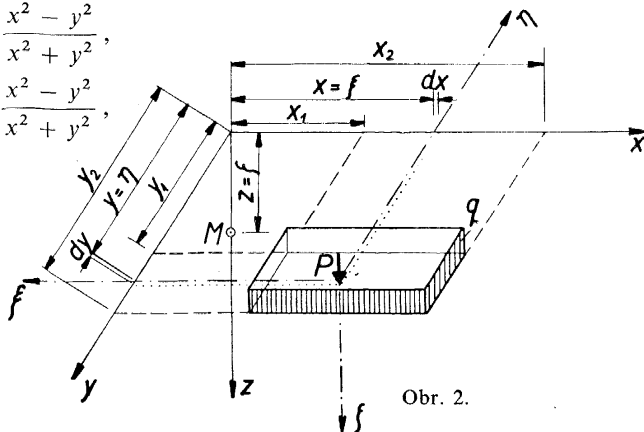
$$\sigma_y = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\varphi) - \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\varphi) \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

$$\tau_{xy} = (\sigma_r - \sigma_\varphi) \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

$$\tau_{xz} = \tau_{rz} \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}},$$

$$\tau_{yz} = \tau_{rz} \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)}},$$

$$\sigma_z = \sigma_z.$$



Dále dosadíme za $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$ a τ_{rz} podle vzorců (3), položíme $P = q \, d\xi \, d\eta = q \, dx \, dy$ a provedeme dvojnásobnou integraci v mezích x_1, x_2, y_1, y_2 . Tak dostaneme výsledné formule pro napětí od rovnoměrného zatížení v obdélníku podle obr. 2.

Integrály se dají všechny vyjádřit v uzavřených a jednoduchých tvarech:

- $$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f_i \, dx \, dy = \frac{1}{s_i z} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \operatorname{arctg} \frac{x_j y_k}{s_i z \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}},$$
- $$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} f_i \, dx \, dy = \frac{1}{s_i^3 z^3} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \left[x_j^2 \operatorname{arctg} \frac{s_i z y_k}{x_j \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}} - y_k^2 \operatorname{arctg} \frac{s_i z x_j}{y_k \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}} \right],$$
- $$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \varphi_i \, dx \, dy = \frac{1}{2 s_i^3 z^3} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \left[y_k^2 \operatorname{arctg} \frac{s_i z x_j}{y_k \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}} - x_j^2 \operatorname{arctg} \frac{s_i z y_k}{x_j \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}} - s_i^2 z^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{s_i z y_k}{x_j \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}} + \operatorname{arctg} \frac{y_k \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}}{s_i z x_j} \right) \right],$$
- $$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \psi \, dx \, dy = - \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \operatorname{arctg} \frac{y_k}{x_j},$$

$$\begin{aligned}
5. \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{xy}{x^2 + y^2} f_i \, dx \, dy &= \frac{1}{2s_i^2 z^2} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \left[\sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{x_j^2 + y_k^2}{2s_i z} \ln \frac{\sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)} + s_i z}{\sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)} - s_i z} \right], \\
6. \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{xy}{x^2 + y^2} \varphi_i \, dx \, dy &= \frac{1}{4s_i^2 z^2} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \left[-\sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{x_j^2 + y_k^2 + 2s_i^2 z^2}{2s_i z} \ln \frac{\sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)} + s_i z}{\sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)} - s_i z} \right], \\
7. \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{xy}{x^2 + y^2} \psi \, dx \, dy &= -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \ln(x_j^2 + y_k^2), \\
8. \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} x f_i \, dx \, dy &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \ln \frac{\sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)} + y_k}{\sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)} - y_k} = \\
&= -\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \ln [y_k + \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}], \\
9. \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} y f_i \, dx \, dy &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \ln \frac{\sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)} + x_j}{\sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)} - x_j} = \\
&= -\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \ln [x_j + \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}].
\end{aligned}$$

Dosazením hodnot integrálů dostáváme výsledné formule pro napětí v transversálně isotropním poloprostoru při rovnoměrném obdélníkovém zatížení na povrchu.

Získané výrazy jsou dále upraveny za použití rovností (4) a následujících vztahů, jejichž platnost lze snadno odvodit z definic:

$$\begin{aligned}
a) \quad &k_i + m_i = l_i, \\
b) \quad &\frac{k_2}{s_2} - \frac{k_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2} - \frac{m_1}{s_1} = \mu, \\
c) \quad &\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \left(\arctg \frac{x_j y_k}{s_i z \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}} + \arctg \frac{s_i z y_k}{x_j \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}} \right) = \\
&= \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \arctg \frac{y_k \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}}{s_i z x_j}, \\
d) \quad &\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \arctg \frac{s_i z y_k}{x_j \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}} = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \left(\arctg \frac{y_k}{x_j} - \right. \\
&\quad \left. - \arctg \frac{x_j y_k}{x_j^2 + s_i^2 z^2 + s_i z \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}} \right), \\
e) \quad &\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \arctg \frac{y_k \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}}{s_i z x_j} = \\
&= \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \left(\arctg \frac{y_k}{x_j} + \arctg \frac{x_j y_k}{y_k^2 + s_i^2 z^2 + s_i z \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}} \right).
\end{aligned}$$

Dostáváme tak následující výsledky:

$$(5a) \quad \sigma_x = -\frac{q}{4\pi} \left\{ \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+j+k} \frac{1}{s_i} \left[(k_i - m_i) \operatorname{arctg} \frac{x_j y_k}{s_i z \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}} - \right. \right. \\ \left. \left. - (k_i + m_i) \left(\operatorname{arctg} \frac{s_i z y_k}{x_j \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}} + \operatorname{arctg} \frac{y_k \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}}{s_i z x_j} \right) \right] \right\} + \\ + 2\mu \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \operatorname{arctg} \frac{y_k}{x_j} \Bigg\} =$$

$$(5) \quad = \frac{q}{2\pi} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+j+k} \frac{1}{s_i} \left(m_i \operatorname{arctg} \frac{x_j y_k}{y_k^2 + s_i^2 z^2 + s_i z \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}} - \right. \\ \left. - k_i \operatorname{arctg} \frac{x_j y_k}{x_j^2 + s_i^2 z^2 + s_i z \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}} \right),$$

$$(6a) \quad \sigma_y = -\frac{q}{4\pi} \left\{ \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+j+k} \frac{1}{s_i} \left[(k_i - m_i) \operatorname{arctg} \frac{x_j y_k}{s_i z \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}} + \right. \right. \\ \left. \left. + (k_i + m_i) \left(\operatorname{arctg} \frac{s_i z y_k}{x_j \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \operatorname{arctg} \frac{y_k \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}}{s_i z x_j} \right) \right] - 2\mu \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \operatorname{arctg} \frac{y_k}{x_j} \right\} =$$

$$(6) \quad = + \frac{q}{2\pi} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+j+k} \frac{1}{s_i} \times \\ \times \left(m_i \operatorname{arctg} \frac{x_j y_k}{x_j^2 + s_i^2 z^2 + s_i z \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}} - \right. \\ \left. - k_i \operatorname{arctg} \frac{x_j y_k}{y_k^2 + s_i^2 z^2 + s_i z \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}} \right),$$

$$(7) \quad \sigma_z = \frac{q}{2\pi} \cdot \frac{s_1 s_2}{s_2 - s_1} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+j+k} \frac{1}{s_i} \operatorname{arctg} \frac{x_j y_k}{s_i z \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}},$$

$$(8) \quad \tau_{yz} = -\frac{q}{2\pi} \cdot \frac{s_1 s_2}{s_2 - s_1} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+j+k} \ln [x_j + \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}],$$

$$(9) \quad \tau_{zx} = -\frac{q}{2\pi} \cdot \frac{s_1 s_2}{s_2 - s_1} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+j+k} \ln [y_k + \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}],$$

$$(10) \quad \tau_{xy} = -\frac{q}{2\pi} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+j+k} \frac{k_i + m_i}{s_i} \ln [s_i z + \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}].$$

Mnohoznačná funkce arctg se rozumí v hlavním intervalu $(-\pi/2, +\pi/2)$.

Dále provedeme ještě výpočet deformace. Nejdůležitější a pro výpočet nejjednodušší je vertikální posunutí.

Ze třetí rovnice (1) dostaneme

$$(11) \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = a_{13}(\sigma_r + \sigma_\varphi) + a_{33}\sigma_z.$$

Z toho – s přihlédnutím k fyzikálním podmínkám –

$$(12) \quad w = \int_{\infty}^z [a_{13}(\sigma_r + \sigma_\varphi) + a_{33}\sigma_z] dz,$$

kde w značí posunutí bodu ve svislém směru proti stavu před zatížením.

Součet normálních napětí pro tři kolmé směry je invariantní, tedy

$$(13) \quad \sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z.$$

Jest tedy $\sigma_r + \sigma_\varphi = \sigma_x + \sigma_y$ a pro w dostáváme z rovnic (5a), (6a), (7)

$$(14) \quad w = -\frac{q}{2\pi} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+j+k} \left(a_{13} \frac{k_i - m_i}{s_i} - \frac{a_{33}}{s_i} \frac{s_1 s_2}{s_2 - s_1} \right) \cdot \int_{\infty}^z \operatorname{arctg} \frac{x_j y_k}{s_i z \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}} dz.$$

Výpočet integrálu dostáváme

$$10. \quad \int_{\infty}^z \operatorname{arctg} \frac{x_j y_k}{s_i z \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}} dz = z \operatorname{arctg} \frac{x_j y_k}{s_i z \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}} - \frac{y_k}{2s_i} \ln \frac{\sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)} + x_j}{\sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)} - x_j} - \frac{x_j}{2s_i} \ln \frac{\sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)} + y_k}{\sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)} - y_k}.$$

Při dosazení do (14) můžeme výraz ještě zjednodušit, neboť

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \frac{y_k}{2s_i} \ln \frac{\sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)} + x_j}{\sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)} - x_j} = \\ & = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \frac{y_k}{s_i} \ln [x_j + \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}] \end{aligned}$$

a podobně

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \frac{x_j}{2s_i} \ln \frac{\sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)} + y_k}{\sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)} - y_k} = \\ & = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \frac{x_j}{s_i} \ln [y_k + \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}]. \end{aligned}$$

Konečný tvar pro svislé posunutí w je tedy následující

$$(15) \quad w = \frac{q}{2\pi} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+j+k} \frac{1}{s_i^2} \left[a_{13}(k_i - m_i) - a_{33} \frac{s_1 s_2}{s_2 - s_1} \right] \cdot \left\{ y_k \ln [x_j + \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}] + x_j \ln [y_k + \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}] - s_i z \operatorname{arctg} \frac{x_j y_k}{s_i z \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_i^2 z^2)}} \right\}.$$

3. ZVLÁŠTNÍ PŘÍPADY

1) Poloprostor nestlačitelný

Jestliže mají být odvozené výsledky aplikovány při výpočtu napjatosti v poloprostoru vrstevnatém, vypočítáme všech pět materiálových konstant z modulů isotropních vrstev a jejich geometrických poměrů (literatura [10], [11], [12]).

Jedná-li se však o aplikaci přímo na materiály makroskopicky homogenní, bude prakticky obtížné stanovit na neporušených vzorcích všech pět konstant. Bude proto třeba buď některé konstanty odhadnout, nebo přijmout jednodušší matematický model – prostředí nestlačitelné (např. celá práce J. WÜNSCHE „*Tuhý základ a pružný poloprostor*“ je vybudována na tomto předpokladu, ovšem pro prostředí isotropní).

Podmínky nestlačitelnosti budou mít v našem případě následující formu

$$(16) \quad \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z = 0.$$

Dosazením z rovnic (1) do (16) dostaneme

$$(17) \quad (\sigma_r + \sigma_\varphi)(a_{11} + a_{12} + a_{13}) + \sigma_z(2a_{13} + a_{33}) = 0.$$

Aby rovnice (17) byla splněna pro libovolné σ_r , σ_φ , σ_z musí platit

$$(18) \quad a_{11} + a_{12} + a_{13} = 0,$$

$$(19) \quad 2a_{13} + a_{33} = 0.$$

Jestliže stanovíme moduly pružnosti E_1 a E_2 pro svislý a vodorovný směr a smykový modul G_2 pro dvojici směru svislého a vodorovného, dostáváme podle rovnic (2), (18) a (19)

$$(20) \quad \begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{E_1}, & a_{13} &= -\frac{a_{33}}{2} = -\frac{1}{2E_2}, \\ a_{33} &= \frac{1}{E_2}, & a_{12} &= -a_{11} + \frac{a_{33}}{2} = -\frac{1}{E_1} + \frac{1}{2E_2}, \\ a_{44} &= \frac{1}{G_2}. \end{aligned}$$

Pro další konstanty pak dostáváme

$$(21) \quad \begin{aligned} a &= -1, \\ b &= 1 - \frac{2a_{44}}{4a_{11} - a_{33}} = 1 - \frac{2E_1E_2}{G_2(4E_2 - E_1)}, \\ c &= -1 + \frac{4a_{11}a_{44}}{4a_{11}a_{33} - a_{33}^2} = -1 + \frac{4E_2^2}{G_2(4E_2 - E_1)}, \\ d &= +1, \\ \mu &= 0, \\ \lambda &= \frac{a_{33}}{2a_{11}} = \frac{E_1}{2E_2}. \end{aligned}$$

Ostatní konstanty a celý další výpočet je stejný jako v obecném případě.

2) Napjatost a deformace na povrchu

Na povrchu poloprostoru, tj. pro $z = 0$, se vzorce podstatně zjednoduší. V některých výrazech záleží na tom, je-li vyšetřovaný bod uvnitř obdélníka zatížení nebo vně.

Označíme-li výrazy, platící uvnitř zatěžovacího obdélníka, indexem u , a výrazy platící vně indexem v , dostáváme limitními přechody tyto výsledky:

$$(22) \quad (\sigma_x)_u = q \left(\frac{m_2}{s_2} - \frac{m_1}{s_1} - \frac{\mu}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \operatorname{arctg} \frac{y_k}{x_j} \right),$$

$$(23) \quad (\sigma_x)_v = -q \frac{\mu}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \operatorname{arctg} \frac{y_k}{x_j},$$

$$(24) \quad (\sigma_y)_u = q \left(-\frac{k_2}{s_2} + \frac{k_1}{s_1} + \frac{\mu}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \operatorname{arctg} \frac{y_k}{x_j} \right),$$

$$(25) \quad (\sigma_y)_v = q \frac{\mu}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \operatorname{arctg} \frac{y_k}{x_j},$$

$$(26) \quad (\sigma_z)_u = -q,$$

$$(27) \quad (\sigma_z)_v = 0,$$

$$(28) \quad (\tau_{yz})_u = (\tau_{yz})_v = 0,$$

$$(29) \quad (\tau_{zx})_u = (\tau_{zx})_v = 0,$$

$$(30) \quad (\tau_{xy})_u = (\tau_{xy})_v = -\frac{q}{4\pi} \mu \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \ln(x_j^2 + y_k^2).$$

Pro vertikální posunutí na povrchu dostáváme

$$(31) \quad w = \frac{p}{2\pi} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+j+k} \frac{1}{s_i} \left[a_{13}(k_i - m_i) - a_{33} \frac{s_1 s_2}{s_2 - s_1} \right] \times \\ \times \{ y_k \ln [x_j + \sqrt{(x_j^2 + y_k^2)}] + x_j \ln [y_k + \sqrt{(x_j^2 + y_k^2)}] \}.$$

4. LIMITNÍ PŘECHODY A POZNÁMKY KE VZORCŮM PRO PROSTŘEDÍ ISOTROPNÍ

Pro isotropní prostředí platí

$$(32) \quad a_{11} = a_{33} = \frac{1}{E},$$

$$a_{12} = a_{13} = -\frac{\nu}{E},$$

$$a_{44} = 2(a_{11} - a_{12}) = \frac{2(1 + \nu)}{E} = \frac{1}{G}.$$

Pro další konstanty z toho dostáváme

$$(33) \quad \begin{aligned} a = b &= -\frac{v}{1-v}, & k_1 &= \frac{s_1^2}{s_2 - s_1}, \\ c &= \frac{2-v}{1-v}, & k_2 &= \frac{s_2^2}{s_2 - s_1}, \\ d &= 1, & m_1 &= v \frac{s_1^2}{s_2 - s_1} (1-v + vs_2^2)(1-s_1^2), \\ & & m_2 &= v \frac{s_2^2}{s_2 - s_1} (1-v + vs_1^2)(1-s_2^2). \end{aligned}$$

Pro s_1 a s_2 dostáváme $s_1 = s_2 = 1$, tím však vznikají ve všech vzorcích neurčité výrazy a je proto třeba vypočítat limity.

Provedeme limitní přechod pro dva nejdůležitější výrazy: napětí σ_z – vzorec (7) a vertikální posunutí – vzorec (15).

Do vzorce (7) dosadíme $s_2 = 1$ a odvodíme formuli, která vznikne, blíží-li se s_1 stejné hodnotě. Pro isotropní prostředí tak dostaneme

$$(34) \quad \begin{aligned} (\sigma_z)_i &= \lim_{s_1 \rightarrow 1} \frac{q}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \frac{1}{1-s_1} \left(s_1 \operatorname{arctg} \frac{x_j y_k}{z \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + z^2)}} - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{arctg} \frac{x_j y_k}{s_1 z \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_1^2 z^2)}} \right) = \\ &= -\frac{q}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \left[\operatorname{arctg} \frac{x_j y_k}{z \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + z^2)}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_j y_k z}{(x_j^2 + z^2) \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + z^2)}} + \frac{x_j y_k z}{(y_k^2 + z^2) \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + z^2)}} \right]. \end{aligned}$$

Tvar (34) je konečný a zdá se být pro výpočet nejhodnější. Jednoduchou úpravou se dá převést na tvar, uvedený v Technickém průvodci 3 (5. vydání), str. 519 – vzorec (573), kde jsou sumace rozepsány a zavedeny ještě další symboly.

Poněkud obtížnější je limitní přechod u vertikálního posunutí.

Vzorec (15) zapišeme následujícím způsobem

$$w = \frac{q}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \left[\left(a_{13} \frac{k_2 - m_2}{s_2^2} - \frac{a_{33}}{s_2} \cdot \frac{s_1}{s_2 - s_1} \right) \Theta_2 - \left(a_{13} \frac{k_1 - m_1}{s_1^2} - \frac{a_{33}}{s_1} \frac{s_2}{s_2 - s_1} \right) \Theta_1 \right].$$

Význam Θ_2, Θ_1 je zřejmý z porovnání.

Dosadíme-li výrazy (32) a (33) a položíme $s_2 = 1$, dostaneme

$$a_{13} \frac{k_2 - m_2}{s_2^2} - \frac{a_{33}}{s_2} \cdot \frac{s_1}{s_2 - s_1} = - \frac{v + s_1}{E(1 - s_1)},$$

$$a_{13} \frac{k_1 - m_1}{s_1^2} - \frac{a_{33}}{s_1} \cdot \frac{s_2}{s_2 - s_1} = \frac{1}{E(1 - s_1)} \left(-v + v^2 - v^2 s_1^2 - \frac{1}{s_1} \right).$$

Pro vertikální posunutí v isotropním poloprostoru pak dostáváme

$$(w)_i = \lim_{s_1 \rightarrow 1} \frac{q}{2\pi E(1 - s_1)} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \cdot \left[- (v + s_1) \Theta_0 - \left(-v + v^2 - v^2 s_1^2 - \frac{1}{s_1} \right) \Theta_1 \right],$$

kde symbolem Θ_0 se rozumí funkce, která vznikne z Θ_2 dosazením $s_2 = 1$ nebo z Θ_1 dosazením $s_1 = 1$.

Dále použitím l'Hospitalova pravidla

$$(w)_i = \lim_{s_1 \rightarrow 1} - \frac{q}{2\pi E} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \left[- \Theta_0 - \left(-2v^2 s_1 + \frac{1}{s_1} \right) \Theta_1 - \left(-v + v^2 - v^2 s_1^2 - \frac{1}{s_1} \right) \frac{\partial \Theta_1}{\partial s_1} \right].$$

Derivaci dostaneme (viz vzorec (15))

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial s_1} = \frac{\partial}{\partial s_1} \left\{ y_k \ln [x_j + \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_1^2 z^2)}] + x_j \ln [y_k + \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_1^2 z^2)}] - s_1 z \operatorname{arctg} \frac{x_j y_k}{s_1 z \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_1^2 z^2)}} \right\} =$$

$$= \frac{s_1 z^2}{y_k^2 + s_1^2 z^2} + \frac{s_1 z^2}{x_j^2 + s_1^2 z^2} - z \operatorname{arctg} \frac{x_j y_k}{s_1 z \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_1^2 z^2)}}.$$

Protože platí

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \frac{s_1 z^2}{y_k^2 + s_1^2 z^2} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \frac{s_1 z^2}{x_j^2 + s_1^2 z^2} = 0,$$

platí rovnost

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \frac{\partial \Theta_1}{\partial s_1} = - \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} z \operatorname{arctg} \frac{x_j y_k}{s_1 z \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_1^2 z^2)}}.$$

Můžeme tedy dále psát

$$(35) \quad (w)_i = - \frac{q}{2\pi E} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \left[-2(1 - v^2) \Theta_0 - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - (1 + \nu) z \operatorname{arctg} \frac{x_j y_k}{s_1 z \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + s_1^2 z^2)}} \Big] = \\
& = \frac{q(1 + \nu)}{2\pi E} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} \left\{ 2(1 - \nu) [y_k \ln (x_j + \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + z^2)}) + \right. \\
& \left. + x_j \ln (y_k + \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + z^2)})] + (2\nu - 1) z \operatorname{arctg} \frac{x_j y_k}{z \sqrt{(x_j^2 + y_k^2 + z^2)}} \right\}.
\end{aligned}$$

Poslední tvar souhlasí až na součinitele při funkci arctg se vzorcem uvedeným v technickém průvodci 3 (5. vydání – str. 520 – vzorec (574)). Ve zmíněném vzorci je chyba, což je evidentní z porovnání rozměrů jednotlivých sčítanců. Správně je tento vzorec uveden ve čtvrtém vydání technického průvodce, avšak v jiném, zbytečně složitě tvaru. (Dá se převést na náš tvar (35).)

Při této příležitosti bych se rád zmínil o vzorcích pro napjatost v isotropní polo-rovině při trojúhelníkovém zatížení okraje. Bývají udávány též ve zbytečně složitě tvaru (viz např. citovaný TP3 – 5. vyd., str. 512). Součet některých výrazů je identicky roven nule a místo výrazů v citované knize uvedených možno psát

$$\begin{aligned}
v_x &= -\frac{q_1 z}{2\pi l} \left[4 \lg \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} - 2 \sin^2 \varphi_2 - (2\alpha - \sin 2\varphi_2) \operatorname{tg} \varphi_1 \right], \\
v_z &= -\frac{q_1 z}{2\pi l} [2 \sin^2 \varphi_2 - (2\alpha + \sin 2\varphi_2) \operatorname{tg} \varphi_1], \\
\tau_{xz} &= -\frac{q_1 z}{2\pi l} [2\alpha - \sin 2\varphi_2 + 2 \operatorname{tg} \varphi_1 \cos^2 \varphi_2].
\end{aligned}$$

Seznam literatury

- [1] *Brilla J.*: Anizotropické stěny. SAV-Bratislava, 1958.
- [2] *Brilla J.*: Napätia okolo otvorov od objemových síl. Stav. čas. SAV, II, 2, 1954.
- [3] *Kafka V.*: Der Spannungszustand einer am Rande belasteten orthotropen Halbebene. Acta technica ČSAV, 1957, No 1 a 2.
- [4] *Лехницкий С. Г.*: Анизотропные пластинки. Москва 1957.
- [5] *Fridman M. M.*: Matematická teorie pružnosti anizotropního prostředí. Sovětská věda, Matem. Fyzika, III, 1, 1951.
- [6] *Лехницкий С. Г.*: Теория упругости анизотропного тела. Москва 1950.
- [7] *Elliot H. A.*: Three-dimensional Stress Distributions in Hexagonal Aelotropic Crystals. Proc. Cambr. Phil. Soc. 44 (1948), 522.
- [8] *Elliot H. A.*: Axial symmetric Stress-Distributions in Aelotropic Hexagonal Crystals. The Problem of the Plane and Related Problems. Proc. Cambr. Phil. Soc. 45 (1949), 621.
- [9] *Shield R. T.*: Notes on Problems in Hexagonal Aelotropic Materials. Proc. Cambr. Phil. Soc. 47 (1951), 401.
- [10] *Kafka V.*: Teorie pružnosti vrstevnatého prostředí. Kand. disertační práce podaná v ČSAV-ÚTAM v srpnu 1956. Neuveřejněno.
- [11] *Kafka V.*: Der Spannungszustand in einem geschichteten Medium. Acta technica ČSAV, 1957, No 3.
- [12] *Kafka V.*: Přibližné metody řešení napjatosti v mnohovrstvých tělesech. Výzkumná zpráva Ústavu teor. a aplikované mechaniky ČSAV, 1961.

Резюме

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ДЕФОРМАЦИЯ ОДНОРОДНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПОВЕРХНОСТЬЮ, ЗАГРУЖЕННОЙ РАВНОМЕРНО ПО ПРЯМОУГОЛЬНИКУ

ВРАТИСЛАВ КАФКА (Vratislav Kafka)

В нашей работе выведены формулы для расчета компонент напряжения и деформации [(5)–(10), (15)] в полупространстве, где модули упругости в вертикальном и в горизонтальном направлениях отличаются друг от друга. Выбранный тип нагрузки является с практической точки зрения самым важным – из него можно составлять весьма различные формы нагрузки. Интересно, что вопреки довольно сложным выражениям в изложении (в нашей работе все только сжато обозначено) окончательные формулы являются совсем простыми, для компоненты σ_z проще, чем в случае изотропного полупространства [сравни (7) и (34)].

Показаны предельные переходы, в результате которых получаются известные формулы для изотропной среды.

Zusammenfassung

DER SPANNUNGSZUSTAND UND DIE VERFORMUNG IM HOMOGENEN TRANSVERSAL-ISOTROPEN HALBRAUM BEI EINER GLEICHMÄSSIG VERTEILTEN RECHTECKIGEN BELASTUNG DER OBERFLÄCHE

VRATISLAV KAFKA

Es werden Formeln ((5)–(10), (15)) für die Berechnung des Spannungszustandes und der Verformung eines Halbraumes abgeleitet, dessen Elastizitätsmodul in der senkrechten und in der waagrechten Richtung verschieden ist. Der gewählte Typ der Belastung ist, vom praktischen Standpunkt gesehen, für den wichtigsten gehalten – durch die Zusammensetzung kann man die Belastungsarten der verschiedensten Formen berechnen. Es ist interessant, das trotz den ziemlich verwickelten Ausdrücken bei der Ableitung (in unserem Artikel wegen der Kürze nur angedeutet) die Endformeln ganz einfach, für die Spannungskomponente σ_z noch einfacher, als im isotropen Halbraum (vergl. (7) und (34)) resultieren.

Es werden die Grenzvorgänge gezeigt, mittels deren man die bekannten Formeln für das isotrope Medium erhält.

Adresa autora: Ing. Vratislav Kafka C. Sc., Ústav teoretické a aplikované mechaniky ČSAV,
Praha 2, Vyšehradská 49.