

Aplikace matematiky

Václav Fabian

Stochastická aproximační metoda pro hledání optimálních podmínek v experimentální práci a v samoadaptivních systémech

Aplikace matematiky, Vol. 6 (1961), No. 3, 162–183

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102752>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1961

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

STOCHASTICKÁ APROXIMAČNÍ METODA PRO HLEDÁNÍ OPTIMÁLNÍCH PODMÍNEK V EXPERIMENTÁLNÍ PRÁCI A V SAMOADAPTIVNÍCH SYSTÉMECH

VÁCLAV FABIAN

(Došlo dne 3. ledna 1960.)

Jsou uvedeny základní vlastnosti jedné multidimensionální stochastické aproximační metody a jsou uvažovány — s příklady — její aplikace jako metody experimentálního výzkumu a jako strategie optimalizátoru v samoadaptivních systémech.

1. ÚVOD

Popisovaná metoda je jednou z tzv. stochastických aproximačních metod. Příkopnickým článkem, zakladajícím tento nový obor matematické statistiky, je práce H. ROBBINSE a S. MONROA [13], publikovaná v roce 1951. První metoda pro optimalizaci více než jednoho parametru byla navržena JULIEM BLUMEM [3] v roce 1954. V této práci uvádíme metodu ve formě navržené a studované autorem v práci [4].

Prvá část práce (odst. 2–9) je poněkud podrobnější versí autorova sdělení na IV. konferenci chemického inženýrství ve Smolenicích v říjnu 1958. V této části práce je popsána aproximační metoda z hlediska použití v experimentálním výzkumu. Je podán podrobný návod k použití a příklad.

V druhé části diskutujeme možnosti použití aproximační metody jako strategie určující funkci optimalizátoru v samoadaptivním systému. Popisovaná metoda je porovnána s jinými k témuž cíli navrhovanými metodami.

Uvedené dvě aplikace nejsou jedinými. Zcela jiného druhu jsou např. aplikace stochastické aproximační metody k řešení numerických problémů. Přípustnost náhodných chyb v určování hodnot maximalizované funkce činí metodu v některých případech necitlivou vůči chybám zaokrouhlování, provádí-li se zaokrouhlování náhodně.

2. FORMULACE PROBLÉMU

Abstraktní formulace je tato: Máme vyhledat ty hodnoty reálných proměnných $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$, pro něž nabývá funkce $f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)})$ své maximální hodnoty.

Analytické vyjádření funkce f neznáme, můžeme pouze pro každou z přípustných¹⁾ hodnot proměnných určit nebo aspoň odhadnout odpovídající funkční hodnotu.

Tak např. může být $k = 3$, $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ mohou charakterisovat podmínky pokusu, v němž se mele baryt v kulovém mlýně, $x^{(1)}$ může udávat množství barytu, $x^{(2)}$ dobu mletí, $x^{(3)}$ rychlost otáčení mlýna a $f(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$ může udávat vhodně zvolenou charakteristiku, kterou je třeba maximalisovat. Hned zde připomeneme, že vhodná definice maximalisované charakteristiky (tj. funkce f) podmiňuje praktickou úspěšnost řešení problému, nevhodná definice vede k řešení, které je prakticky neupotřebitelné, neboť je řešením jiného problému, než měl experimentátor na mysli. Udává-li např. $f(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$ jemnost barytu po mletí, zjistíme, že jemnost $f(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$ je tím větší, čím je množství $x^{(1)}$ barytu menší, doba $x^{(2)}$ mletí větší, takže se dostáváme k podmínkám prakticky zcela nevhodným. V uvažovaném příkladu by patrně musila funkce f v sobě zahrnout oba důležité aspekty, jemnost barytu po mletí i náklady na mletí. Jiným problémem by mohl být požadavek minimalisace nákladů na mletí při dosažení určité předem stanovené jemnosti. Formulace druhého problému je snadnější než formulace prvního, avšak druhý problém vzniká z prvního obvykle subjektivním rozhodnutím parciální otázky, totiž subjektivním stanovením minimální požadované jemnosti (jinde jiného ze dvou protichůdně působících kritérií). To, že se minimální požadovaná jemnost apod. stanoví někdy např. na základě existující normy, nezlepšuje příliš situaci, neboť ve většině případů by měl výzkum spíše normy tvořit, než jich poslouchat. Přitom experimentální řešení takto okleštěného problému je podstatně složitější, než řešení problému původního.

Čím speciálnější bude otázka, tím bude volba vhodné funkce f snadnější. Chceme-li zjistit optimální teploty $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, $T^{(3)}$, $T^{(4)}$ na začátku první až čtvrté etáže konkrétního kontaktního kotle pro konverzi SO_2 na SO_3 , budou patrně nejlepší ty teploty, jimž odpovídá maximální konverse $f(T^{(1)}, T^{(2)}, T^{(3)}, T^{(4)})$. Může se ovšem stát, že z některých důvodů jsou předepsány meze, v nichž musí zmíněné parametry ležet, v našem příkladu budou musit být všechna $T^{(i)}$ větší nebo rovna určité teplotě zážehu T^\vee a musit být shora omezeny teplotou T^\wedge , neboť při jejím překročení by se katalysátor ničil.

Je tedy často v praxi nutné měnění sledovaných proměnných omezit pouze na tzv. přípustné hodnoty.

Konečně si všimneme, že v obou uvažovaných příkladech vzhledem k náhodným vlivům ovlivňujícím výsledek měření nebude měřená hodnota $y(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$ rovna přímo funkční hodnotě $f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$, ale bude jen jejím odhadem.

3. NÁVOD

3.1. Úmluvy a označení. Místo o proměnných $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$ funkce f můžeme mluvit o volitelné podmínce $x = [x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}]$ a značit zkráceně $f(x) =$

¹⁾ Vysvětlíme za chvíli, co míníme slovem přípustný.

$= f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)})$. Jsou-li x, a apod. podmínky, značí $x^{(i)}, a^{(i)}, \dots$ i -tou souřadnicí těchto podmínek, tj. $x = [x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}]$, $a = [a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k)}]$ apod.

Předpokládáme, že množina (souhrn) A přípustných podmínek je určena čísly $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(k)}, B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(k)}$ takto: je-li x podmínka, je x přípustná tehdy a jen tehdy, je-li

$$(3.1.1) \quad A^{(i)} \leq x^{(i)} \leq B^{(i)} \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, k.$$

Během pokusů budeme měnit podmínky přičítáním jistých čísel k jejich souřadnicím. Při tomto přičítání by mohlo někdy dojít k tomu, že by již výsledná souřadnice nebyla v předepsaném intervalu $\langle A^{(i)}, B^{(i)} \rangle$, čímž bychom dospěli k nepřipustné podmínce. V tomto případě modifikujeme součet tak, že jej položíme rovným $A^{(i)}$ případně $B^{(i)}$ podle toho, zda původní součet byl menší než $A^{(i)}$ nebo větší než $B^{(i)}$. Zavedeme-li pro toto sčítání symbol \oplus , je pro každou podmínku x , číslo $h^{(i)}$ a index $i = 1, 2, \dots, k$

$$(3.1.2) \quad x^{(i)} \oplus h^{(i)} = \begin{matrix} x^{(i)} + h^{(i)} \\ A^{(i)} \\ B^{(i)} \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} x^{(i)} + h^{(i)} \\ A^{(i)} \\ B^{(i)} \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} \text{je-li } x^{(i)} + h^{(i)} \\ \text{v intervalu } \langle A^{(i)}, B^{(i)} \rangle, \\ \text{vlevo od intervalu } \langle A^{(i)}, B^{(i)} \rangle, \\ \text{vpravo od intervalu } \langle A^{(i)}, B^{(i)} \rangle. \end{matrix}$$

Podobný význam má i znak \ominus , který definujeme vztahem

$$(3.1.3) \quad x^{(i)} \ominus h^{(i)} = x^{(i)} \oplus (-h^{(i)}).$$

Hledání optimální podmínky x (maximalisující $f(x)$) probíhá v cyklech, jež se dělí na kroky. V n -tém cyklu vycházíme od podmínky x_n a dospíváme k podmínce x_{n+1} , která je výchozí podmínkou pro $n + 1$ -vý cyklus. Přitom se n -tý cyklus dělí na kroky $1, 2, \dots, h_n$; v j -tém kroku odhadujeme funkční hodnotu $f(x_{n,j})$ pro podmínku $x_{n,j}$; získanou hodnotu značíme $y_{n,j}$. Prvých $k + 1$ kroků ($j = 0, 1, \dots, k$) je zkušebních a určuje se v nich směr, v němž bude změněna podmínka x_n . Další kroky jsou pracovní a jejich konečným výsledkem je určení x_{n+1} .

3.2. Příprava výchozích prvků. Zvolme kladná čísla $c^{(i)}, a^{(i)}$ menší než $\frac{1}{2}(A^{(i)} - B^{(i)})$ pro $i = 1, 2, \dots, k$, např.

$$(3.2.1) \quad c^{(i)} = \frac{1}{10} (A^{(i)} - B^{(i)}), \quad a^{(i)} = 2c^{(i)};$$

v jednotlivých cyklech pak budeme potřebovat hodnoty

$$(3.2.2) \quad \begin{aligned} c_n^{(i)} &= (-1)^{n+1} \frac{c^{(i)}}{\sqrt[4]{n}}, \\ a_n^{(i)} &= (-1)^{n+1} \frac{a^{(i)}}{\sqrt[4]{n^3}}, \end{aligned}$$

přičemž $|c_n^{(i)}|$ resp. $|a_n^{(i)}|$ nazýváme délkou zkušebního resp. pracovního kroku a je možné je snadno určit z hodnot tabulky 1. Konečně je třeba určit x_1 , výchozí podmínku pro aproximační proces. Nemí-li důvodů k jiné volbě, můžeme položit

$$(3.2.3) \quad x_1^{(i)} = \frac{1}{2}(A^{(i)} + B^{(i)}).$$

Tabulka 1

n	$\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$	n	$\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$
1	1	1	16	0,50	0,13
2	0,84	0,59	17	0,49	0,12
3	0,76	0,44	18	0,49	0,11
4	0,71	0,35	19	0,48	0,11
5	0,67	0,30	20	0,473	0,106
6	0,64	0,26	21	0,467	0,102
7	0,61	0,23	22	0,462	0,098
8	0,59	0,21	23	0,456	0,095
9	0,58	0,19	24	0,452	0,092
10	0,56	0,18	25	0,447	0,089
11	0,55	0,17	26	0,443	0,087
12	0,54	0,16	27	0,439	0,084
13	0,53	0,15	28	0,435	0,082
14	0,52	0,14	29	0,431	0,080
15	0,51	0,13	30	0,427	0,078

3.3. Určení směru v n -tém cyklu. Zjistíme odhady $y_{n,0}, y_{n,1}, \dots, y_{n,k}$ funkčních hodnot pro tyto podmínky:

$$(3.3.1) \quad \begin{aligned} x_{n,0} &= [x_n^{(1)} \ominus c_n^{(1)}, x_n^{(2)} \ominus c_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k-1)} \ominus c_n^{(k-1)}, x_n^{(k)} \ominus c_n^{(k)}], \\ x_{n,1} &= [x_n^{(1)} \oplus c_n^{(1)}, x_n^{(2)} \ominus c_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k-1)} \ominus c_n^{(k-1)}, x_n^{(k)} \ominus c_n^{(k)}], \\ x_{n,2} &= [x_n^{(1)} \ominus c_n^{(1)}, x_n^{(2)} \oplus c_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k-1)} \ominus c_n^{(k-1)}, x_n^{(k)} \ominus c_n^{(k)}], \\ &\vdots \\ x_{n,k-1} &= [x_n^{(1)} \ominus c_n^{(1)}, x_n^{(2)} \ominus c_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k-1)} \oplus c_n^{(k-1)}, x_n^{(k)} \ominus c_n^{(k)}], \\ x_{n,k} &= [x_n^{(1)} \ominus c_n^{(1)}, x_n^{(2)} \ominus c_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k-1)} \ominus c_n^{(k-1)}, x_n^{(k)} \oplus c_n^{(k)}]. \end{aligned}$$

Z hodnot $y_{n,i}$ určíme

$$(3.3.2) \quad A_n^{(i)} \begin{cases} + 1, & \text{je-li } y_{n,i} - y_{n,0} > 0, \\ 0, & \text{je-li } y_{n,i} - y_{n,0} = 0, \\ - 1, & \text{je-li } y_{n,i} - y_{n,0} < 0. \end{cases}$$

($A_n^{(i)} = 1$ resp. $= - 1$, značí, že směr změny i -té souřadnice bude shodný se znaménkem resp. opačný znaménku čísla $a_n^{(i)}$.)

3.4. Postup v určeném směru. Rozlišíme dvě modifikace $\alpha = 0, 1$.

Modifikace $\alpha = 0$:

$$(3.4.1) \quad x_{n+1}^{(i)} = x_n^{(i)} \oplus A_n^{(i)} a_n^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, k;$$

v tomto případě se neprovádí žádný pracovní krok a ihned se určí x_{n+1} .

Modifikace $\alpha = 1$:

Klademe pro $j = 1, 2, \dots$

$$(3.4.2) \quad x_{n,k+j}^{(i)} = x_n^{(i)} \oplus j A_n^{(i)} a_n^{(i)} \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, k, \\ j = 1, 2, \dots$$

(tj. např.

$$x_{n,k+3}^{(i)} = [x_n^{(1)} \oplus 3A_n^{(1)}a_n^{(1)}, x_n^{(2)} \oplus 3A_n^{(2)}a_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k)} \oplus 3A_n^{(k)}a_n^{(k)}])$$

a získáváme odhady $y_{n,j}$ hodnot $f(x_{n,j})$ pro $j = k + 1, k + 2, \dots$ tak dlouho, až získané odhady poprvé neprojeví vzestupnou tendenci, tj. až nastane jev

$$(3.4.3) \quad y_{n,1} < y_{n,2} < \dots < y_{n,h_n-1} \geq y_{n,h_n}.$$

Pak je postup v daném směru skončen a klademe

$$(3.4.3) \quad x_{n+1} = x_{n,h_n-1},$$

takže je $x_{n+1}^{(i)} = x_n^{(i)} + (h_n - 1) A_n^{(i)} a_n^{(i)}$ pro $i = 1, 2, \dots, k$.

4. VLASTNOSTI METODY

Za velmi obecných podmínek konverguje posloupnost x_1, x_2, \dots získaná aproximační metodou k podmínce x , v níž nabývá funkce f svého lokálního extrému.

Při praktické aplikaci ovšem neprovádíme nekonečně mnoho cyklů, avšak zkušenost ukazuje, že se hodnoty x_n blíží svým limitním hodnotám s rychlostí prakticky užitečnou.

Předpoklady, o nichž jsme se zmínili, vyžadují především, aby použité odhady funkčních hodnot byly získány z nezávislých experimentů a aby jejich nepřesnost nerostla v průběhu aproximace nade všechny meze. Pro podrobnější formulaci viz práci [4].

Jestliže má tedy funkce f jediný lokální extrém a je to maximum, konvergují x_n k podmínce, v němž funkce f tohoto maxima dosahuje.

Jestliže však má funkce f více lokálních maxim, není zaručeno, že metoda vybere největší z nich. Jestliže f je v nějaké oblasti konstantní, může aproximační metoda zůstat v této oblasti. Není přesně známo chování metody v okolí lokálního minima, avšak nebezpečí, že by metoda konvergovala k bodu lokálního minima, nepovažujeme za prakticky vážné.

Horší jsou potíže s větším počtem lokálních maxim, které nelze odstranit jinak, než systematickým odhadem funkčních hodnot $f(x)$ pro dosti hustou síť hodnot x (faktoriálním experimentem s velkým počtem hladin) nebo jiným postupem, známe-li

funkční tvar funkce f . Poslední předpoklad bude zřídka kdy splněn a první postup je velmi náročný na počet odhadovaných funkčních hodnot. Situace se zlepši, známe-li hodnotu funkce f v jejím absolutním maximu, neboť v tomto případě můžeme posoudit, zda je hodnota $f(x_n)$ blízká tomuto absolutnímu maximu. Je-li blízká, můžeme hledání optima skončit. Není-li blízká, ale vykazuje-li s rostoucím n rostoucí tendenci, pokračujeme dalšími cykly. Není-li blízká, avšak už se nemění, tj. domníváme-li se, že jsme se již přiblížili k lokálnímu maximu, jež však není absolutním maximem, můžeme zkusit dospět k absolutnímu maximu novou aplikací metody při radikální změně výchozí podmínky x_1 .

Výhodou aproximačních metod je, že nevdají, jsou-li měněné souřadnice $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(k)}$ ve vzájemné interakci. Tento případ je v praxi velmi častý a znemožňuje pak použití metod latinských a řeckolatinských čtverců, které jinak, tj. jsou-li interakce zanedbatelné, jsou velmi účinné. Oproti faktoriálním pokusům, které jsou také aplikovatelné při přítomnosti interakcí, má aproximační metoda výhodu ve snadnější interpretaci a v úspoře počtu pozorování, která je značná a rapidně roste při zvětšování počtu sledovaných proměnných. Zvolíme-li počet hladin roven 3 u každého z k faktorů sledovaných faktoriálním pokusem — a počet 3 hladin je nejmenší, při kterém je možno aspoň přibližně hledat optimum — pak zvýšení počtu sledovaných faktorů z k na $k + 1$ má za následek trojnásobné zvýšení celkového počtu pozorování. Proto se obvykle experimentátor chrání přibrání dalšího faktoru v úvahu, pokud má obavu, že tento faktor nemá vliv na studovanou vlastnost. Opomine-li ovšem v důsledku této obavy faktor, který má vliv, může to znamenat podstatné znehodnocení výsledku práce. Naproti tomu přibrání dalšího faktoru (proměnné) je výhodné, má-li vliv, a jestliže nemá vliv, zvýší při použití aproximačních metod počet pozorování nanejvýš na $(k + 2)/(k + 1)$ násobek. Nezatěžuje tedy toto přibrání dalšího faktoru experimentátora ani zdaleka tak jako u faktoriálních pokusů, což umožňuje sledovat aproximačními metodami velké množství proměnných a poskytuje naději podchytit všechny vlivy pro daný problém důležité.

5. PŘÍKLAD

Uvedeme výsledky umělého pokusu, který byl proveden jen pro ilustraci použité metody, a který nemá samostatného významu. Snažili jsme se najít maximální extinkci $f(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$ směsi roztoku kyseliny citronové, roztoku sekundárního fosforečnanu sodného a chloridu sodného měněním vlnové délky $x^{(1)}$, koncentrace $x^{(2)}$ kyseliny citronové a koncentrace $x^{(3)}$ chloridu sodného; extinkce byla měřena na Hilgerově fotometru. Zvolili jsme modifikaci $\alpha = 1$ (viz (3.4)). Přípustnými hodnotami pro každou z proměnných byla kladná čísla, odhadovalo se, že pro $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ bude optimum ležet po řadě v intervalech (4000, 5000), (0, 2), (2,5; 7,5). V souvislosti s tím jsme zvolili

$$(5.1) \quad \begin{array}{lll} x_1^{(1)} = 4\,500, & x_1^{(2)} = 1, & x_1^{(3)} = 5, \\ c^{(1)} = 100, & c^{(2)} = 0,2, & c^{(3)} = 0,5, \\ a^{(1)} = 200, & a^{(2)} = 0,4, & a^{(3)} = 1 \end{array}$$

a připravili jsme si předem tabulku několika $c_n^{(i)} = (-1)^{n+1} c^{(i)/\sqrt[n]{n}}$ a $a_n^{(i)} = [(-1)^{n+1} a^{(i)}/\sqrt[n]{n^3}]$ se zaokrouhlením, které umožňuje skutečné nastavení sledovaných proměnných. Výpočet těchto hodnot nám umožní tabulka 1.

Tabulka 2

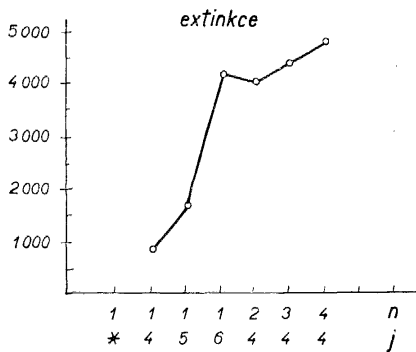
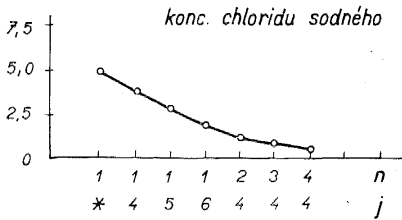
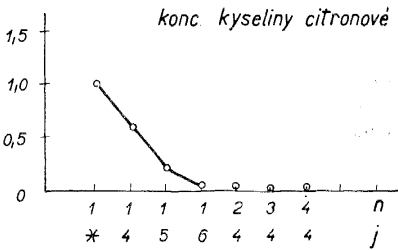
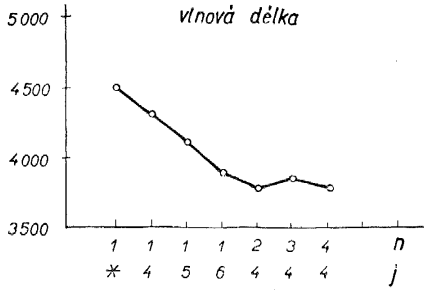
n	$c_n^{(1)}$	$c_n^{(2)}$	$c_n^{(3)}$	$a_n^{(1)}$	$a_n^{(2)}$	$a_n^{(3)}$
1	100	0,20	0,5	200	0,4	1
2	-80	-0,20	-0,4	-120	-0,25	-0,6
3	80	0,15	0,4	80	0,20	0,4
4	-70	-0,15	-0,35	-70	-0,14	-0,4
⋮						

V tabulce 3 je zachycen průběh prvních čtyř cyklů, v nichž jsme se již, jak lze soudit, přiblížili optimálním hodnotám proměnných čísla $x^{(1)} = 3800$, $x^{(2)} = 0$, $x^{(3)} = 0,6$. Sloupec 1 udává číslo cyklu, sloupec 2 číslo kroku, ve sloupci 3 hvězdička * značí, že v tomto řádku je zapsána výchozí podmínka cyklu (její prvá až třetí souřadnice je po řadě zapsána ve sl. 4–6). Dále jsou v řádku označeném * zapsány ve zbývajících sloupcích délky pracovních kroků. V dalších řádcích jsou již zapisovány ve sl. 4–6 souřadnice podmínek $x_{n,j}$ a ve sloupci 3 ještě vyznačujeme kroky, v nichž se určuje směr, písmenem S. V těchto řádcích jsou připsány ve sl. 8–10 hodnoty $\Delta_n^{(i)} a_n^{(i)}$. Podmínky $x_{n,j}$ pro $j > 3$ pak získáváme přičítáním těchto vyznačených hodnot $\Delta_n^{(i)} a_n^{(i)}$ k souřadnicím výchozí podmínky označené *. Ve sloupci 7 jsou naměřené extinkce pro příslušné podmínky, v řádcích s * extinkce buď uvedena není (pro $n = 1$), neboť metoda nevyžaduje její pozorování, nebo je uvedena v závorce (pro $n > 1$), neboť nebyla v tomto řádku zvlášť pozorována, ale jen pro přehlednost tabulky byla opsána z řádku předešlého.

Čtenář tedy snadno verifikuje zachování obecně předepsaného postupu. V řádku $n = 1$, * je opsána výchozí podmínka, jak jsme ji již stanovili a jsou přepsány hodnoty $a_1^{(i)}$ z tabulky 2. V následujícím řádku $n = 1$, $j = 0$ je uvedena podmínka $x_{1,0} = [x_1^{(1)} - c_1^{(1)}, x_1^{(2)} - c_1^{(2)}, x_1^{(3)} - c_1^{(3)}] = [4500 - 100, 1 - 0,2, 5 - 0,5] = [4400; 0,8; 4,5]$ s hodnotami $x_1^{(i)}$ z předchozího řádku a hodnotami $c_1^{(i)}$ z tab. 2. Pak jsou postupně v dalších řádcích uvedeny podmínky $x_{1,j}$, které vzniknou z $x_{1,0}$ nahrazením j -té souřadnice číslem $x_1^{(j)} + c_1^{(j)}$. Z hodnot extinkce $y_{1,i}$ napozorovaných za těchto podmínek je určeno $\Delta_1^{(i)}$ pro každé i . Protože je $y_{1,j} < y_{1,0}$ pro každé $j = 1, 2, 3$, je $\Delta_1^{(j)} = -1$ pro $j = 1, 2, 3$, což je v souladu se zapsanými hodnotami $a_1^{(1)} \Delta_1^{(1)} = -200$, $\Delta_1^{(2)} a_1^{(2)} = -0,4$, $\Delta_1^{(3)} a_1^{(3)} = -1$. V řádcích $n = 1$, $j = 4, 5, 6, 7$ jsou pak

Tabulka 3

n	j		Podmínka			Extinkce	$a_n^{(i)}$ pro *		
			$x_{n,j}$				$A_n^{(i)} a_n^{(i)}$ jinak		
							i = 1	2	3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		*	4500	1	5		200	0,4	1
	0	S	4400	0,8	4,5	313			
	1	S	4600	0,8	4,5	46	-200		
	2	S	4400	1,2	4,5	266		-0,4	
	3	S	4400	0,8	5,5	288			-1
	4		4300	0,6	4	819			
	5		4100	0,2	3	1 696			
	6		3900	0	2	4 140			
	7		3700	0	1	3 200			
	2		*	3900	0	2	(4 140)	-120	-0,25
0		S	3980	0,20	2,4	2 850			
1		S	3720	0,20	2,4	4 210	-120		
2		S	3980	0,00	2,4	3 240		-0,25	
3		S	3980	0,20	1,6	3 120			-0,60
4			3780	0	1,4	4 080			
5		3660	0	0,8	3 100				
3		*	3780	0	1,4	(4 080)	90	0,20	0,40
	0	S	3700	0	1,0	3 700			
	1	S	3860	0	1,0	4 350	90		
	2	S	3700	0,15	1,0	3 400		-0,20	
	3	S	3700	0	1,8	3 600			-0,40
	4		3870	0	1	4 400			
5		3960	0	0,6	3 980				
4		*	3870	0	1	(4 540)	-70	-0,14	-0,40
	0	S	3940	0,15	1,35	4 010			
	1	S	3800	0,15	1,35	4 700	-70		
	2	S	3940	0	1,35	4 150		-0,14	
	3	S	3940	0,15	0,65	4 120			-0,40
	4		3800	0	0,6	4 800			
5		3730	0	0,2	4 300				
5		*	3800	0	0,6	(4 800)			



Obr. 1. Grafické sledování průběhu aproximačního procesu.

v tomto směru měněny podmínky. Protože jen nezáporné hodnoty souřadnic jsou přípustné a je $x_1^{(2)} + 3A_1^{(2)}a_1^{(2)} = 1 - 3 \cdot 0,4 = -0,2$, je druhá souřadnice podmínek $x_{1,6}$ a $x_{1,7}$ rovna 0. Podmínkou $x_{1,7}$ končí postup ve zvoleném směru, neboť v tomto kroku nastal pokles v měřených extinkcích. Předposlední podmínka $x_{1,6}$ je výchozí podmínkou druhého cyklu a data z tohoto řádku jsou přepsána do dalšího řádku $n = 2$, *. Závorkou kolem extinkce je naznačeno, že se nejedná o další nezávislé měření a do sloupců 8–10 jsme si připravili hodnoty $a_2^{(i)}$ převzaté z tabulky 2.

V dalším řádku je $j = 0$. Prvá souřadnice podmínky $y_0^{(2)}$ je $x_1^{(2)} - c_1^{(2)} = 3900 - (-80) = 3980$. Určení ostatních souřadnic probíhá analogicky. Podle naměřených extinkcí určíme tentokrát $A_i^{(2)} = 1$ a tak jsou opět směry změn jednotlivých souřadnic záporné (proti předešlému cyklu se změnila pouze délka pracovního kroku). V tomto cyklu přinese postup zvýšení extinkce jen v prvním kroku při podmínce $x_{2,4}$, která je tedy výchozí podmínkou pro další cyklus, v pořadí třetí. Podobně se postupuje v dalších cyklech. Při podmínce $x^{(1)} = 3800$, $x^{(2)} = 0$, $x^{(3)} = 0,6$ je pak dosaženo extinkce 4800. Při posuzování otázky, kdy je vhodné skončit aproximační proces, může nám pomoci grafické znázornění.

6. GRAFICKÉ ZNÁZORNĚNÍ PRŮBĚHU APROXIMAČNÍHO PROCESU

V grafu v obr. 1 jsou vyneseny souřadnice měněných podmínek a příslušné extinkce tak, jak byly pořadě napozorovány v pracovních krocích každého cyklu s výjimkou poslední podmínky cyklu, která již přináší zhoršení.

Z grafu vidíme klesající tendenci druhé a třetí souřadnice, kdežto optimální hodnota vlnové délky leží v blízkosti čísla 3800.

7. MOŽNÁ MODIFIKACE POSTUPU

Jsmo-li již blízko optimálních podmínek, může se stát, že po každém určením směru jen jeden krok přináší zlepšení. Pak je možné přejít na modifikaci $\alpha = 0$, tj. provádět vždy jen jeden pracovní krok bez zkoušení, zda by další nepřinesly zlepšení a po tomto jednom kroku začít hned další cyklus. V uvažovaném příkladu by takovýto postup mohl přinést zlepšení již od druhého cyklu počínaje.

8. SUBJEKTIVNÍ ZÁSAHY DO PROCESU

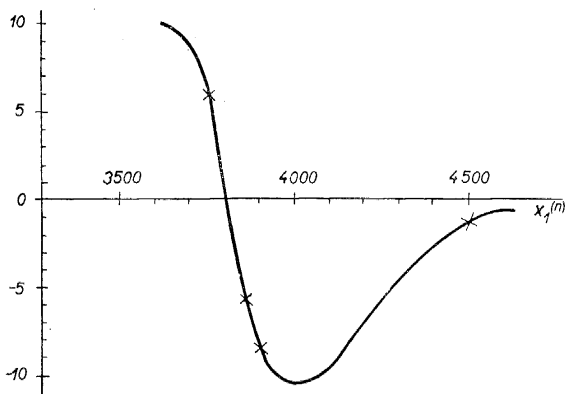
Obecnost aproximační metody působí, že není schopna vždy dost dobře reagovat na všechnu informaci z pokusů získanou. Experimentátor může zkoušet dosáhnout rychlejší aproximace subjektivním zásahem, např. změnou délky zkušebního nebo pracovního kroku pro jednotlivé souřadnice, nebo radikální změnou souřadnice, mění-li se stále, ale příliš pomalu, v určitém směru (např. změnou koncentrace chloridu na 0 v uvažovaném příkladu). Pro přesnější alokaci optima ke konci procesu nebo průběhem celého procesu, nejsou-li přítomny interakce, může pomoci grafický záznam odhadu derivací sledované funkce, které získáváme průběhem procesu.

9. ODHADY DERIVACÍ FUNKCE f

Podíl $[y_{n,i} - y_{n,0}]/[2c_n^{(i)}]$ lze považovat za odhad parciální derivace funkce f (pokud tato derivace existuje) v bodě (podmínce) x_n . Říkáme, že sledované souřadnice nejsou v interakci, jestliže tato parciální derivace závisí jen od i -té souřadnice $x_n^{(i)}$. Grafické vynesení těchto odhadů nám umožní někdy odhadnout, jak blízko jsme již optimální hodnotě souřadnice.

Jestliže předpoklad nepřítomnosti interakcí není splněn, projeví se to obvykle tím, že získané odhady derivací nelze proložit rozumnou křivkou.

Pro uvažovaný příklad dostáváme pro hodnoty 4500,



Obr. 2. Závislost $(y_{n,1} - y_{n,0}) / (2c_n^{(1)})$ na $x_1^{(n)}$.

3900, 3780, 3870 vlnové délky po řadě tyto odhady derivace podle této proměnné:

$$\frac{46 - 313}{200} = -1,34, \quad \frac{4210 - 2850}{-160} = -8,50,$$

$$\frac{4350 - 3400}{160} = 5,94, \quad \frac{4700 - 4010}{-120} = -5,75,$$

kteří jsme též vynesli do grafu obr. 2.

Při interpretaci takového grafu je třeba ovšem značné opatrnosti a budeme činit závěry obvykle z většího počtu bodů, než které jsme získali v našich 4 cyklech. Na druhé straně nám však nezáleží na přesném vystižení tvaru této závislosti, ale pouze na odhadu, ve které oblasti je derivace kladná a kde je záporná.

10. POUŽITÍ APROXIMAČNÍ METODY PRO ZLEPŠENÍ VÝROBNÍHO PROCESU

Při hledání optimálních podmínek v laboratoři půjde velmi často o to, určit optimální podmínky pro nějaký výrobní proces. Odhad těchto optimálních podmínek, získaný v laboratoři (případně poloprovozu) se může od skutečného optima lišit. Chyba je způsobena jednak omezeným časem i prostředky na laboratorní a poloprovozní výzkum, jednak rozdíly mezi laboratorním modelem a skutečným výrobním procesem. Přitom velikost zejména druhé z obou chyb je velmi těžké odhadnout. Na druhé straně výrobní proces je sám sobě dokonalým modelem a doba, po kterou lze z jeho průběhu čerpat zkušenosti, je vzhledem k době určené laboratornímu výzkumu prakticky neomezená.

To vybízí k použití aproximační metody přímo k zlepšování výrobních procesů, v němž se vyjde od podmínek stanovených předběžným výzkumem laboratorním a poloprovozním a v němž se blížíme k optimálním podmínkám procesu. Přitom je možné vždy předem stanovit obor přípustných podmínek, z něhož aproximační metoda nevykročí. Dále je možné zvolit takové délky počátečních kroků zkušebních a pracovních, aby změny v podmínkách, které bude aproximační metoda požadovat, aby mohla rozhodnout o výhodném směru změn, nebyly z praktického hlediska podstatné. Použití aproximačních metod pro optimalizaci výrobního procesu je tím lákavější, že tu vzhledem k dlouhé době možného procesu aproximace mají přímý význam limitní vlastnosti metody.

Předpokládáme tedy, že

(10.1) Hledáme optimální podmínku $x = [x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}]$ mezi přípustnými podmínkami tj. takovými, pro něž $A_i \leq x^{(i)} \leq B_i$. (Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že měřítka pro jednotlivé souřadnice zvolena tak, že $A_i = 0$, $B_i = 1$; takže podmínka x je přípustná, je-li $0 \leq x^{(i)} \leq 1$ pro všechna i .) Obor přípustných podmínek byl zvolen již tak, že v něm zásadně můžeme zvolit jakoukoliv podmínku, aniž dojde k nepřijatelným důsledkům (havárii, vyhasnutí reakce apod.).

(10.2) Optimalizovaný systém vysílá údaj o kvalitě procesu a to buď spojitě nebo, jedná-li se o šaržový proces, na konci každé šarže.

(10.3) Lze určit dobu Δ s touto vlastností. Jestliže jsou volitelné podmínky neměnné a rovny x v čase $(t_0 - \Delta, t)$ pro $t > t_0$, pak kvalita procesu v intervalu (t_0, t) nezávisí na stavu procesu v době před okamžikem $t_0 - \Delta$ a její střední hodnota $f(x)$ je závislá jen na x .

V předchozí podmínce bychom mohli nazvat Δ dobou odeznění nebo maximální paměti daného systému. Předpoklad (10.3) dále znamená, že při neměnné podmínce x se neuplatňují žádné jiné vlivy kromě náhodných. V případě dalších změn v nekontrolovaných podmínkách by střední hodnota kvality v intervalu (t_0, t) závisela nejen od x , ale i od t_0 a t a mohli bychom ji psát ve tvaru $f_{t_0,t}(x)$. K použití aproximačních metod v případě, kdy platí podmínka (10.3), zeslabená však zavedením $f_{t_0,t}(x)$ místo $f(x)$, se vrátíme později v odst. 12.

Při splnění podmínek (10.1) – (10.3) bude způsob použití aproximační metody patrný, jakmile provedeme rozdělení průběhu procesu na časové intervaly odpovídající krokům aproximační metody.

U šaržové výroby mohou aproximační kroky být realizovány jednotlivými šaržemi tehdy, jestliže se průběhy v časově sousedních šaržích vzájemně neovlivňují, přičemž kvalita jednotlivé šarže je odhadem y střední kvality $f(x)$ příslušné zvolené podmínce x . (Nejsou-li šarže vzájemně nezávislé, je třeba mezi jednotlivými kroky vynechávat tolik šarží, až je nezávislost výsledků v jednotlivých krocích zaručena: zřejmě stačí, aby mezi jednotlivými kroky byla časová vzdálenost aspoň Δ .) U spojitě výroby je třeba rozdělení na kroky uměle provést a k tomu zvolit dobu δ , po kterou sledujeme kvalitu procesu v každém kroku. Před započítáním sledování kvality musí být již po dobu aspoň Δ nastavena příslušná podmínka. Označíme-li tedy $t_{n,j}$ začátek j -tého kroku n -tého cyklu, jestliže v čase $t_{n,j} + \varepsilon$ je již nastavena podmínka $x_{n,j}$ budeme sledovat kvalitu v časovém intervalu $\langle t_{n,j} + \varepsilon_1, t_{n,j} + \varepsilon_2 \rangle$, kde $\varepsilon_1 = \varepsilon + \Delta$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \delta$. Kvalitu $y_{n,j}$ pak počítáme jako integrál z kvality $y(t)$ spojitě měřené v tomto intervalu, tedy

$$(10.4) \quad y_{n,j} = \int_{t_{n,j} + \varepsilon_1}^{t_{n,j} + \varepsilon_2} y(t) dt.$$

Další krok nebo další cyklus začíná v době $t_{n,j+1} > t_{n,j} + \varepsilon_2$.

Počet kroků, které lze vykonat v daném časovém intervalu, a tím i do značné míry rychlost, s níž aproximační metoda hledá optimální podmínku, závisí především na době Δ . Tak při praktických aplikacích se může doba trvání jednoho kroku řádově měnit od několika hodin do zlomků vteřiny.

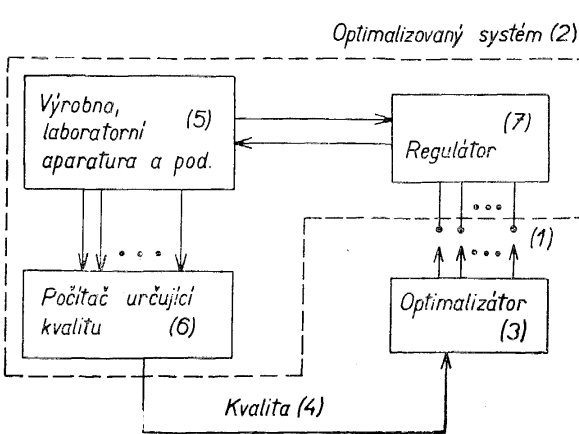
Při malých Δ by bylo nevhodné provádět změnu podmínek ručním nastavováním pro ztrátu rychlosti. Přístroj, který by podle aproximační metody takové změny prováděl automaticky, a který můžeme nazvat automatický optimalizátor, lze vzhledem k jednoduchosti aproximační metody snadno konstruovat a jeho použití by bylo zřejmě výhodné i tam, kde by v zásadě mohl provádět – při velkém Δ – potřebné úkony i člověk.

11. AUTOMATICKÝ OPTIMALIZÁTOR

Podle závěru předchozího odstavce lze nejjednodušeji zobrazit zapojení optimalizátoru, který spolu s optimalizovanou soustavou tvoří samoadaptivní systém, ve schématu obr. 3.

Zapojení optimalizátoru předpokládá, že optimalizovaný systém je již na značné úrovni automatizace (je třeba automatické sledování kvality a nastavování a udržování podmínek). Typickým příkladem bude celek tvořený výrobním procesem a regulátorem. Regulátor sám

může být již případně extrémním regulátorem, využívajícím některých specifických vlastností výrobního procesu a optimalizátor může volit podmínky ne pouze přímo související s výrobním procesem, ale i podmínky určující činnost regulátoru. V některých případech nebude možné přímo měřit kvalitu, ale bude nutné ji zvláštním počítačem počítat.



Obr. 4. Podrobnější schéma zapojení automat. optimalizátoru.

(Kdyby však určení této kvality vyžadovalo komplikovanějších úkonů, bylo by možné funkci tohoto počítače spojit s funkcí optimalizátoru a obě vykonávat universálním samočinným počítačem.) Podrobnější a speciálnější schéma zapojení optimalizátoru je uvedeno v obr. 4.

12. OPTIMALIZACE V PŘÍPADĚ MĚNÍCÍCH SE NEKONTROLOVANÝCH PODMÍNEK

Při striktním splnění předpokladu (10.3) by se podmínky měněné optimalizátorem po jisté době prakticky ustálily na limitní hodnotě. V takovém případě by bylo možné optimalizátor odpojit a použít jinde.

V praxi může však docházet k porušení předpokladu (10.3) tím, že se nepodaří udržet ostatní podmínky kromě optimalizátorem kontrolovaných, neměnné. Pak

závislost f kvality procesu na podmínce nastavené optimalizátorem se mění s časem. Jestliže rychlost, s jakou se blíží aproximační metoda k optimálním podmínkám, je větší než rychlost, s níž se poloha optima mění vlivem změn nekontrolovaných podmínek, lze s úspěchem aproximační metody užít. V takovém případě může být dokonce praktický důsledek aproximační metody závažnější, i když po teoretické stránce se nejedná o tak přímou a jednoduchou aplikaci, jako při splnění podmínky (10.3).

Při použití aproximační metody při měnících se nekontrolovaných podmínkách je však třeba si připomenout jednu vlastnost této metody. Víme z odst. 3, že se průběhem aproximace zmenšují délky jak zkušebního tak pracovního kroku, což znamená v podstatě zpodrobňování studia maximalizované funkce. Jestliže však dochází k změnám této funkce a tedy ke změnám optimální podmínky, vedlo by toto zjemnění kroků posléze k příliš pomalé aproximaci optimální podmínky. Proto by bylo třeba vždy, jakmile se aproximace příliš vzdálí od skutečně optimální podmínky, změnit stav aproximační metody na počáteční, tj. začít znovu s původní délkou kroků. Technicky provést takovéto přepnutí není žádný problém. Obtížnější však je určit, kdy k takovému přepnutí má dojít. Řešit tuto otázku je možné různě podle konkrétních situací, které se liší zejména podle toho, zda a) lze určit všechny podstatné změny v nekontrolovaných podmínkách a zda b) je za každé situace známá maximální dosažitelná kvalita. Je-li splněn předpoklad a), můžeme přepínat na počáteční stav při podstatné změně nekontrolovaných podmínek. Při splnění předpokladu b) můžeme přepínat vždy, když odchylka maximální kvality od dosažené kvality překročí určitou mez. Není-li splněn ani předpoklad a) ani b), lze někdy přepínat v pravidelných časových intervalech, a konečně by bylo možné soudit na změnu nekontrolovaných podmínek z nenáhodného poklesu kvality (poslední způsob však není ještě konkrétně propracován).

Další možností — při častých změnách nekontrolovaných podmínek — je použití modifikovaného postupu, v němž se hodnoty $a_n^{(i)}$, $c_n^{(i)}$ nahradí konstantami. Aproximační metoda tím ztratí své limitní vlastnosti, avšak za dané situace bude rozdíl mezi takto upravenou metodou a původní jenom malý.

Protože rychlost konvergence k optimální podmínce závisí na neznámém tvaru funkce f , nelze předem říci, kdy bude tato rychlost větší než rychlost změn nekontrolovaných podmínek. Lze udat jen dolní mez časového období, v němž je optimalizátor schopen vykonat užitečnou změnu v optimalizované podmínce: je to 1 cyklus. Na druhé straně se zdá, že v mnohých případech po 4–10 cyklech povede aproximační metoda k podmínce velmi blízké optimální. Přitom cyklus při modifikace $\alpha = 0$ má $k + 1$ kroků, tj. trvá zhruba $(\Delta + \delta)(k + 1)$ a při $\delta = \Delta$ trvá $2(k + 1)\Delta$, kde Δ je doba odeznění optimalizovaného systému.

Při rychlosti změn nekontrolovaných podmínek větší než je rychlost aproximace, bude nasazení optimalizátoru málo nebo vůbec účelné. Avšak nebude ani škodlivé, pokud aspoň nepřipustíme existenci speciálního ďábla, který by měnil nekontrolované podmínky tak, že směr, který byl výhodný při zkoušení směru, povede k poklesu kvality při následujícím pracovním kroku.

13. POZNÁMKY

Poznámka 1. Vliv nedokonalosti regulátoru. V konkrétních případech se může stát, že regulátor neplní přesně funkci, kterou od něj požadujeme. Hodnoty odporů např. mohou být označeny teplotami, které mají určovat, skutečné teploty se však mohou od vyznačených a také i od měřených lišit. Nedokonalosti tohoto druhu nejsou však podstatné pro funkci automatického optimalizátoru, který mění hodnoty k volitelných odporů (nebo jiných parametrů) regulátoru tak, aby dosáhl maxima kvality daného systému skládajícího se z výroby a regulátoru. Jiný regulátor znamená prostě též jiný optimalizovaný systém.

Poznámka 2. Chyby v měření kvality. Protože údaje o kvalitě se používá pouze k její maximalizaci, nevadí, je-li údaj o kvalitě zaměněn údajem o nějaké neklesající funkci této kvality. Navíc může být toto měření kvality (nebo její neklesající funkce) zatíženo náhodnými chybami.

Poznámka 3. Specifikace výstupu automatického optimalizátoru. Vhodnou její volbou můžeme dosáhnout obecné použitelnosti, zejména vzhledem k tomu, že je možné konstruovat optimalizátor tak, aby bylo snadné měnit počet k optimalizovaných souřadnic. Jednou z možností je realizovat výstup optimalizátoru k měnitelnými odpory s hodnotami v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, na které se zapojí regulátor optimalizované soustavy.

Poznámka 4. Vliv počtu optimalizovaných souřadnic. Zvětšení počtu optimalizovaných souřadnic z k na $k + 1$ se v nejhorším případě sníží rychlost růstu optimalizované kvality na $(k + 1)/(k + 2)$ násobek a náklady na realizaci optimalizátoru vzrostou méně než na $(k + 1)/k$ násobek.

14. PŘÍKLADY

Příklad 1. Výrobna je 4etážový kontaktní kotel pro oxidaci SO_2 na SO_3 . Z výroby do regulátoru se předávají signály o teplotě na vstupu do jednotlivých etáží, regulátor vysílá zpět signály, udržující tyto teploty na úrovních T_1, T_2, T_3, T_4 po řadě pro prvou až čtvrtou etáž. Pro nastavení těchto čtyř norem T_1, T_2, T_3, T_4 jsou v regulátoru čtyři volitelné odpory $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}$, jež mohou nabývat hodnot z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Předpokládáme, že každým hodnotám těchto odporů odpovídají teploty, při nichž reakce skutečně probíhá (tj. že teploty nejsou menší než teploty zážehu). Z výroby jde do automatického optimalizátoru údaj o konverzi (% zreagovaného SO_2); automatický optimalizátor mění postupně hodnoty odporů $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}$ tak, že se blíží optimálním, to jest k těm, jež dávají maximální kvalitu (konverzi).

Podmínka (10.3) pro možnost nasazení optimalizátoru bude vyžadovat, aby zejména změny v % SO_2 ve vstupním plynu, které, jak známo, mohou silně ovlivňovat

jak konečnou konversi tak polohu optimálních teplot, byly buď 1. regulačním zařízením potlačeny nebo 2. byly náhodného charakteru, přičemž by se musilo volit Δ tak, aby náhodné výchylky % SO₂ v okamžicích časově od sebe o Δ vzdálených byly nezávislé nebo 3. byly rázu uvedeného v bodu 2, navíc však provázeny systematickými změnami v % SO₂, ke kterým by však docházelo pomalu relativně k rychlosti aproximace.

Příklad 2. Uvažujme situaci z předchozího příkladu a s těmito změnami. Z výroby se do regulátoru navíc předává signál o % SO₂ ve vstupním plynu a úkolem regulátoru je udržovat teploty na vstupech do etáží na hodnotě $T_i^{(0)} + \kappa_i \cdot \% \text{SO}_2$ pro i -tou etáž. Konstanty $T_i^{(0)}$, κ_i lze volit změnami 8 odporů v regulátoru a úkolem automatického optimalizátoru je jejich optimalizace.

Podmínky pro nasazení optimalizátoru jsou obdobné jako v příkladu předchozím.

Příklad 3. Jestliže v příkladu 1 je též regulováno % SO₂ ve vstupním plynu a úroveň, na němž je udržováno, je jednou z volitelných podmínek, nebude kvalita procesu již udávána konverzí, protože měněním % SO₂ se mění nejen technologické, ale i ekonomické podmínky provozu. V tomto případě je třeba přesně určit, co považujeme za kvalitu, a použít počítače tuto kvalitu počítajícího.

Další příklady použité optimalizátoru lze najít v pracích [1], [10].

15. JINÉ APROXIMAČNÍ METODY

Metoda popisovaná v této práci vznikla modifikací metody navržené Juliem R. Blumem [3] v roce 1954. Pro porovnání obou metod odkazujeme k práci [4], kde jsou diskutovány i ostatní stochastické aproximační metody. Zatím však, pokud je mi známo, nebylo navrženo použití těchto metod k automatické optimalizaci. Na druhé straně byla již navržena celá řada optimalizátorů. Některé z nich jsou určeny pro řešení speciálnějších úloh, než jsme uvažovali zde, a předpokládají značné znalosti o optimalizovaném systému a jeho dynamických vlastnostech (viz např. [2]). Jiné práce uvažují o použití optimalizátoru pro zhruba stejný cíl jako my²⁾, avšak necitují známou již práci Blumovu [3] z roku 1954 v tomto směru a neporovnávají jí navrženou metodu s metodou, jež určuje strategii jejich optimalizátoru. Provedeme-li takové porovnání, lze říci (aspoň pokud lze z publikovaných výsledků soudit), že vlastností stochastických aproximačních metod jsou podstatně lépe známy, než vlastností strategií dosud navrhovaných optimalizátorů. Podrobněji si všimneme nyní tří z nich.

Práce [1] je velmi zajímavá tím, že uvádí již existující instalaci optimalizátoru Opcion a referuje o druhé zamýšlené instalaci. Z článku není patrné, jaká je strategie Opcionu, avšak v souvislosti s touto strategií cituje článek práce [8], [9] a [11]. Z nich poslední je u nás zatím nepřístupná, druhé dvě předpokládají, že pozorování

²⁾ S malým rozdílem, o němž se ještě zmíníme.

maximalizované veličiny není zatíženo náhodnými chybami. Také (proto?) se pro použití Opconu požaduje (viz [1]), aby náhodná kolísání v kvalitě byla malá vzhledem ke změnám způsobeným změnami optimalizovaných podmínek. Není zřejmé, zda jde o předpoklad zásadní, nebo zda jde jen o praktický požadavek usilující o to, aby optimalizační proces probíhal dostatečně rychle.

V článku [12] jsou udány 4 zajímavé metody, na jejichž základě byl konstruován optimalizátor na universitě ve Swansea; podle osobního sdělení autora nebyly jejich vlastnosti matematicky studovány, avšak ověřují se empiricky.

V roce 1958 navrhnul A. A. FELDBAUM [5] optimalizátor se strategií, jež vznikla diferenční úpravou metody největšího spádu, případně metody gradientu; konstrukce optimalizátoru byla popsána v pracích [15] a [14]. Vlastnosti jsou studovány v pracích [6] a [7] za předpokladu speciálního tvaru sledované funkce. Feldbaumova metoda je některými svými vlastnostmi podobná Blumově (s tím rozdílem, že se nezmenšuje délka pracovního a zkušebního kroku průběhem procesu) a má podobné nevýhody jako ona (viz [4]), jestliže derivace maximalizované funkce může být malá v bodech vzdálených od bodu maxima a velká v jeho blízkosti, což bývá v praxi případ častý. Další vlastnost Feldbaumova návrhu, podle níž se činnost optimalizátoru zastavuje, jakmile jsou hodnoty derivací menší než předem dané kladné číslo, vede u funkcí výše uvedeného typu k zastavení optimalizátoru, jakmile se dostane dosti daleko od bodu maxima; to je zřetelný nedostatek.

Zmíníme se ještě, čím se liší stanovisko většiny prací jednajících o použití optimalizátoru od našeho. Tyto práce uvádějí jako jednu z podmínek nasazení optimalizátoru existenci změn nekontrolovaných podmínek, tj. porušení našeho předpokladu (10.3). Souvisí to s větší potřebou optimalizátoru v tomto případě, než v případě platnosti předpokladu (10.3) a s představou, že nemění-li se poloha optima, lze optimální podmínku určit předem (v laboratoři, výpočtem apod.). Naše stanovisko je důsledkem toho, že poslední představu považujeme za mylnou, neboť tyto laboratorní a výpočtové metody jsou metodami modelování a chybami modelování jsou zatíženy. Přitom a při ne zcela přesné znalosti uvažovaného procesu mohou být tyto chyby značné.

Na druhé straně soudíme, jak jsme již uvedli v odst. 10, že efekt úspěšného použití optimalizátoru bude tím větší, čím větší bude vliv změn nekontrolovaných podmínek. Avšak tím nesnadnější bude i docílení tohoto úspěšného efektu. Úspěšné použití optimalizátoru bude asi nemožné, budou-li změny nekontrolovaných podmínek probíhat stejně rychle nebo rychleji, než jak se budou projevovat vlivem na kvalitu. Takovéto úlohy nemohou optimalizátory našeho typu řešit. Řešení může přinést lepší zvládnutí procesu s eliminací změn nekontrolovaných podmínek nebo aspoň jejich okamžitou registrací, která by umožnila použít extrémálního regulátoru, využívajícího znalosti dynamických vlastností procesu s případným připojením optimalizátoru k optimalizaci extrémálního regulátoru. To je závěr, ke kterému dospívá také A. JA. LERNER [10].

Literatura

- [1] *D. H. Archer*: An optimising control for the chemical process industries, *British Chemical Engineering*, February 1960, 88—94.
- [2] *Richard Bellman, Robert Kalaba*: On adaptive control processes, *IRE Trans AC-4* (1959), No 2, 1—9.
- [3] *J. R. Blum*: Multidimensional stochastic approximation methods, *Annals of Mathematical Statistic*, 25 (1954), 382—386.
- [4] *Václav Fabian*: Stochastic approximation methods, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 10 (85) (1960), 123—159.
- [5] *A. A. Фельдбаум*: Автоматический оптимизатор, *Автоматика и телемеханика*, 19 (1958), 731—743.
- [6] *A. A. Фельдбаум*: Установившийся процесс в простейшей дискретной экстремальной системе при наличии случайных помех, *Автоматика и телемеханика*, 20 (1959), 1056—1070.
- [7] *A. A. Фельдбаум*: Статистическая теория градиентных систем автоматической оптимизации при квадратичной характеристике объекта, *Автоматика и телемеханика*, 21 (1960), 167—179.
- [8] *J. Kiefer*: Sequential minimax search for a maximum, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4 (1953), 205—6.
- [9] *J. Kiefer*: Optimum sequential search and approximation methods under minimum assumptions, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 5 (1957), 105—136.
- [10] *A. Я. Лернер*: Применение самонастраивающихся систем автоматического управления, реф., Первый междунар. конгресс ИФАК по автоматическому управлению, Москва, 1960.
- [11] *R. I. Van Nice, A. F. Kanpe Jr.*: Paper presented at A. S. M. E. Instruments and Regulators Division Conference on Automatic Optimisation, University of Delaware, April, 1958.
- [12] *N. W. Rees*: Self-adaptive control systems, *British Chemical Engineering*, February 1960, 106—108.
- [13] *H. Robbins, S. Monro*: A stochastic approximation method, *Annals of Mathematical Statistics*, 22 (1951), 400—407.
- [14] *Р. И. Стаховский*: Двухканальный автоматический оптимизатор, *Автоматика и телемеханика*, 19 (1958), 744—756.
- [15] *Р. И. Стаховский*: Многоканальный автоматический оптимизатор для решения вариационных задач, *Автоматика и телемеханика*, 20 (1959), 1472—1482.

Резюме

СТОХАСТИЧЕСКИЙ АППРОКСИМАЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ УСТАНОВЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ В ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ РАБОТЕ И В САМОАДАПТИВНЫХ СИСТЕМАХ

ВАЦЛАВ ФАБИАН (Václav Fabian)

В работе изложен один многомерный стохастический аппроксимационный метод, и рассматриваются — и с примерами — его приложения как метода экспериментальных исследований и как стратегии оптимизатора в самоадаптивных системах.

Описанный метод был предложен и разработан автором в работе [4]; он заключается в построении последовательности x_1, x_2, \dots , сходящейся к точке x , в которой данная функция f достигает своего локального максимума. Для построения этой последовательности не надо знать аналитические свойства функции f , но для каждого x из области определения функции надо иметь возможность получить значение функции $f(x)$ и его оценку.

Сходимость последовательности x_1, x_2, \dots к точке локального максимума функции f доказана при значительно общих предположениях в работе [4]. Предполагается, что областью определения функции f является множество точек $x = [x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}]$, удовлетворяющих условию $A^{(i)} \leq x^{(i)} \leq B^{(i)}$ для $i = 1, 2, \dots, k$.

Построение последовательности x_1, x_2, \dots Выберем точки c, a с положительными координатами $c^{(i)}, a^{(i)}$, меньшими чем $\frac{1}{2}(B^{(i)} - A^{(i)})$, и точку x_1 в области определения функции f . (Для выбора можем, например, использовать соотношения (3.2.1) и (3.2.3).) Затем определим c_n и a_n соотношением (3.2.2).

Предположим, что уже определены x_1, x_2, \dots, x_n . Определим оценки $y_{n,j}$ значений функции $f(x_{n,j})$ ($j = 0, 1, \dots, k$) для точек $x_{n,j}$, определенных соотношениями (3.3.1), (3.1.2), (3.1.3). Определим числа $A_n^{(i)}$ по (3.3.2).

Смотря по тому, пользуемся ли модификацией $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$ аппроксимационного метода:

$\alpha = 0$: x_{n+1} определено соотношением (3.4.1);

$\alpha = 1$: Определим оценки $y_{n,k+j}$ значений функции $f(x_{n,k+j})$ для $x_{n,k+j}$, определенных соотношением (3.4.2), постепенно для $j = 1, 2, \dots$, пока полученные оценки проявят тенденции возрастать, т. е. пока не настанет явление (3.4.3). Тогда x_{n+1} определим соотношением (3.4.4).

Практический опыт. В статье [4] изучался метод при условии $A^{(i)} = -\infty$, $B^{(i)} = +\infty$; в приложениях можем пользоваться только конечной подпоследовательностью последовательности x_1, x_2, \dots . Опыт однако показывает, что значения x_n сходятся к своему пределу с практически полезной скоростью.

В примере, приведенном в тексте, была искомым максимальной экстинкция $f(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$ смеси раствора лимонной кислоты, раствора Na_2HPO_4 и NaCl ; производились измерения длины волны $x^{(1)}$, концентрации $x^{(2)}$ лимонной кислоты и концентрации $x^{(3)}$ NaCl . Была выбрана модификация $\alpha = 1$, далее было положено $A^{(i)} = 0$, $B^{(i)} = +\infty$. Начальная точка x_1 и точки c, a даны соотношением (5.1), значения c_n и a_n размещены в таблице 2, а в таблице 3 описан ход аппроксимации; в строчках, в которых в столбце 3 имеется *, приведены значения x_n и в скобках значения оценок $f(x_n)$, которые наблюдались в предыдущем этапе опыта. Графически ход опыта изображен на рис. 1.

На этом примере проиллюстрировано применение аппроксимационного метода в исследовательской работе в лаборатории; другие возможности приложений дают численные проблемы и самоадаптивные системы.

Использование аппроксимационного метода как стратегии оптимизатора.

Если $f(x)$ означает качество оптимизированной системы при произвольно выбираемом условии $x = [x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}]$, то при помощи аппроксимационного метода может это условие менять и приближаться к оптимальному условию, при котором качество максимально. Если оптимизированная система находится на достаточно высоком уровне автоматизации, то изменения условия x может производить автоматический оптимизатор, принимающий от оптимизированной системы сигналы о качестве. На рис. 3 и 4 изображены схемы включения оптимизатора и оптимизированной системы; на рис. 4 имеется типичный пример оптимизированной системы; на схемах обозначено: (1) — данные о выбираемых условиях; (2) — оптимизированная система; (3) — оптимизатор; (4) — сигнал о качестве; (5) — лабораторная установка; (6) — счетчик, определяющий качество (если можно качество измерять непосредственно, то счетчик отпадает); (7) — регулирующее устройство, поддерживающее выбранные условия на уровне, предназначенном оптимизатором.

Способ, каким оптимизатор пользуется аппроксимационным методом, станет наглядным, если процесс разделим на промежутки времени, соответствующие шагам аппроксимационного метода. Например, в случае периодического производственного процесса, когда протекание отдельных период не оказывает влияния друг на друга, могут шаги аппроксимационного метода соответствовать отдельным периодам. В случае непрерывно протекающего процесса надо разделение на отдельные шаги произвести искусственно. Установим числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Если аппроксимационный метод требует оценку $y_{n,j}$ качества $x_{n,j}$, поставим условие $x_{n,j}$ и $y_{n,j}$ определим соотношением (10.4), где $t_{n,j}$ — начало шага, в течение которого наблюдается условие $x_{n,j}$, $y(t)$ — измеренное качество во времени t . Предполагаем, что качество во времени $t > t_{n,j} + \varepsilon_1$ не зависит от протекания процесса во времени $t' < t_{n,j}$.

Затем в работе производится анализ влияния меняющихся неконтролируемых условий и влияния несовершенства регулятора, приводятся примеры оптимизированных систем, описываются некоторые другие аппроксимационные методы и методы, предлагаемые в качестве стратегии оптимизатора; кажется, что свойства этих методов гораздо менее известны, чем свойства изложенного в работе метода.

Summary

A STOCHASTIC APPROXIMATION METHOD FOR FINDING OPTIMAL CONDITIONS IN EXPERIMENTAL WORK AND IN SELF-ADAPTING SYSTEMS

VÁCLAV FABIAN

A multidimensional stochastic approximation method is described and its applications — with examples — are considered as a method of experimental research and as a strategy of an automatic optimiser in self-adaptive systems.

The method was designed and studied by the author in [4]. It deals with the construction of a sequence x_1, x_2, \dots , converging to a point x at which a given function f attains its local maximum. The knowledge of analytical properties of f is not required but for every x in the domain of f it must be possible to determine or to estimate the value $f(x)$. In [4] the convergence of x_1, x_2, \dots , to a point x , at which f acquires its local maximum, was proved under rather general conditions. Concerning the domain of f , we assume that it consists of the points $x = [x^{(1)}, \dots, \dots, x^{(k)}]$ satisfying the condition $A^{(i)} \leq x^{(i)} \leq B^{(i)}$ for $i = 1, 2, \dots, k$.

The construction of the sequence x_1, x_2, \dots . We choose points c, a with positive coordinates $c^{(i)}, a^{(i)}$, both less than $\frac{1}{2}(B^{(i)} - A^{(i)})$ and a point x_1 in the domain of f . (For example we may use (3.2.1), (3.2.3).) We define c_n, a_n by (3.2.2).

Suppose x_1, x_2, \dots, x_n are already determined. We estimate the function values $f(x_{n,j})$ for $x_{n,j}$ defined by (3.3.1), (3.1.2), (3.1.3) and for $j = 0, 1, \dots, k$; denote the estimates by $y_{n,j}$ and define $\Delta_n^{(i)}$ by (3.3.2).

Now, two modifications of the method, $\alpha = 0$ and $\alpha = 1$, are discriminated.

$\alpha = 0$: x_{n+1} is defined by (3.4.1);

$\alpha = 1$: The values $f(x_{n,k+j})$ for $x_{n,k+j}$ defined by (3.4.2) are estimated by $y_{n,k+j}$ successively for $j = 1, 2, \dots$ until the first occurrence of the event (3.4.3). Then x_{n+1} is defined by (3.4.4).

Practical experience. In [4] the method was studied under the assumption $A^{(i)} = -\infty, B^{(i)} = +\infty$; in the applications we deal with a finite subsequence of the sequence x_1, x_2, \dots , only. However, experience shows that x_n approaches its limit with a practically useful speed.

An example is given of the search for a maximal extinction $f(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$ of a mixture of solutions of citric acid, sec. natrium phosphate and of natrium chloride by varying the wave length $x^{(1)}$, the concentration $x^{(2)}$ of citric acid and the concentration $x^{(3)}$ of natrium chloride.

The initial point x_1 and the points c, a are given by (5.1), the values c_n, a_n were prepared in Table 2 and in Table 3 the process of approximation is described; the rows with * in column 3 show the points x_n and in brackets the estimates of $f(x_n)$, observed in the previous course of experimentation.

Figure 1 describes the approximation graphically.

This example shows the use of the stochastic approximation method in experimental research; other applications can be found in solving numerical problems and in self-adaptive systems.

The use of the method as of a strategy of an optimiser. If $f(x)$ has the meaning of the quality of an optimised system when the condition $x = [x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}]$ is chosen, it is possible to vary the condition x successively by the approximation method and approximate by it the optimal state of the system, i. e. the point of maximum of the quality f . If the system optimised is on a sufficient level of automation, the changes in x can be performed by an automatic optimiser receiving a signal of the quality from the optimised system. Fig. 3 and 4 show the self-adaptive system, consisting of an optimised system and of an optimiser. In Fig. 4 a typical example of the optimised system is shown; in the diagrams we have denoted: (1) – the informations about x to be chosen, (2) – the optimised system, (3) – the optimiser, (4) – the signal of the quality, (5) – the production (laboratory) process, (6) – a computer for computing the quality (if the quality can be measured directly, the computer is not used), (7) – a regulator maintaining the condition of the system at the level determined by the optimiser.

The manner in which the optimiser uses the approximation method will be apparent if we indicate the decomposition of the time axis into intervals corresponding to the steps of the approximation method. For example, in a batch-production process if the batch do not influence one another, the steps of the approximation method may correspond to the batches. In a continuous production process the decomposition into the steps can be made as follows:

If the approximation method requires an estimate of $f(x_{n,j})$, we set the condition $x_{n,j}$ and define $y_{n,j}$ by (10.4), where $t_{n,j}$ is the beginning of the step in which the condition is maintained at $x_{n,j}$ and $y(t)$ is the measured quality at the moment t . Concerning $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ we suppose that $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ are positive numbers chosen in such a way that $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ and that the quality at the moment $t > t_{n,j} + \varepsilon_1$ is independent of the state of process at time $t' < t_{n,j}$.

Further there are considered on the paper the influence of changes in uncontrolled conditions, the influence of an imperfection of the regulator. Examples are given of optimised systems. Other methods, designed as strategies for an optimiser, are discussed. It seems that the properties of these methods are substantially less known than those of the method here described.