Karel Janáč

Určení korelačních funkcí na výstupu generátoru spojitých náhodných procesů

Aplikace matematiky, Vol. 6 (1961), No. 1, 25–35

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102737

URČENÍ KORELAČNÍCH FUNKCÍ NA VÝSTUPU GENERÁTORU SPOJITÝCH NÁHODNÝCH PROCESŮ

KAREL JANÁČ

(Došlo dne 8. dubna 1960.)

Generátor je realisován lineárním filtrem s konstantními koeficienty o přenosové funkci $F(p)$, na jehož vstup přichází bílý šum. Uvedenou metodou se vypočte korelační funkce na výstupu jako impulsní odezva nového filtru o přenosové funkci $Q(p)$. Je udán přechod z $F(p)$ na $Q(p)$ a podmínky, které musí splňovat přenosová funkce $Q(p)$, aby impulsní odezva byla korelační funkcí

Při řešení pravděpodobnostních úloh metodou modelování se vyskytuje nutnost generovati uměle náhodné procesy s předepsanými pravděpodobnostními vlastnostmi. Velmi často potřebným typem generátoru náhodného procesu je generátor, na jehož výstupu je spojitý stacionární náhodný signál s danou korelační funkcí. Tak tomu je např. při řešení problému filtrace, detekce signálu v šumu, v soustavách automatické regulace, adaptivních systémech atd. Takový generátor lze realisovat pomocí lineárního filtru, na jehož vstup přichází známý náhodný proces (např. bílý šum). Změnou číselných hodnot prvků filtru i změnou jeho topologické struktury lze měnit pravděpodobnostní vlastnosti signálu na výstupu. V pásmu nízkých kmitočtů lze s výhodou k realisaci takového generátoru použít prvků elektronkového analogového počítače (stejnosměrných zesilovačů, počítacích odporů, potenciometrů a kapacit). Takový lineární filtr je zcela charakterisován svou přenosovou funkcí $F(p)$ (poměr operátorových obrazů napětí na výstupu a vstupu filtru).

Při realisaci generátoru spojitého náhodného procesu vznikají dvě úlohy:

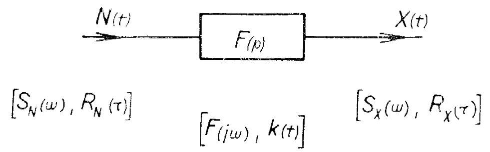
1) Jak při daném vstupním signálu a přenosové funkci lineárního filtru $F(p)$ ekonomicky určit korelační funkci náhodného procesu na výstupu.

2) Jak při daném vstupním signálu a předepsané korelační funkci náhodného procesu na výstupu určit přenosovou funkci $F(p)$ lineárního filtru.

Prvá úloha je analysou a druhá synthesou generátoru spojitého náhodného procesu.

Tato práce se v podstatě zabývá prvým problémem. Ukážeme, že k výpočtu korelační funkce lze s výhodou použít jednostranné Laplaceovy transformace (věta 3) a současně tento problém úzce svázat s metodikou výpočtu přechodných dějů v lineárních obvodech (věta 4). Tím lze k určení korelační funkce použít s výhodou vlastní počítací sítě generátoru, realisovaného metodou analogového elektronkového diferenciálního analysátoru. Svázání výpočtu korelační funkce s určením impulsní odezvy lineárního filtru skýtá možnosti řešit i druhý problém, neboť lze navázat na dosti propracovanou otázku synthesy lineárních filtrů z časové odezvy.

Principiální blokové schéma generátoru spojitého náhodného procesu je na obr. 1, kde $F(p)$ je přenosová funkce lineárního filtru se soustředěnými parametry. Na vstup se přivádí stacionární náhodný signál $N(t)$, charakterisovaný spektrální hustotou $S_N(\omega)$ a jí odpovídající korelační funkcí $R_N(\tau)$.



Obr. 1.

Na výstupu filtru (generátoru) se obdrží spojitý náhodný stacionární proces $X(t)$ se spektrální hustotou $S_x(\omega)$ (diferencovatelnou pro všechny ω) a korelační funkcí $R_x(\tau)$.

Lineární filtr je konstruován tak, že lze snadno měnit jeho tvar i hodnoty konstant funkce $F(p)$. Tím lze na jeho výstupu získat signál $X(t)$ s různými pravděpodobnostními vlastnostmi. Důležitou charakteristikou je jeho korelační funkce $R_x(\tau)$.

Je položen problém, jak při dané přenosové funkci $F(p)$ a vstupním signálu $N(t)$ vypočíst ekonomicky korelační funkci $R_x(\tau)$ na výstupu filtru.

Je známo [1], že spektrální hustota signálu na výstupu je dána

(1) $$S_x(\omega) = |F(j\omega)|^2 \, S_N(\omega)$$

a korelační funkce[1])

(2) $$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) \, e^{j\omega\tau} \, d\omega \, .$$

Platí tedy také:

(3) $$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 \, S_N(\omega) \, e^{j\omega\tau} \, d\omega \, .$$

Až doposud jsme předpokládali, že signály na vstupu i výstupu jsou spojité (podle středu) stacionární procesy. Mohli bychom také obecněji uvažovat zobecněné stacionární procesy, tzv. náhodné stacionární distribuce. Vztah (1) i pak platí s tím rozdílem že funkce $S_x(\omega)$ a $S_N(\omega)$ nemusí být integrovatelné. Nutná a postačující podmínka pro to, aby stacionární náhodná distribuce byla obyčejným stacionárním procesem je, aby příslušná energetická spektrální hustota byla integrovatelná (tj. aby integrál přes celou přímku byl konečný). Příkladem náhodné stacionární distribuce je tzv. bílý šum, který je limitním případem procesu s dostatečně širokým rovnoměrným spektrem. Jeho spektrální hustota je identicky rovna 1. V dalším budeme předpoklá-

[1]) Vstupní signál je připojen k filtru v čase $t = -\infty$. Prakticky je dostatečný předpoklad připojení dosti dlouho před měřením (použitím) generátoru.

dat, že na vstup je přiváděn bílý šum[2]), tj. $S_N(\omega) \equiv 1$, a současně budeme předpokládat, že filtr má tu vlastnost, že proces na výstupu je obyčejný stacionární proces. Nutná a postačující podmínka pro to je, aby funkce $|F(j\omega)|^2$ byla integrovatelná, což budeme dále všude předpokládat. Vzorec (3) pak má tvar

$$(4) \qquad R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 \, e^{j\omega\tau} \, d\omega \, .$$

Cílem této práce je ukázat, jak k výpočtu korelační funkce na výstupu lineárního filtru lze s výhodou použít jednostranné Laplaceovy transformace.

Stabilní lineární filtr se soustředěnými parametry je obecně určen přenosovou funkcí typu

$$(5) \qquad F(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_0} \, ,$$

kde a_i, b_j $(i = 0, 1, 2, \ldots, n; j = 0, 1, 2, \ldots, m)$ jsou reálná čísla, přičemž $a_n, b_m \neq 0$, $m \geqq n$ a póly funkce F neleží v komplexní polorovině $\operatorname{Re} p > 0$.

Omezme se v dalším na stabilní lineární filtry se soustředěnými parametry, pro jejichž přenosové funkce (5) platí $m > n$ a jejichž všechny póly leží v polorovině $\operatorname{Re} p < 0$. [3]) Označme $\mathscr{F}$ množinu všech přenosových funkcí filtrů, které splňují tyto požadavky. Jestliže $F \in \mathscr{F}$, pak $|F(j\omega)|^2$ je integrovatelná a tedy shora požadovaný předpoklad na F je splněn.

Vyslovme nyní větu:

Věta 1. *Nechť $F \in \mathscr{F}$. Potom existuje $Q \in \mathscr{F}$, že pro všechna p*

$$(6) \qquad F(p) \, . \, F(-p) = Q(p) + Q(-p) \, .$$

Důkaz: Nechť $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ jsou póly funkce F a nechť $s_1, s_2, \ldots, s_k$ jsou jejich násobnosti. Zřejmě platí $\sum_{i=1}^{k} s_i = m$. Potom existuje právě jeden rozklad funkce $F(p) \, F(-p)$ na částečné zlomky

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{s_i} \frac{A_{ij}}{(p - \beta_i)^{s_i+1-j}} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{s_i} \frac{A'_{ij}}{(-p - \beta_i)^{s_i+1-j}} \, ,$$

kde konstanty A_{ij} a A'_{ij} jsou určeny pomocí rozkladu [2], [3].

$$(7) \qquad A_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} \left[\frac{d^{j-1}}{dp^{j-1}} (p - \beta_i)^{s_i} \, F(p) \, F(-p) \right]_{p = \beta_i} \, ,$$

[2]) Bude ukázáno, že metoda je použitelná i v případě obecnějším. Prakticky je bílý šum (který je nerealisovatelný) při realisaci generátoru nahrazen bílým šumem s omezeným spektrem a šířka pásma filtru se volí menší než je šíře spektra „bílého šumu" [4].

[3]) Filtry, pro které platí $m = n$, nemají praktický význam pro realisaci generátoru, neboť lze snadno dokázat, že přenášejí na výstup část vstupního signálu v celém kmitočtovém pásmu. Rovněž podmínka, položená na póly, není prakticky omezující.

(8) $$A'_{ij} = \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}\left[\frac{d^{j-1}}{dp^{j-1}}(-p-\beta_i)^{s_i} F(p)\,F(-p)\right]_{p=-\beta_i}.$$

Dosazením substituce $z = -p$ do (8) lze snadno ukázat, že $A_{ij} = A'_{ij}$ pro každé j a i. Stačí tedy položit pro všechna p

(9) $$Q(p) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s_i}\frac{A_{ij}}{(p-\beta_i)^{s_i+1-j}}.$$

Z předpokladu $F \in \mathscr{F}$ pak vyplývá, že i $Q \in \mathscr{F}$, a tedy pro každé p platí (6), což bylo dokázat.

Ukažme si nyní, jak lze k výpočtu korelační funkce na výstupu fitru s přenosovou funkcí $F \in \mathscr{F}$ použít Laplaceovu transformaci. Platí následující věta:

Věta 2. *Nechť $F \in \mathscr{F}$ a nechť h je spojitým originálem k funkci $F(p)\,F(-p)$ ve smyslu dvoustranné Laplaceovy transformace.*

Potom korelační funkce R_x náhodného procesu na výstupu filtru s přenosovou funkcí F, na jehož vstupu je bílý šum, je pro každé $\tau \in (-\infty, \infty)$ dána výrazem

(10) $$R_x(\tau) = h(\tau).$$

Důkaz: Podle předpokladu, že h je originálem k funkci $F(p)\,F(-p)$, platí pro každé τ vztah[4])

$$h(\tau) = \frac{1}{2\pi j}\int_{0-j\infty}^{0+j\infty} F(p)\,F(-p)\,e^{p\tau}\,dp,$$

odkud substitucí $p = j\omega$ obdržíme

$$h(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2\,e^{j\omega\tau}\,d\omega,$$

a tedy dle (4) platí (10), což bylo dokázat.

K výpočtu korelační funkce by bylo výhodnější použít jednostranné Laplaceovy transformace, pro kterou jsou k disposici podrobné operátorové slovníky. To umožňuje následující věta:

Věta 3. *Nechť $F \in \mathscr{F}$ a k ní nechť přísluší podle věty 1 přenosová funkce $Q \in \mathscr{F}$, jejíž spojitý originál ve smyslu jednostranné Laplaceovy transformace je funkce q.*

Potom korelační funkce R_x náhodného procesu na výstupu filtru o přenosové funkci F, na jehož vstupu je bílý šum, je pro každé $\tau \in (-\infty, \infty)$ dána výrazem

(11) $$R_x(\tau) = q(|\tau|), \quad \text{pro} \quad \tau \neq 0$$

a

$$R_x(0) = \lim_{\tau \to 0+} q(\tau).$$

[4]) Snadno se lze přesvědčit, že h splňuje podmínky věty o inversi; [8], str. 210, věta 1.

Dříve než přistoupíme k důkazu této věty, dokážeme si jedno lemma, které ve speciálním případě $t > 0$ je dokázáno v [5].

Lemma 1. *Nechť* $|\Phi(p)| < CR^{-k}$ *pro* $R > R_0$, *kde* $p = Re^{j\phi}(0 \leqq \phi \leqq 2\pi)$ *a* R_0, C, k *jsou určité kladné konstanty.*

Potom pro $t > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R^+} \Phi(p)\, e^{pt}\, dp = 0\,,$$

a pro $t < 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R^-} \Phi(p)\, e^{pt}\, dp = 0$$

kde

$$C_R^+ = \left\{p : p = Re^{j\phi}\,;\ \frac{\pi}{2} \leqq \phi \leqq \frac{3}{2}\pi\right\}$$

a

$$C_R^- = \left\{p : p = Re^{j\phi}\,;\ 0 \leqq \phi \leqq \frac{\pi}{2} \quad \textit{nebo} \quad \frac{3}{2}\pi \leqq \phi \leqq 2\pi\right\}.$$

Důkaz: Pro $t > 0$ je toto lemma dokázáno v [5], str. 76. Provedeme proto důkaz jen pro $t < 0$. Platí

$$\left|\int_{C_R^-} \Phi(p)\, e^{pt}\, dp\right| < CR^{-k+1} \int_0^{\pi/2} \left(e^{Rt\cos\phi} + e^{Rt\sin\phi}\right) d\phi\,.$$

Jelikož pro $\phi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ je $\cos\phi \geqq \frac{\pi - 2\phi}{\pi}$ a $\sin\phi \geqq \frac{2\phi}{\pi}$, dostaneme

$$\left|\int_{C_R^-} \Phi(p)\, e^{pt}\, dp\right| < \frac{C\pi}{R^k t}\left(e^{Rt} - 1\right),$$

a jelikož $t < 0$, tak pro $R \to \infty$ platí

$$\int_{C_R^-} \Phi(p)\, e^{pt}\, dp \to 0\,,$$

což bylo dokázat.

Důkaz věty 3: Ze vztahů (10) a (6) plyne

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi j} \int_{0-j\infty}^{0+j\infty} \left[Q(p) + Q(-p)\right] e^{p\tau}\, dp\,. \tag{12}$$

Dokažme nejprve existenci integrálu[5])

$$\int_{0-j\infty}^{0+j\infty} Q(p)\, e^{p\tau}\, dp\,. \tag{13}$$

Jelikož $Q \in \mathscr{F}$ je analytická v polorovině $\operatorname{Re} p \geqq 0$, platí podle Cauchyho věty pro každé R a $\tau < 0$

$$\int_{0-jR}^{0+jR} Q(p)\, e^{p\tau}\, dp + \int_{C_R^-} Q(p)\, e^{p\tau}\, dp = 0$$

a tedy dle lemmatu 1 je

$$\int_{0-j\infty}^{0+j\infty} Q(p)\, e^{p\tau}\, dp = 0 \quad \text{pro} \quad \tau < 0\,.$$

[5]) Integrály nutno brát ve smyslu hlavní hodnoty.

V případě $\tau > 0$ integrujeme po C_R^+ a z Cauchyho věty a lemmatu 1 dostaneme

$$\int_{0-j\infty}^{0+j\infty} Q(p)\, e^{p\tau}\, \mathrm{d}p = 2\pi j \sum_{i=1}^{k} \mathrm{res}_i\, Q(p)\, e^{p\tau}\,.$$

Nechť nyní $\tau = 0$. Potom existence integrálu (13) plyne z následující úvahy:

Rozvineme $Q(p)$ na částečné zlomky (9). Při integrování jednotlivých sčítanců se vyskytují dva druhy integrálů

$$\int_{0-j\infty}^{0+j\infty} \frac{A_{is_i}}{(p-\beta_i)}\, \mathrm{d}p \quad \text{a} \quad \int_{0-j\infty}^{0+j\infty} \frac{A_{i,s_i-r}}{(p-\beta_i)^{r+1}}\, \mathrm{d}p\,,$$

kde $r = 1, 2, \ldots, s_i - 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Pro každé $r \geqq 1$ celé platí

$$\int_{0-j\infty}^{0+j\infty} \frac{A_{i,s_i-r}}{(p-\beta_i)^{r+1}}\, \mathrm{d}p = \lim_{R\to\infty} \int_{0-jR}^{0+jR} \frac{A_{i,si-r}}{(p-\beta_i)^{r+1}}\, \mathrm{d}p = 0\,.$$

Označíme-li $\beta_i = u_i + jv_i$ (u_i je zřejmě záporné číslo), pak pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$ dostaneme

$$\int_{0-j\infty}^{0+j\infty} \frac{A_{is_i}}{(p-\beta_i)}\, \mathrm{d}p = \lim_{R\to\infty} \int_{0-jR}^{0+jR} \frac{A_{is_i}}{(p-\beta_i)}\, \mathrm{d}p =$$

$$= A_{is_i} \lim_{R\to\infty} \left[\log\left(j(R - v_i) - u_i\right) - \log\left(-j(R + v_i) - u_i\right)\right] =$$

$$= A_{is_i} \lim_{R\to\infty} \left\{\frac{1}{2} \log \frac{u_i^2 + (R - v_i)^2}{u_i^2 + (R + v_i)^2} + j\left[\operatorname{arctg} \frac{v_i - R}{u_i} - \operatorname{arctg} \frac{v_i + R}{u_i}\right]\right\} =$$

$$= A_{is_i} j\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = j\pi A_{is_i}\,;$$

a tedy

$$\int_{0-j\infty}^{0+j\infty} Q(p)\, \mathrm{d}p = j\pi \sum_{i=1}^{k} A_{is_i}\,. \tag{14}$$

Z uvedených úvah vyplývá, že i integrál (13) existuje pro všechna reálná τ. Existuje tedy i integrál

$$\int_{0-j\infty}^{0+j\infty} Q(-p)\, e^{p\tau}\, \mathrm{d}p$$

a lze psát pro všechna τ

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi j} \int_{0-j\infty}^{0+j\infty} Q(p)\, e^{p\tau}\, \mathrm{d}p + \frac{1}{2\pi j} \int_{0-j\infty}^{0+j\infty} Q(-p)\, e^{p\tau}\, \mathrm{d}p =$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \int_{0-j\infty}^{0+j\infty} Q(p)\, e^{p\tau}\, \mathrm{d}p + \frac{1}{2\pi j} \int_{0-j\infty}^{0+j\infty} Q(p)\, e^{-p\tau}\, \mathrm{d}p\,.$$

Označme pro každé τ

$$q(\tau) = \frac{1}{2\pi j} \int_{0-j\infty}^{0+j\infty} Q(p)\, e^{p\tau}\, \mathrm{d}p\,.$$

Potom z předchozích úvah vyplývá, že pro $\tau < 0$ je

$$q(\tau) = 0$$

a z jednoznačnosti Laplaceovy transformace pak plyne, že $q(\tau)$ je originálem ve smyslu jednostranné Laplaceovy transformace k funkci $Q(p)$.

Dostaneme tedy

$$R_x(\tau) = q(\tau) + q(-\tau)$$

a odtud $R_x(\tau) = q(|\tau|)$ pro $\tau \neq 0$.

Jelikož z (14)

$$q(0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} A_{is_i},$$

tak zřejmě z (9) a z věty o počáteční hodnotě [3] plyne

$$R_x(0) = 2q(0) = \sum_{i=1}^{k} A_{is_i} = \lim_{\tau \to 0+} q(\tau),$$

což bylo dokázat.

Z věty 3 vyplývá následující použití pro výpočet korelačních funkcí na výstupu filtru s přenosovou funkcí $F \in \mathscr{F}$, na jehož vstup je přiváděn bílý šum. Pomocí vzorce (7) a (9) je možno vypočítat funkci Q. Hledaná korelační funkce je pak rovna $q(|\tau|)$, kde $q(\tau)$ je originálem jednostranné Laplaceovy transformace k funkci $Q(p)$ a je možno k jejímu výpočtu použít tabulek Laplaceových transformací.

Větě 3 lze též dát fysikální interpretaci. Z teorie elektrických obvodů je známo, že odezva lineárního filtru, na jehož vstup je přiveden jednotkový impuls, je dána zpětnou Laplaceovou transformací z přenosové funkce. Uvažujeme-li lineární filtr s přenosovou funkcí Q, je jeho impulsní odezva rovna $R_x(\tau)$ pro $\tau \leqq 0$.

Je možno tedy větu 3 vyslovit v následujícím tvaru:

Věta 4. *Korelační funkce náhodného procesu na výstupu lineárního filtru s přenosovou funkcí $F \in \mathscr{F}$, na jehož vstup je přiveden bílý šum, je dána impulsní odezvou filtru s přenosovou funkcí $Q(p)$, kde Q odpovídá funkci F podle věty 1.*

Význam této věty spočívá v tom, že lze přenosovou funkci $Q(p)$ vymodelovat např. na analogovém počítači a registrovat přímo impulsní odezvu. Obdržíme tak přímo grafický průběh korelační funkce $R_x(\tau)$, který by se jinak musel pracně počítat a vynášet. Lze najít takový způsob modelování přenosové funkce $F(p)$ i $Q(p)$, že část počítací sítě zůstává beze změny při přechodu z $F(p)$ na $Q(p)$.

K účelům návrhu generátoru spojitých náhodných procesů i k řešení problému synthesy takových generátorů je důležité, zda nelze omezit nějakým způsobem třídu funkcí $Q(p)$. Za tím účelem uvedeme ještě následující úvahu.

Z věty 1 plyne, že pro $Q \in \mathscr{F}$ je $m > n$. Vyjádřeme nyní Q ve tvaru:

$$Q(p) = \frac{c_{m-1} p^{m-1} + c_{m-2} p^{m-2} + \ldots + c_0}{p^m + d_{m-1} p^{m-1} + \ldots + d_0}.$$

Ze vztahu (9) plyne, že

$$\sum_{i=1}^{k} A_{is_i} = c_{m-1}$$

a tedy liší-li se stupně polynomů v čitateli a jmenovateli o dvě nebo více, je to ekvivalentní podmínce $c_{m-1} = 0$, $c_{m-2} = 0 \ldots$. Z důkazu věty 3 pro $\tau = 0$ plyne, že v tomto případě by bylo

$$R_x(0) = 0\,,$$

což může nastat jen tehdy, když $F(p) \equiv 0$, tj. jen tehdy, když filtr nepropouští žádný signál a na výstupu je stále nula.

Z uvedeného plyne, že přenosová funkce $Q \in \mathscr{F}$ má stupeň polynomu v čitateli právě o jedničku nižší než stupeň polynomu ve jmenovateli.

Odvozených vět lze použít k výpočtu korelační funkce na výstupu filtru i v případě, kdy na jeho vstupu není bílý šum, pokud funkce $|F(j\omega)|^2\, S_N(\omega)$ ve vztahu (3). splňuje podmínky, kladené na funkci $|F(j\omega)|^2$ ve vztahu (4). Rovněž lze uvedeného postupu použít i v jiných aplikacích, kde je třeba řešit uvedený typ Fourierova integrálu. K výpočtu lze s výhodou použít jednostranné Laplaceovy transformace a metodiky rozpracované k výpočtu přechodných dějů v lineárních obvodech [6], [7].

Odvozený postup si demonstrujme na několika příkladech.

Příklady:

1.

$$F(p) = \frac{1}{p - \beta_1}$$

$$F(p)\,.\,F(-p) = \frac{1}{p - \beta_1}\,.\,\frac{1}{-p - \beta_1} = \frac{-\dfrac{1}{2\beta_1}}{p - \beta_1} + \frac{-\dfrac{1}{2\beta_1}}{-p - \beta_1}$$

$$Q(p) = \frac{-\dfrac{1}{2\beta_1}}{p - \beta_1}\,; \quad \Rightarrow g(\tau) = \frac{-1}{2\beta_1}\, e^{\beta_1 \tau}$$

$$R_x(\tau) = \frac{-1}{2\beta_1}\, e^{\beta_1 |\tau|}\,; \quad R_x(0) = \frac{-1}{2\beta_1}$$

2.

$$F(p) = \frac{1}{(p - \beta_1)(p - \beta_2)}\,; \beta_1 \neq \beta_2$$

$$F(p)\,.\,F(-p) = \frac{1}{(p - \beta_1)(p - \beta_2)}\,.\,\frac{1}{(-p - \beta_1)(-p - \beta_2)} =$$

$$= \frac{\dfrac{-1}{2\beta_1(\beta_2^2 - \beta_1^2)}}{p - \beta_1} + \frac{\dfrac{-1}{2\beta_2(\beta_1^2 - \beta_2^2)}}{p - \beta_2} + \frac{\ldots}{-p - \beta_1} + \frac{\ldots}{-p - \beta_2}$$

$$Q(p) = \frac{\dfrac{-1}{2\beta_1(\beta_2^2 - \beta_1^2)}}{p - \beta_1} + \frac{\dfrac{-1}{2\beta_2(\beta_1^2 - \beta_2^2)}}{p - \beta_2}$$

$$R_x(\tau) = \frac{-1}{2\beta_1(\beta_2^2 - \beta_1^2)} e^{\beta_1|\tau|} + \frac{-1}{2\beta_2(\beta_1^2 - \beta_2^2)} e^{\beta_2|\tau|}$$

$$R_x(0) = \frac{-1}{2\beta_1(\beta_2^2 - \beta_1^2)} + \frac{-1}{2\beta_2(\beta_1^2 - \beta_2^2)}$$

3.

$$F(p) = \frac{1}{(p - \beta_1)^2}$$

$$F(p)\,F(-p) = \frac{1}{(p - \beta_1)^2\,(-p - \beta_1)^2}$$

$$Q(p) = \frac{\dfrac{-1}{4\beta_1^3}}{p - \beta_1} + \frac{\dfrac{1}{4\beta_1^2}}{(p - \beta_1)}$$

$$R_x(\tau) = -\frac{1}{4\beta_1^3} e^{\beta_1|\tau|} + \frac{1}{4\beta_1^2} |\tau|\, e^{\beta_1|\tau|}$$

$$R_x(0) = \frac{-1}{4\beta_1^3}$$

4.

$$F(p) = \frac{p - \alpha_1}{(p - \beta_1)(p - \beta_2)}$$

$$F(p)\,F(-p) = \frac{p - \alpha_1}{(p - \beta_1)(p - \beta_2)} \cdot \frac{-p - \alpha_1}{(-p - \beta_1)(-p - \beta_2)}$$

$$Q(p) = \frac{\dfrac{\alpha_1^2 - \beta_1^2}{-2\beta_1(\beta_2^2 - \beta_1^2)}}{p - \beta_1} + \frac{\dfrac{\alpha_1^2 - \beta_2^2}{-2\beta_2(\beta_1^2 - \beta_2^2)}}{p - \beta_2}$$

$$R_x(\tau) = \frac{\alpha_1^2 - \beta_1^2}{-2\beta_1(\beta_2^2 - \beta_1^2)} e^{\beta_1|\tau|} + \frac{\alpha_1^2 - \beta_2^2}{-2\beta_2(\beta_1^2 - \beta_2^2)} e^{\beta_2|\tau|}$$

Literatura

[1] *В. В. Солодовников:* Введение в статистическую динамику систем автоматического управления. Госиздат. тех. теор. лит., Москва 1952.

[2] *V. Jarník:* Úvod do počtu integrálního. Jed. čs. mat. a fys., Praha 1948.

[3] *М. Ф. Гарднер, Дж. Л. Бернс:* Переходные процессы в линейных системах. Госиздат. тех. теор. лит., Москва 1951.

[4] *J. S. Bendat:* Principles and Applications of Random Noise Theory. New York 1958.

[5] *Carslaw-Jaeger:* Operational Methods in Applied Mathematics. 1953.

[6] *J. H. Mulligan:* The Effect of Pole and Zero Locations on the Transient Response of Linear Dynamic Systems. Proc. IRE, May 1949, 516—529.

[7] *W. R. Evans:* The Use of Zeros and Poles for Frequency Response of Transient Response. Trans. ASME, Vol. 76, Nr. 8, Nov. 1954, 1335—1345.

[8] *G. Doetsch:* Handbuch der Laplace-Transformation. Basel 1950.

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ КОРРЕЛЯЦИИ НА ВЫХОДЕ ГЕНЕРАТОРА НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

КАРЕЛ ЯНАЧ (Karel Janáč)

В статье разработан метод вычисления функции корреляции на выходе генератора непрерывного случайного процесса. Генератор осуществлен посредством линейного фильтра с сосредоточенными параметрами и передаточной функцией $F(p)$, на входе которого имеется белый шум. При некоторых несущественных ограничениях, касающихся функции $F(p)$, можно функцию корреляции процесса на выходе определить при помощи одностороннего преобразования Лапласа, как реакцию на единичную импульсную функцию нового фильтра с передаточной функцией $Q(p)$. Дается доказательство метода и указывается способ вычисления функции $Q(p)$. Затем приводятся условия, которым должна удовлетворять передаточная функция $Q(p)$, чтобы ее реакция на единичную импульсную функцию была функцией корреляции. Метод является особенно выгодным, когда фильтр с передаточной функцией $F(p)$ осуществляется посредством электронного дифференциального анализатора аналогового типа, потому что его можно одновременно использовать для определения реакции на единичную импульсную функцию $Q(p)$. Часть вычислительной сети остается при моделировании передаточных функций $F(p)$ и $Q(p)$ без изменения.

Статья снабжена несколькими примерами.

Summary

DETERMINATION OF CORRELATION FUNCTIONS ON THE OUTPUT OF A GENERATOR OF CONTINUOUS RANDOM PROCESSES

KAREL JANÁČ

A method is presented for the calculation of correlation functions on the output of a generator of continuous random processes. Such a generator may be represented by a linear filter with lumped parameters and a transfer function $F(p)$, and with a white noise input. Under certain unimportant assumptions on $F(p)$, the correlation function of the process on the output can be determined by means of the one sided Laplace transform as the impulse response of a second filter with transfer function $Q(p)$. A proof of this is given, and also a method of computation of $Q(p)$. Conditions on the transfer function $Q(p)$ are determined, which ensure that its impulse response be a correlation function. The method can be employed to greatest advantage when the filter with transfer function $F(p)$ is represented on an electronic differential analyser: the impulse response of $Q(p)$ can be determined simultaneously, since sections of the programme for the simulation of $F(p)$ and $Q(p)$ are identical.

Several examples are included.