

Aplikace matematiky

Petre P. Teodorescu

Sur le problème du quart de plan élastique

Aplikace matematiky, Vol. 6 (1961), No. 5, 359–378

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102769>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1961

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

SUR LE PROBLÈME DU QUART DE PLAN ÉLASTIQUE

P. P. TEODORESCU

(Reçu le 13 mai 1960.)

En s'appuyant sur la théorie de la transformation de Fourier, on démontre, dans le présent travail, la réduction du premier problème de l'élasticité pour un quart de plan à une équation intégrale de la seconde espèce. La norme du noyau étant plus petite que l'unité, on peut se servir de la série de Neumann.

1. En rejetant à l'infini un ou plusieurs côtés d'un rectangle élastique plan, on obtient des figures idéalisées qui — chacune à sa manière — constituent l'approximation d'un cas réel, rencontré dans la pratique. Une de ces figures, dont l'étude est la plus difficile du point de vue mathématique, est le quart de plan élastique.

On obtient le quart de plan élastique $x \geq 0$, $y \geq 0$ en rejetant à l'infini deux côtés adjacents d'un rectangle élastique. Le quart de plan élastique, actionné par une charge périodique sur l'un de ses côtés, peut constituer par exemple — en pratique — la poutre de bout dans le cas d'une poutre-paroi continue, à hauteur infinie, ayant une infinité d'ouvertures égales et identiquement actionnées. Les résultats correspondants peuvent être encore utilisés pour l'étude de l'effet local dans la région d'appui d'une poutre-paroi à une seule ouverture.

Le quart de plan élastique peut être encore considéré comme un cas particulier du coin plan élastique (un domaine borné par deux demi-droites concurrentes à distance finie). Ce problème est étudié généralement à l'aide des coordonnées polaires.

2. Le cas du coin plan élastique, actionné sur l'un de ses côtés par une charge uniformément distribuée a été étudié par A. MIURA [24] et P. FILLUNGER [11]; le cas d'une charge normale à variation linéaire a été considéré par M. LÉVY [20] et K. WOLF [38], à l'aide des polynômes biharmoniques, pour un angle quelconque; ces résultats ne sont pas valables pour un angle droit. J. H. MICHELL [23] et P. FILLUNGER [11] se sont occupés du cas d'une force concentrée ou d'un moment concentré, actionnant au sommet 0.

W. M. SHEPHARD [29] a donné une solution, basée sur certaines méthodes approximatives, pour le quart de plan élastique actionné sur les lignes de séparation par des forces normales concentrées, à distances égales du sommet O. Ultérieurement,

le problème a été reconsidéré par K. M. ФИГУРНОВ [10], J. BALAŠ et A. HANUŠKA [5] ont aussi considéré ce problème, en utilisant des méthodes théoriques et expérimentales (photoélasticité); ils ont donné d'intéressants résultats numériques. Les méthodes expérimentales ont été utilisées encore par B. M. АБРАМОВ [1] et V. TESAŘ [34].

Pour une charge locale quelconque, on emploie généralement les méthodes opérationnelles de calcul (transformée de Mellin) dans l'étude du coin plan élastique. Nous citons ici les travaux de J. A. H. ВРАНТЦ [8], [9], Б. З. Брачковский et A. И. Лурье [7], C. J. TRANTER [35], J. MAJER [22], С. Г. Лапшин [18], [19], D. E. R. GODFREY [13], [14] et С. М. Белоносов [6]. Une étude théorique et pratique très développée fut entreprise par J. NEČAS [25], [26], [27], [28], au cours de plusieurs articles; ces résultats peuvent être utilisés aussi pour un domaine polygonal quelconque: convexe ou concave. M. HETÉNYI [15] a utilisé la solution du problème du demiplan élastique, sous la forme de développements en série, pour calculer — à l'aide de machines électroniques de calcul — le quart de plan élastique actionné par une charge normale ou tangentielle concentrée sur l'un de ses côtés. I. ВАВУŠКА, K. РЕКТОРЫС et FR. VYČIHLIO [4] ont étudié l'état de tension à l'intérieur du quart de plan élastique actionné par une charge normale sur une ligne de séparation, en utilisant, d'une manière ingénieuse, le principe de la superposition des effets; ils ont ainsi réduit le problème à la solution d'une équation intégrale de la seconde espèce. Nous avons donné aussi quelques résultats [33], en utilisant la transformée de Fourier.

Le coin élastique anisotrope a été considéré par П. П. Куфареv [16]. M. L. WILLIAMS [37], Л. М. Куршин [17] et Я. С. Уфлянд [36] ont étudié le cas d'un quart de plan élastique ou d'un coin plan élastique quelconque encastré au long d'un côté à distance finie.

Dans ce qui va suivre, on étudiera le premier problème fondamental de la théorie de l'élasticité (conditions aux limites en tensions) pour le quart de plan élastique. Nous distinguerons entre une charge périodique et une charge locale (normale ou tangentielle).

3. Considérons en premier lieu le quart de plan élastique $x \geq 0$, $y \geq 0$, actionné par une charge normale périodique $p(x)$ sur le côté $y = 0$ (fig. 1). Pour fixer les idées, représentons ce cas de chargement à l'aide d'une série de Fourier paire par rapport à la variable x

$$(1) \quad p(x) = b_0 + \sum_n b_n \cos \gamma_n x,$$

où l'on a noté

$$(2) \quad \gamma_n = \frac{n\pi}{a} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

avec la période $L_x = 2a$.

On considère le quart de plan élastique $x \geq 0$, $y \geq 0$ comme faisant partie du demiplan $y \geq 0$, actionné par la charge périodique (1), symétrique par rapport

à l'axe Oy (fig. 1). La tension tangentielle sera nulle pour la section $x = 0$ et la tension normale sera, en général, donnée par

$$(3) \quad \sigma_x(0, y) = \sum_n b_n (1 - \gamma_n y) e^{-\gamma_n y},$$

expression qui ne s'annule pas pour chaque y .

C'est ainsi que l'état de tension calculé correspondra à celui qui naît à l'intérieur du quart de plan élastique, actionné par la charge périodique et chargée sur la section $x = 0$ par le chargement normal $\sigma_x(0, y) = -p'(y)$. Si on superpose l'état de tension correspondant au quart de plan élastique, actionné seulement par la charge normale $p'(y)$ sur la section $x = 0$, on obtient l'état de tension correspondant au problème que nous nous proposons d'étudier.

On peut étudier le quart de plan élastique, actionné par la charge aperiodique (locale) $p'(y)$, à l'aide des intégrales de Fourier, en observant que les coefficients de Fourier b_n vérifient la condition

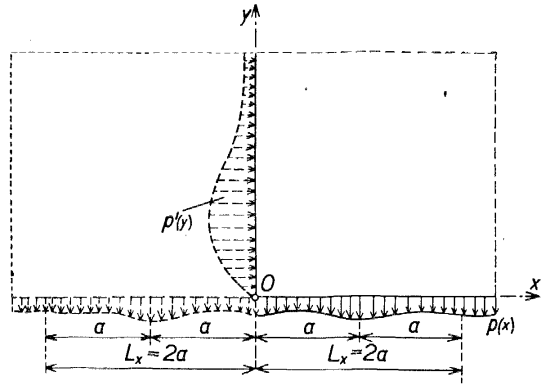


Fig. 1.

$$(4) \quad \int_0^{\infty} \left| \sum_n b_n (1 - \gamma_n y) e^{-\gamma_n y} \right| dy \leq \sum_n |b_n| \int_0^{\infty} |1 - \gamma_n y| e^{-\gamma_n y} dy \leq \\ \leq \sum_n |b_n| \left(\int_0^{\infty} e^{-\gamma_n y} dy + \gamma_n \int_0^{\infty} y e^{-\gamma_n y} dy \right) = \sum_n |b_n| \left(\frac{1}{\gamma_n} + \frac{1}{\gamma_n^2} \right) = \text{fini}.$$

Nous mentionnons que cette condition est vérifiée pour tout cas de chargement réparti (le coefficient b_n est proportionnel à $1/n$, de sorte que la série en discussion peut être comparée avec la série de terme général $1/n^2$).

En considérant un cas de chargement normal périodique, représenté par une série de Fourier impaire par rapport à la variable x , et en utilisant le même procédé, on observe que la tension normale sera nulle pour $x = 0$ (fig. 2). C'est ainsi que nous obtenons la tension tangentielle $\tau_{xy}(0, y) = -t'(y)$, qui ne s'annule pas pour chaque y , et nous serons obligés d'étudier le quart de plan élastique actionné par une charge locale tangentielle $t'(y)$ sur la section $x = 0$.

Ces considérations restent valables pour tout autre cas de chargement périodique tangentiel.

En conclusion, le problème du quart de plan élastique $x \geq 0, y \geq 0$, actionné par une charge périodique quelconque sur l'un de ses côtés à distance finie (par exemple $y = 0$), peut être ramené — à l'aide du principe de la superposition des

effets — à l'étude du demiplan élastique $y \geq 0$, actionné par cette charge périodique sur toute la ligne de séparation $y = 0$, et à l'étude du quart de plan élastique, actionné par une charge locale sur le côté $x = 0$. C'est ainsi que nous considérerons, dans ce qui va suivre, seulement un cas de chargement local sur l'un des côtés du quart de plan élastique.

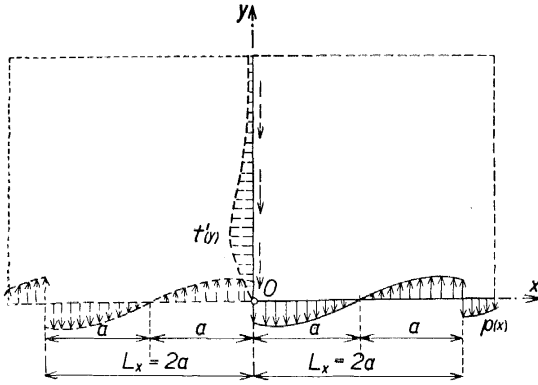


Fig. 2.

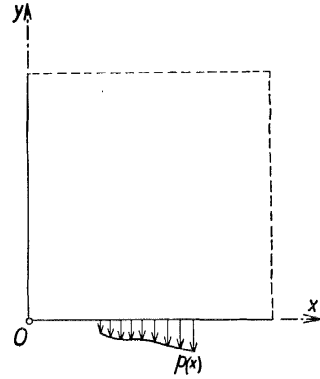


Fig. 3.

4. Soit le quart de plan élastique $x \geq 0, y \geq 0$ (fig. 3), actionné par une charge normale

$$(5) \quad p(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} b(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha$$

sur la côté $y = 0$. On utilise une intégrale de Fourier paire par rapport à la variable x , qui peut représenter aussi une fonction généralisée.

On pose les conditions aux limites

$$(6) \quad \begin{aligned} x = 0: & \quad \sigma_x = 0, & \quad \tau_{xy} = 0, \\ y = 0: & \quad \sigma_y = p(x), & \quad \tau_{yx} = 0, \end{aligned}$$

où σ_x, σ_y sont les tensions normales et $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ sont les tensions tangentielles. De plus, l'état de tension doit s'annuler pour $x \rightarrow \infty$ et pour $y \rightarrow \infty$.

D'après G. B. AIRY [2], [3], l'état de tension correspondant au problème plan de la théorie de l'élasticité peut être représenté sous la forme

$$(7) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \\ \tau_{xy} &= - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

où $F = F(x, y)$ est une fonction biharmonique

$$(8) \quad \Delta \Delta F = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F = 0.$$

Nous choisirons une fonction d'Airy paire par rapport aux deux variables¹⁾

$$(9) \quad F(x, y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} (A + |\alpha| y B) e^{-|\alpha| y} \cos \alpha x \, d\alpha + \\ + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta^2} (C + |\beta| x D) e^{-|\beta| x} \cos \beta y \, d\beta,$$

où les fonctions intégrables $A = A(\alpha)$, $B = B(\alpha)$, $C = C(\beta)$ et $D = D(\beta)$, avec $(-\infty < \alpha, \beta < \infty)$, doivent être précisées par les conditions aux limites. Ces fonctions sont considérées paires par rapport aux variables α et β . Les conditions à l'infini sont automatiquement vérifiées, la méthode de calcul utilisée correspondant à une transformée de Fourier.

Les composantes du tenseur tension ont la forme

$$(10) \quad \sigma_x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [A - (2 - |\alpha| y) B] e^{-|\alpha| y} \cos \alpha x \, d\alpha - \\ - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (C + |\beta| x D) e^{-|\beta| x} \cos \beta y \, d\beta, \\ \sigma_y = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (A + |\alpha| y B) e^{-|\alpha| y} \cos \alpha x \, d\alpha + \\ + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [C - (2 - |\beta| x D)] e^{-|\beta| x} \cos \beta y \, d\beta, \\ \tau_{xy} = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [A - (1 - |\alpha| y) B] e^{-|\alpha| y} \sin |\alpha| x \, d\alpha - \\ - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [C - (1 - |\beta| x) D] e^{-|\beta| x} \sin |\beta| y \, d\beta.$$

En posant les conditions pour les tensions tangentielles, on obtient

$$(11) \quad A = B, \quad C = D.$$

C'est ainsi que la fonction de tension peut s'écrire sous la forme

$$(12) \quad F = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\alpha)}{\alpha^2} (1 + |\alpha| y) e^{-|\alpha| y} \cos \alpha x \, d\alpha + \\ + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(\beta)}{\beta^2} (1 + |\beta| x) e^{-|\beta| x} \cos \beta y \, d\beta$$

¹⁾ Nous considérons ces intégrales dans le sens utilisé dans la théorie de la régularisation des transformées de Fourier, en théorie des distributions [12].

et l'état de tension devient

$$\begin{aligned}
 (13) \quad \sigma_x &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha) (1 - |\alpha| y) e^{-|\alpha|y} \cos \alpha x \, d\alpha - \\
 &\quad -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} D(\beta) (1 + |\beta| x) e^{-|\beta|x} \cos \beta y \, d\beta, \\
 \sigma_y &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha) (1 + |\alpha| y) e^{-|\alpha|y} \cos \alpha x \, d\alpha - \\
 &\quad -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} D(\beta) (1 - |\beta| x) e^{-|\beta|x} \cos \beta y \, d\beta, \\
 \tau_{xy} &= -\frac{y}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha B(\alpha) e^{-|\alpha|y} \sin \alpha x \, d\alpha - \\
 &\quad -\frac{x}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \beta D(\beta) e^{-|\beta|x} \sin \beta y \, d\beta.
 \end{aligned}$$

On observe que, à cause des facteurs $e^{-|\alpha|y}$, $e^{-|\beta|x}$, on peut considérer les fonctions $B(\alpha)$ et $D(\beta)$ même localement intégrables et bornées pour $x > 0$, $y > 0$.

Les relations

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-|\alpha|y}| \, dy &= \frac{2}{|\alpha|} = \text{fini}, \\
 \int_{-\infty}^{\infty} |ye^{-|\alpha|y}| \, dy &= \frac{2}{\alpha^2} = \text{fini}
 \end{aligned}$$

nous permettent de représenter les fonctions correspondantes à l'aide des intégrales de Fourier

$$\begin{aligned}
 (14) \quad e^{-|\alpha|y} &= \frac{1}{\pi} |\alpha| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \beta y \, d\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, \\
 ye^{-|\alpha|y} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \cos \beta y \, d\beta.
 \end{aligned}$$

Il résulte que

$$\begin{aligned}
 (14') \quad (1 - |\alpha| y) e^{-|\alpha|y} &= \frac{2}{\pi} |\alpha| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \cos \beta y \, d\beta, \\
 (1 - |\beta| x) e^{-|\beta|x} &= \frac{2}{\pi} |\beta| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \cos \alpha x \, d\alpha.
 \end{aligned}$$

Tenant compte de (14'), les relations (13) nous donnent

$$(13') \quad -2\sigma_x = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha) \left[|\alpha| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \cos \beta y \, d\beta \right] \cos \alpha x \, d\alpha + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} D(\beta) (1 + |\beta| x) e^{-|\beta|x} \cos \beta y \, d\beta, \\ -2\sigma_y = \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha) (1 + |\alpha| y) e^{-|\alpha|y} \cos \alpha x \, d\alpha + \\ + \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D(\beta) \left[|\beta| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \cos \alpha x \, d\alpha \right] \cos \beta y \, d\beta.$$

En inversant l'ordre d'intégration (ce qu'on peut faire parce que pour $x > 0$ et $y > 0$ il existe une majorante intégrable si $B(\alpha)$ et $D(\beta)$ sont seulement des fonctions intégrables), on obtient

$$(15) \quad -2\sigma_x = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(\beta, x) + D(\beta) (1 + |\beta| x) e^{-|\beta|x}] \cos \beta y \, d\beta, \\ -2\sigma_y = \int_{-\infty}^{\infty} [\psi(\alpha, y) + B(\alpha) (1 + |\alpha| y) e^{-|\alpha|y}] \cos \alpha x \, d\alpha,$$

où on a précisé les transformées de Fourier

$$(16) \quad \varphi(\beta, x) = \frac{2}{\pi} \beta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\alpha| B(\alpha)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \cos \alpha x \, d\alpha, \\ \psi(\alpha, y) = \frac{2}{\pi} \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\beta| D(\beta)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \cos \beta y \, d\beta,$$

en considérant les paramètres β , respectivement α , fixes.

Soit une suite de fonction intégrables $B_n(\alpha)$, respectivement $D_n(\beta)$, telles que

$$(17) \quad |B_n(\alpha)| < C, \quad |D_n(\beta)| < C$$

et

$$(17') \quad B_n(\alpha) \rightarrow B_0(\alpha), \quad D_n(\beta) \rightarrow D_0(\beta).$$

Il est évident alors que

$$(17'') \quad |B_0(\alpha)| < C, \quad |D_0(\beta)| < C;$$

donc les fonctions $B_0(\alpha)$ et $D_0(\beta)$ sont des fonctions localement intégrables.

Si $\varphi_n(\beta, x)$ et $\psi_n(\alpha, y)$ sont les transformées de Fourier correspondant à (17) et définies par les relations (16), on obtient

$$(18) \quad |\varphi_n(\beta, x)| < C, \quad |\psi_n(\alpha, y)| < C,$$

c'est-à-dire

$$(18') \quad \varphi_n(\beta, x) \rightarrow \varphi_0(\beta, x), \quad \psi_n(\alpha, y) \rightarrow \psi_0(\alpha, y);$$

la convergence est donc uniforme par rapport à x , respectivement à y .

Soit $\sigma_x^n(x, y)$ l'expression (13), respectivement (15) pour $B_n(\alpha)$ et $D_n(\beta)$. En utilisant la relation (13), on observe qu'il s'agit d'une convergence uniforme de la fonction $\sigma_x^n(x, y)$ (dans le sens normal) pour $x > \theta > 0$, $y > \theta > 0$. Pour $x = 0$, la fonction $\sigma_x^n(0, y)$ devient une fonction généralisée (dans le sens de la théorie des distributions) et on doit considérer la convergence dans un sens correspondant.

En appliquant la théorie des transformées de Fourier pour les fonctions généralisées, on aboutit à la conclusion que $\sigma_x^n(x, y)$, considérée comme fonction généralisée de la variable y , converge vers la fonction $\sigma_x^0(x, y)$ dans le sens des fonctions généralisées, cette convergence étant uniforme par rapport à x . De plus, $\sigma_x^n(x, y)$ est une fonction paire par rapport à x et y . De même $\sigma_y^n(x, y)$ est une fonction généralisée de la variable x , la convergence étant uniforme par rapport à y .

D'une manière analogue, on démontre que la fonction $\tau_{xy}^n(x, y)$, considérée comme fonction généralisée des variables x , respectivement y , converge uniformément par rapport à y , respectivement à x , vers la fonction $\tau_{xy}^0(x, y)$, dans le sens des fonctions généralisées. De plus, les conditions aux limites (6) correspondantes sont vérifiées.

En passant à la limite dans les expressions (15) des tensions normales, on obtient

$$(19) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \beta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\alpha| B(\alpha)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\alpha + D(\beta) \right] \cos \beta y d\beta = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[B(\alpha) + \frac{2}{\pi} \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\beta| D(\beta)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\beta \right] \cos \alpha x d\alpha = - \int_{-\infty}^{\infty} b(x) \cos \alpha x d\alpha,$$

le deuxième membre de la première relation (19) pouvant être aussi une fonction généralisée si l'on a une charge normale sur le côté $x = 0$ du quart de plan élastique.

Tenant compte de l'isomorphisme de l'espace des fonctions généralisées et de leurs transformées de Fourier, on aboutit aux équations

$$(20) \quad D(\beta) + \frac{2}{\pi} \beta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\alpha| B(\alpha)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\alpha = 0,$$

$$B(\alpha) + \frac{2}{\pi} \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\beta| D(\beta)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\beta = - b(\alpha).$$

S'il existe un système de fonctions symétriques bornées $B(\alpha)$ et $D(\beta)$ qui vérifient le système d'équations intégrales (20), alors l'état de tension à l'intérieur du quart de plan élastique sera donné par les formules (13); ainsi que nous l'avons considéré plus haut, les conditions aux limites sont vérifiées dans le sens de la convergence uniforme des fonctions généralisées.

On observe que le système homogène (20) est indépendant du chargement du quart de plan élastique, celui-ci n'intervenant que dans le second membre.

Dans ce qui va suivre, nous nous bornerons à la classe des fonctions généralisées paires, plus précisément au cas dans lequel $B(\alpha)$ et $D(\beta)$ sont des fonctions paires, bornées, localement intégrables. On va démontrer que le système d'équations (20) a une solution unique dans la classe des fonctions généralisées.

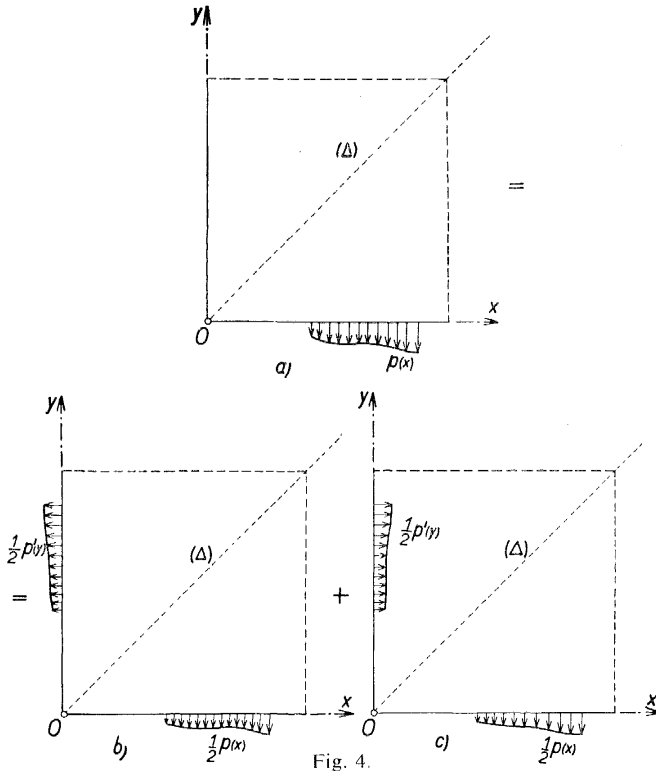


Fig. 4.

En vérité, soit M l'espace linéaire des fonctions généralisées mesurables et $\|x\|_M$ la norme de cet espace. On écrit encore $M^2 = M \times M$ et l'on introduit la norme de la manière suivante: soit $a \in M^2$ et encore $a \equiv (a_1, a_2)$, $a_1 \in M$, $a_2 \in M$, $\|a\|_{M^2} = \max(\|a_1\|_M, \|a_2\|_M)$; l'espace M^2 est donc l'espace complet de Banach. Si l'on prouve que la transformée définie par

$$(21) \quad A(a_1, a_2) = (b_1, b_2),$$

où

$$(21') \quad b_1 = \frac{2}{\pi} \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\beta| a_2(\beta)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\beta,$$

$$b_2 = \frac{2}{\pi} \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\beta| a_1(\beta)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\beta,$$

est linéaire et que l'on a $\|A\| < 1$, alors la solution du système (20) est unique [21]. Mais la linéarité est évidente et la norme est donnée par

$$(22) \quad \|A\| \leq \frac{2}{\pi} \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\beta|}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\beta = \frac{2}{\pi} < 1 ;$$

l'existence et l'unicité de la solution sont donc démontrées.

5. On observe que le système d'équations (20) jouit de certaines propriétés de symétrie qui nous suggèrent une simplification du calcul, basée sur des propriétés d'ordre physique et mathématique.

L'état de chargement considéré (fig. 4a) peut être décomposé en deux états de chargement: l'un symétrique par rapport à la bissectrice (Δ) (fig. 4b) et l'autre antisymétrique par rapport à la même droite (fig. 4c). On introduit ainsi le chargement

$$(23) \quad p'(y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} b(\beta) \cos \beta y d\beta$$

sur le côté $x = 0$.

L'état de tension est donné par les mêmes formules (13), les fonctions $B(\alpha)$ et $D(\beta)$ étant liées par certaines relations.

Pour les deux cas de chargement de ci-dessus on obtient ainsi les systèmes d'équations intégrales

$$(24) \quad \begin{aligned} D(\beta) + \frac{2}{\pi} \beta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\alpha| B(\alpha)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\alpha &= \mp \frac{1}{2} b(\beta), \\ B(\alpha) + \frac{2}{\pi} \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\beta| D(\beta)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\beta &= -\frac{1}{2} b(\alpha), \end{aligned}$$

le premier signe correspondant au cas de chargement symétrique et l'autre au cas de chargement antisymétrique. Par un changement de variable, on pourra écrire ces systèmes sous la forme

$$(24') \quad \begin{aligned} D(\beta) + \frac{2}{\pi} \beta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\alpha| B(\alpha)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\alpha &= \mp \frac{1}{2} b(\beta), \\ B(\beta) + \frac{2}{\pi} \beta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\alpha| D(\alpha)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\alpha &= -\frac{1}{2} b(\beta). \end{aligned}$$

Si la fonction $b(\beta)$ est une fonction paire, les intégrales $\beta(\alpha)$ et $D(\alpha)$ seront aussi des fonctions paires. Par soustraction ou par addition des deux équations on obtient

$$(24'') \quad B(\beta) \mp D(\beta) \mp \frac{2}{\pi} \beta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha [B(\alpha) \mp D(\alpha)]}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\alpha = 0.$$

Pour le cas de chargement symétrique on obtient la solution banale

$$(25) \quad B(\alpha) = D(\beta) \quad (\alpha = \beta),$$

et pour le cas de chargement antisymétrique la relation

$$(25') \quad B(\alpha) + D(\beta) = 0 \quad (\alpha = \beta).$$

C'est ainsi que les systèmes (24) peuvent être remplacés par les équations

$$(26) \quad B(\alpha) \pm \frac{2}{\pi} \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\beta| B(\beta)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\beta = -\frac{1}{2} b(\alpha),$$

qui, à cause de la parité de $b(\alpha)$ par rapport à α , peuvent être écrites aussi sous la forme

$$(26') \quad B(\alpha) \pm \frac{4}{\pi} \alpha^2 \int_0^{\infty} \frac{\beta B(\beta)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\beta = -\frac{1}{2} b(\alpha),$$

les deux signes correspondant au cas de chargement symétrique, respectivement antisymétrique.

Ce résultat est la conséquence mathématique de certaines propriétés d'ordre physique; on observe ainsi que pour un élément linéaire de la bissectrice (Δ) on peut écrire

$$(27) \quad \sigma_{45^\circ} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) - \tau_{xy} = -\frac{y}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha B(\alpha) e^{-\alpha y} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) d\alpha - \\ - \frac{x}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \beta D(\beta) e^{-\beta x} (\cos \beta y + \sin \beta y) d\beta,$$

$$\tau_{45^\circ} = -\frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha) e^{-\alpha y} \cos \alpha x d\alpha - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} D(\beta) e^{-\beta x} \cos \beta y d\beta.$$

Pour une charge symétrique on doit avoir $\tau_{45^\circ} = 0$ pour $x = y$, condition qui nous conduit seulement à la relation (25) et dans le cas d'une charge antisymétrique on doit avoir $\sigma_{45^\circ} = 0$, pour $x = y$, ce qui nous conduit de même seulement à la relation (25').

6. Si $b(\alpha)$ est une fonction paire par rapport à α , on peut écrire le chargement (5) sous la forme

$$(5') \quad p(x) = \int_0^{\infty} b(\alpha) \cos \alpha x d\alpha.$$

L'état de tension peut donc être écrit sous la forme

$$(28) \quad \sigma_x = - \int_0^{\infty} B(\alpha) (1 - \alpha y) e^{-\alpha y} \cos \alpha x d\alpha - \int_0^{\infty} D(\beta) (1 + \beta x) e^{-\beta x} \cos \beta y d\beta,$$

$$\sigma_y = - \int_0^{\infty} B(\alpha) (1 + \alpha y) e^{-\alpha y} \cos \alpha x d\alpha - \int_0^{\infty} D(\beta) (1 - \beta x) e^{-\beta x} \cos \beta y d\beta,$$

$$\tau_{xy} = -y \int_0^{\infty} \alpha B(\alpha) e^{-\alpha y} \sin \alpha x d\alpha - x \int_0^{\infty} D(\beta) e^{-\beta x} \sin \beta y d\beta,$$

où $B(\alpha)$ et $D(\beta)$ vérifient la relation (25), respectivement (25').

L'état de déformation sera donné (pour des fonctions de tension de la forme (9)) par

$$(29) \quad \begin{aligned} E[u - (-\omega_0 y + u_0)] &= \int \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dx - \mu \frac{\partial F}{\partial x}, \\ E[v - (\omega_0 x + v_0)] &= \int \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dy - \mu \frac{\partial F}{\partial y}, \end{aligned}$$

où E est le module d'élasticité longitudinale et μ est le coefficient de contraction transversale de Poisson; les déplacements u_0 , v_0 et la rotation ω_0 de corps rigide doivent être précisés par des conditions supplémentaires de déplacement.

En posant les conditions aux limites (6) pour les tensions normales (28), on peut écrire les relations

$$(30) \quad \begin{aligned} \int_0^\infty B(x) (1 - \alpha y) e^{-\alpha y} dx + \int_0^\infty D(\beta) \cos \beta y d\beta &= 0, \\ \int_0^\infty B(x) \cos \alpha x dx + \int_0^\infty D(\beta) (1 - \beta x) e^{-\beta x} d\beta &= - \int_0^\infty b(x) \cos \alpha x dx. \end{aligned}$$

Tenant compte des conditions (30), on obtient les tensions normales sur les lignes de séparation

$$(31) \quad \begin{aligned} \sigma_x(x, 0) &= p(x) - 2x \int_0^\infty \beta D(\beta) e^{-\beta x} d\beta, \\ \sigma_y(0, y) &= -2y \int_0^\infty \alpha B(x) e^{-\alpha y} dx. \end{aligned}$$

7. Les relations (20) nous permettent d'écrire

$$(32) \quad \begin{aligned} D(\beta) &= -\frac{2}{\pi} \beta^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{|\gamma| B(\gamma)}{(\gamma^2 + \beta^2)^2} d\gamma, \\ B(x) &= -b(x) - \frac{2}{\pi} x^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{|\delta| D(\delta)}{(\alpha^2 + \delta^2)^2} d\delta. \end{aligned}$$

En éliminant $D(\beta)$ entre ces relations on obtient

$$(33) \quad B(x) - \frac{4}{\pi^2} x^2 \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{|\gamma\delta| \delta^2 B(\gamma)}{(\alpha^2 + \delta^2)^2 (\gamma^2 + \delta^2)^2} d\gamma d\delta = -b(x).$$

En supposant que $b(x)$ est une fonction paire, on aboutit à

$$(34) \quad B(x) - \frac{16}{\pi^2} x^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\gamma\delta^3 B(\gamma)}{(\alpha^2 + \delta^2)^2 (\gamma^2 + \delta^2)^2} d\gamma d\delta = -b(x),$$

équation intégrale qu'on peut encore écrire sous la forme

$$(35) \quad B(x) + \int_0^\infty K(x, \gamma) B(\gamma) d\gamma = -b(x).$$

Le noyau $K(\alpha, \gamma)$, indépendant de la charge extérieure, sera

$$(36) \quad K(\alpha, \gamma) = -\frac{16\alpha^2\gamma}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\delta^3 d\delta}{(\alpha^2 + \delta^2)^2 (\gamma^2 + \delta^2)^2} = \\ = -\frac{16\alpha^2\gamma}{\pi^2(\alpha^2 - \gamma^2)^3} \left[\alpha^2 - \gamma^2 + (\alpha^2 + \gamma^2) \log \left| \frac{\gamma}{\alpha} \right| \right].$$

En éliminant $B(x)$ entre les relations (20) ou (32), on obtient, dans les mêmes conditions, une équation intégrale, ayant le même noyau

$$(35') \quad D(\beta) + \int_0^\infty K(\beta, \delta) D(\delta) d\delta = \frac{4}{\pi} \beta^2 \int_0^\infty \frac{\gamma b(\gamma)}{(\gamma^2 + \beta^2)^2} d\gamma.$$

D'ailleurs, si l'une des fonctions $B(x)$ ou $D(\beta)$ est déterminée, l'autre fonction peut être précisée par les relations (32).

On observe que, par un simple changement de fonction, on peut écrire l'équation (34) sous la forme trouvée dans [4], par une autre voie. C'est ainsi que l'étude faite dans le travail mentionné reste valable pour nos résultats (l'existence et l'unicité de la solution), notamment la possibilité d'obtenir une solution par des approximations successives. On peut donc affirmer que la suite de fonctions $B^{(i)}(x)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), avec

$$(37) \quad B^{(0)}(x) = -b(x)$$

et

$$(37') \quad B^{(i+1)}(x) = -b(x) + \frac{16}{\pi^2} \alpha^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\gamma \delta^3 B^{(i)}(\gamma)}{(\alpha^2 + \delta^2)^2 (\gamma^2 + \delta^2)^2} d\gamma d\delta,$$

peut approximer la solution de l'équation (34) si les coefficients de Fourier $b(x)$ vérifient la condition d'intégrabilité absolue

$$(38) \quad \int_0^\infty \left| \frac{b(x)}{\alpha} \right| dx < \infty.$$

8. On peut étudier le problème d'une manière analogue, en utilisant une représentation du chargement sous la forme impaire par rapport à la variable x

$$(39) \quad p(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty a(\alpha) \sin \alpha x d\alpha,$$

où nous avons supposé que $a(\alpha)$ est une fonction impaire par rapport à α .

On est conduit ainsi à l'état de tension

$$(40) \quad \sigma_x = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty B(\alpha) (1 - |\alpha| y) e^{-|\alpha|y} \sin \alpha x d\alpha - \\ - \frac{x}{2} \int_{-\infty}^\infty |\beta| D(\beta) e^{-|\beta|x} \cos \beta y d\beta,$$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha) (1 + |\alpha| y) e^{-|\alpha| y} \sin \alpha x \, d\alpha - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} D(\beta) (2 - |\beta| x) e^{-|\beta| x} \cos \beta y \, d\beta, \\ \tau_{xy} &= \frac{y}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha B(\alpha) e^{-|\alpha| y} \cos \alpha x \, d\alpha + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} D(\beta) (1 - |\beta| x) e^{-|\beta| x} \sin \beta y \, d\beta.\end{aligned}$$

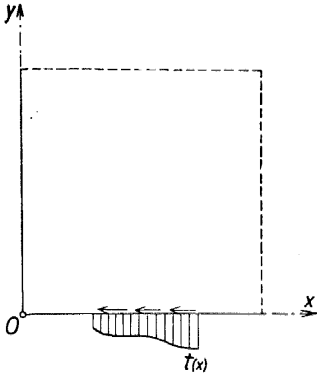


Fig. 5.

Tenant compte des intégrales de Fourier

$$(41) \quad \begin{aligned}e^{-|\alpha| y} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\beta| \sin \beta y \, d\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, \\ y e^{-|\alpha| y} &= \frac{2}{\pi} |\alpha| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta \sin \beta y \, d\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}\end{aligned}$$

et en procédant d'une manière analogue, on aboutit au système d'équations intégrales

$$(42) \quad \begin{aligned}D(\beta) + \frac{2}{\pi} |\beta| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha |\alpha| B(\alpha)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \, d\alpha &= 0, \\ B(\alpha) + \frac{2}{\pi} \alpha^2 |\alpha| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(\beta) \, d\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} &= -a(\alpha).\end{aligned}$$

Ce système est plus compliqué que le système (20), n'ayant plus les propriétés de symétrie dont jouit ce dernier; toutefois il peut être étudié d'une manière analogue.

9. Si le quart de plan élastique est actionné par la charge tangentielle (fig. 5)

$$(43) \quad i(x) = \int_0^{\infty} b(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha,$$

où $b(\alpha)$ est une fonction paire par rapport à α , $i(x)$ pouvant représenter aussi une fonction généralisée, l'état de tension sera donné par

$$(44) \quad \begin{aligned}\sigma_x &= -\int_0^{\infty} B(\alpha) (2 - \alpha y) e^{-\alpha y} \sin \alpha x \, d\alpha - x \int_0^{\infty} \beta D(\beta) e^{-\beta x} \sin \beta y \, d\beta, \\ \sigma_y &= -y \int_0^{\infty} \alpha B(\alpha) e^{-\alpha y} \sin \alpha x \, d\alpha - \int_0^{\infty} D(\beta) (2 - \beta x) e^{-\beta x} \sin \beta y \, d\beta, \\ \tau_{xy} &= -\int_0^{\infty} B(\alpha) (1 - \alpha y) e^{-\alpha y} \cos \alpha x \, d\alpha - \int_0^{\infty} D(\beta) (1 - \beta x) e^{-\beta x} \cos \beta y \, d\beta.\end{aligned}$$

On vérifie aisément que les tensions normales s'annulent sur les deux côtés à distance finie. En posant les conditions aux limites pour les tensions tangentielles on aboutit aux mêmes équations intégrales (20), qui doivent être vérifiées. La solution

du problème se réduit donc, du point de vue mathématique (en utilisant des propriétés de symétrie et d'antisymétrie), à l'intégration des mêmes équations (26').

10. Considérons en particulier le cas d'une force normale concentrée P , agissant dans l'origine O (fig. 6a). Nous décomposons ce cas de chargement en deux autres cas de chargement d'après les propriétés de symétrie (fig. 6b) ou d'antisymétrie (fig. 6c).

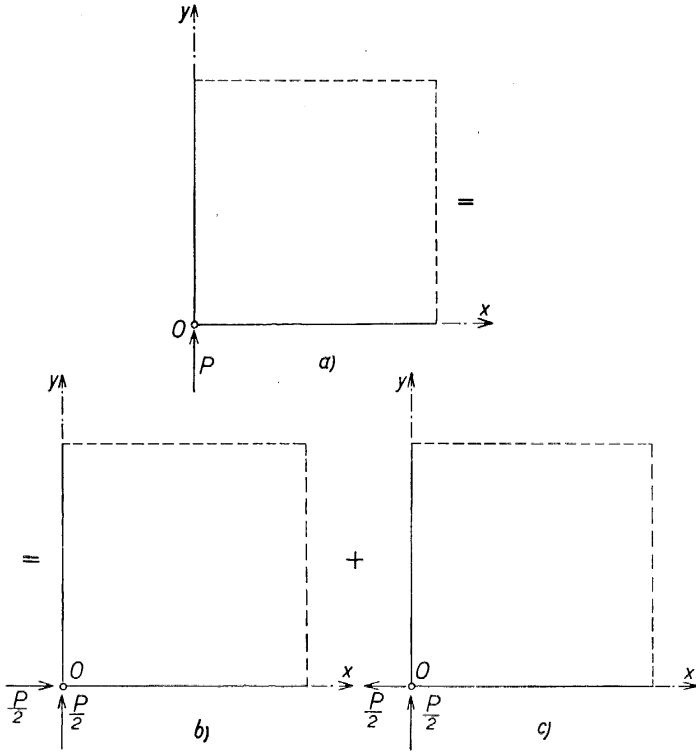


Fig. 6.

Le cas de chargement de la fig. 6a se représente sous la forme

$$(45) \quad p(x) = -\delta(x) P,$$

où $\delta(x)$ est la fonction de Dirac pour le point $x = 0$. C'est ainsi que nous avons [12]

$$(46) \quad b(\alpha) = -\frac{2P}{\pi}.$$

Les équations intégrales auxquelles est réduit le problème (correspondant aux cas de chargement des fig. 6b et c) seront

$$(47) \quad B(\alpha) \pm \frac{4}{\pi} \alpha^2 \int_0^\infty \frac{\beta B(\beta)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\beta = \frac{P}{\pi}.$$

On cherche une solution sous la forme $B(x) = C = \text{const.}$ On observe que

$$\int_0^{\infty} \frac{\beta \, d\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} = \frac{1}{2\alpha^2}.$$

Il résulte que

$$(48) \quad C = \frac{P}{\pi \pm 2}.$$

Pour le cas de chargement de la fig. 6b on obtient

$$(49) \quad B(x) = D(\beta) = \frac{P}{\pi + 2}$$

et pour le cas de chargement de la fig. 6c on a

$$(49') \quad B(x) = -D(\beta) = \frac{P}{\pi - 2}.$$

Dans le cas de chargement étudié (fig. 6a), on obtient l'état de tension

$$(50) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2P}{\pi^2 - 4} \left[\pi \int_0^{\infty} (1 - \alpha y) e^{-\alpha y} \cos \alpha x \, d\alpha - \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_0^{\infty} (1 + \beta x) e^{-\beta x} \cos \beta y \, d\beta \right], \\ \sigma_y &= -\frac{2P}{\pi^2 - 4} \left[\pi \int_0^{\infty} (1 + \alpha y) e^{-\alpha y} \cos \alpha x \, d\alpha - \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_0^{\infty} (1 - \beta x) e^{-\beta x} \cos \beta y \, d\beta \right], \\ \tau_{xy} &= -\frac{2P}{\pi^2 - 4} \left(\pi y \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha y} \sin \alpha x \, d\alpha - \right. \\ &\quad \left. - 2x \int_0^{\infty} \beta e^{-\beta x} \sin \beta y \, d\beta \right). \end{aligned}$$

Après avoir calculé les intégrales ci-dessus, on peut écrire

$$(50') \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{4P}{\pi^2 - 4} \frac{(2x - \pi y) x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \sigma_y &= \frac{4P}{\pi^2 - 4} \frac{(2x - \pi y) y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \tau_{xy} &= \frac{4P}{\pi^2 - 4} \frac{(2x - \pi y) xy}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

L'état de déformation sera donné par

$$(51) \quad E[u - (-\omega_0 y + u_0)] = -\frac{2P}{\pi^2 - 4} \left[\pi(1 - \mu) \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - 2 \log(x^2 + y^2) + \right. \\ \left. + (1 + \mu) \frac{(2x - \pi y)x}{x^2 + y^2} \right], \\ E[v - (\omega_0 x + v_0)] = \frac{2P}{\pi^2 - 4} \left[2(1 - \mu) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi \log(x^2 + y^2) - \right. \\ \left. - (1 + \mu) \frac{(2x - \pi y)y}{x^2 + y^2} \right].$$

Pour les lignes de séparation on obtient les tensions normales

$$(52) \quad \sigma_x(x, 0) = \frac{8}{\pi^2 - 4} \frac{P}{x}, \\ \sigma_y(0, y) = -\frac{4\pi}{\pi^2 - 4} \frac{P}{y},$$

la forme déformée de ces lignes s'écrivant sous la forme

$$(53) \quad E[v(x, 0) - (\omega_0 x + v_0)] = -\frac{4\pi}{\pi^2 - 4} P \log x, \\ E[u(0, y) - (-\omega_0 y + u_0)] = \frac{8}{\pi^2 - 4} P \log y.$$

Les déplacements u_0 , v_0 et la rotation ω_0 de corps rigide doivent être déterminés par certaines conditions de déplacement, qui ne peuvent être posées dans l'origine O , celle-ci étant un point singulier.

On a obtenu ainsi les résultats classiques bien connus, en appliquant une méthode générale de calcul.

II. Soit aussi le cas de chargement du quart de plan élastique avec une force tangentielle concentrée (fig. 7)

$$(54) \quad t(x) = -\delta(x) P,$$

actionnant dans l'origine O .

De même qu'au point précédent, on obtient les équations intégrales (47), donc les fonctions (49) et (49'). En utilisant les formules (44) et en calculant

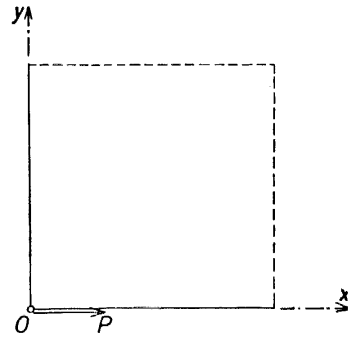


Fig. 7.

les intégrales qui y interviennent, on obtient l'état de tension sous la forme

$$(55) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{4P}{\pi^2 - 4} \frac{(\pi x - 2y)x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \sigma_y &= -\frac{4P}{\pi^2 - 4} \frac{(\pi x - 2y)y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{4P}{\pi^2 - 4} \frac{(\pi x - 2y)xy}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

L'état de déformation s'écrit alors aisément.

On observe qu'on peut obtenir les mêmes résultats en considérant la force concentrée P comme une charge normale, agissant sur la ligne de séparation Oy .

Nous avons étudié ci-dessus deux cas de chargement déjà considérés dans la littérature, pour pouvoir illustrer la méthode de calcul introduite.

12. On peut étudier, d'une manière analogue, l'action des charges concentrées intérieures ou des forces massiques quelconques, en nous appuyant sur quelques uns de nos résultats antérieurs [30], [31].

En utilisant des coordonnées cartésiennes obliques [32], on peut démontrer que le premier problème fondamental de la théorie de l'élasticité (conditions aux limites en tensions) pour un coin plan élastique quelconque peut être résolu d'une manière analogue.

Bibliographie

- [1] *V. M. Abramov*: Распределение напряжений в плоском безграничном клине при произвольной нагрузке, Тр. конф. по оптическому изучению напряжений Н. И. И. М. М. Л. Г. У. и Н. И. И. Мех. М: Г. У., О. Н. Т. И., 1937, стр. 131.
- [2] *G.-B. Airy*: On the Strains in the Interior of Beams, British Assoc. Adv. Sci. Rept., 1862.
- [3] *G.-B. Airy*: Idem, Phil.-Trans., vol. 153, 1863, p. 49.
- [4] *I. Babuška, K. Rektorys, Fr. Vyčichlo*: Mathematische Elastizitätstheorie der ebenen Probleme, Akad.-Verlag, Berlin, 1960.
- [5] *J. Balaš, A. Hanuška*: Stav napätosti v nekonečnom kline, Stavebn. časop. SAV., Bratislava, t. VII, nr. 1, 1959, p. 7.
- [6] *С. М. Белоносов*: Плоская задача теории упругости для клина при заданных на границе напряжениях или перемещениях. Докл. Акад. Наук СССР, т. 131, Но. 5, 1960, стр. 1042.
- [7] *Б. З. Брачковский, А. И. Лурье*: Решение плоской задачи теории упругости для клина, Тр. Ленингр. политех. инст., но. 3, 1941.
- [8] *J. A. H. Brahtz*: Stress Distribution in Wedges with Arbitrary Boundary Forces, Physics, t. II, 1933, p. 56.
- [9] *J. A. H. Brahtz*: Stress Distribution in a Reentrant Corner, Trans. ASME, vol. 55, 1933, p. 31.
- [10] *Н. М. Фигурнов*: Исследования напряженного состояния четверти плоскости, нагруженной сосредоточенной силой к одной из граней, Прикл. мат. и мех., т. III, Но. 4, 1939, стр. 135.

- [11] *P. Fillunger*: Drei wichtige ebene Spannungszustände des keilförmigen Körper, ZAMP, vol. 60, 1912, p. 275.
- [12] *И. М. Гельфанд, Г. Е. Шолов*: Обобщенные функции и действия над ними, Изд. второй, Физматгиз, Москва, 1959.
- [13] *D. E. R. Godfrey*: Solutions of two-Dimensional Loading Problems of an Infinite Wedge, Aircraft Engng., vol. 26, nr. 306, 1954, p. 240.
- [14] *D. E. R. Godfrey*: Generalized Plane Stress in an Elastic Wedge under Isolated Load, Quart. Journ. Mech. and Appl. Math., vol. VIII, 1955, p. 226.
- [15] *M. Hetényi*: A Method of Solution for the Elastic Quarter-Plane, Paper Amer. Soc. Mech. Engrs., no. A-92, 1959.
- [16] *П. П. Купарев*: Определение напряжений в анизотропном клине, Докл. Акад. Наук СССР, т. XXXII, No. 8, 1941.
- [17] *Л. М. Куршин*: Смешанная плоская задача теории упругости для квадранта, Прикл. мат. и мех., т. XXIII, в. 5, 1959, стр. 981.
- [18] *С. Г. Ланин*: Напряжения в упругом клине от местной нормальной нагрузки, Тр. Л. И. И. В. Т-а, т. XIX, 1952.
- [19] *С. Г. Ланин*: О напряжениях в плотинах от нагрузки равномерно распределенной по прямой параллельной гребню, Тр. Л. И. И. В. Т-а, т. XXIII, 1956, стр. 85.
- [20] *M. Lévy*: Sur la légitimité de la règle dite du trapèze dans l'étude de la résistance des barrages en maçonnerie, C. Rend. hebd. des séances de l'Acad. des Sc., Paris, vol. 126, 1898, p. 1235.
- [21] *Л. А. Люстерик, В. И. Соболев*: Элементы функционального анализа, Гостехиздат, Москва, 1951.
- [22] *J. Majer*: Das reine Randwertproblem des ebenen elastischen Keiles, Österr. Ing.-Archiv, vol. IV, cahier 3-4, 1950, p. 290.
- [23] *J. H. Michell*: The Inversion of Plane Stress, Proc. of the London Math. Soc., vol. 34, 1902, p. 134.
- [24] *A. Miura*: Spannungskurven in rechteckigen und keilförmigen Trägern, Berlin, 1928, p. 61.
- [25] *J. Nečas*: Řešení biharmonického problému pro nekonečný klín, I, Časop. pro pěst. mat., vol. 83, 1958, p. 257.
- [26] *J. Nečas*: Idem, II, Ibidem, vol. 83, 1958, p. 399.
- [27] *J. Nečas*: Řešení biharmonického problému pro nekonvexní klín, Ibidem, vol. 84, 1959, p. 90.
- [28] *J. Nečas*: L'extension de l'espace des conditions aux limites du problème biharmonique pour les domaines à points anguleux, Чех. мат. журнал, т. 9 (84), 1959, p. 339.
- [29] *W. M. Shephard*: Stress Systems in an Infinite Sector, Proc. Roy. Soc. London, S. A., vol. 148, 1935, p. 284.
- [30] *P. P. Teodorescu*: O metodă de rezolvare a problemei plane a teoriei elasticității în cazul unor forțe masice oarecare (Une méthode pour résoudre le problème plan de la théorie de l'élasticité dans le cas de forces massiques quelconques), Com. Acad. R. P. R., t. VI, nr. 2, 1956, p. 285.
- [31] *P. P. Teodorescu*: Asupra problemei plane a teoriei elasticității în cazul unor forțe masice oarecare, Bul. științ. Acad. R. P. R., Secția de șt. mat. și fiz., t. IX, nr. 2, 1957, p. 481; К плоской задаче теории упругости при произвольных объемных силах, Rev. de Méc. Appl., t. III, nr. 1, 1958, p. 101.
- [32] *P. P. Teodorescu*: Asupra problemei plane a elasticității în coordonate oblice, St. și cerc. de mec. apl., t. IX, nr. 2, 1958, p. 391; On the Plane Problem of Elasticity in Oblique Coordinates, Rev. de Méc. Appl., t. IV, nr. 3, 1959, p. 497.
- [33] *P. P. Teodorescu*: Sur le problème du coin plan élastique, C. Rend. hebd. des séances de l'Acad. des Sc., Paris, t. 250, nr. 21, 1960, p. 3446.

- [34] *V. Tesař*: Experimentální rozbor zvláštního případu napjatosti čtvercové desky, Sb. k osmdesátým naroz. akad. Fr. Kloknera, Státní nakl. techn. lit., Praha, 1953, p. 259.
- [35] *C. J. Tranter*: Quart. Journ. Mech. and Appl. Math., t. I, 1948, p. 125.
- [36] *Я. С. Уфлягия*: Смешанная задача теории упругости для клина, Изв. Акад. Наук СССР, Отд. техн. и механ. и машиностр., No. 2, 1959, стр. 156.
- [37] *M. L. Williams*: Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension, J. Appl. Mech., vol. 19, nr. 4, 1952, p. 526.
- [38] *K. Wolf*: Sitz. Berichte Keiserl. Akad. Wiss. Wien, Abt. II, vol. 123, 1914, p. 291.

Výtah

O PROBLÉMU PRUŽNÉ ČTVRTROVINY

P. P. TEODORESCU

První fundamentální úloha teorie pružnosti (okrajové podmínky v napjatostech) pro pružnou čtvrtrovinu je zde redukována na řešení soustavy dvou integrálních rovnic; je studována existence a jednoznačnost řešení ve třídě zobecněných funkcí. V případě periodického zatížení je rovněž připojeno řešení obdobné úlohy pro pružnou polorovinu. Případy zatížení ve směru normálním a ve směru tangenciálním jsou studovány odděleně; vedou ke stejným integrálním rovnicím.

Odvozené výsledky jsou pak aplikovány na pružnou čtvrtrovinu, na kterou působí síla soustředěná ve vrcholu.

Резюме

К ПРОБЛЕМЕ УПРУГОЙ ЧЕТВЕРТЬПЛОСКОСТИ

П. П. ТЭОДОРЕСКУ (P. P. Teodorescu)

Первая фундаментальная задача теории упругости (краевые условия в напряженностях) для упругой четвертьплоскости сводится здесь к решению системы двух интегральных уравнений; изучаются условия существования и однозначности решения в классе обобщенных функций. В случае периодической нагрузки добавлено еще решение аналогичной задачи для упругой полуплоскости. Случаи действия нагрузки по направлению нормали и по направлению касательной изучаются в отдельности; оба случая приводят нас к тем же интегральным уравнениям.

Полученные результаты применяются к упругой четвертьплоскости, находящейся под действием силы, сосредоточенной в вершине.