Emil Vitásek

Numerische Behandlung von der quasistationären Lösung der Wärmeleitungsgleichung

Aplikace matematiky, Vol. 5 (1960), No. 6, 412–441

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102729`

NUMERISCHE BEHANDLUNG VON DER QUASISTATIONÄREN LÖSUNG DER WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG

EMIL VITÁSEK

(Eingegangen am 6. November 1959.)

Den Inhalt der Arbeit, welche die Fortsetzung von [1] ist, bildet die Diskussion der Differenzenmethode für die Berechnung der quasistationären Lösung der Wärmeleitungsgleichung.

1. EINLEITUNG

Der Zweck dieses Abschnittes ist es an einige Definitionen und Sätze die quasistationäre Lösung betreffend zu erinnern, von welchen die Arbeit [1] handelt und die wir im folgenden benötigen werden.

Definition 1.1. *Als Problem 1 bezeichnen wir das folgende: Es ist eine Funktion $u(x, t)$ so zu bestimmen, dass für sie gilt:*

(a) *die Funktion $u(x, t)$ hat in $R_k = \underset{[x,t]}{E}[kb < x < (k + 1)\, b,\ 0 < t < T]$ ($b > 0$ beliebig, fest gewählt) stetige partielle Ableitungen $\partial u/\partial t$, $\partial^2 u/\partial x^2$ und genügt dort der Gleichung*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(t + kt_0)\,, \quad (x, t) \in R_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

a ist eine positive Konstante, $0 < t_0 < T$ beliebig und fest, $q(t)$ ist stetig, nicht negativ und beschränkt in $\langle 0, \infty)$;

(b) *die Ableitungen $\partial u/\partial t$, $\partial u/\partial x$ sind stetig im Bereich $(0, \infty) \times (0, T)$;*

(c)

$$u(x, 0) = p(x) \quad \text{für} \quad x > 0,\ x \neq b, \tag{2}$$

$p(x)$ ist stetig auf dem Intervall $\langle 0, \infty)$ mit Ausnahme des Punktes b in dessen Umgebung es beschränkt ist und es gilt $\sup\limits_{x \in \langle 0, \infty)} \dfrac{|p(x)|}{1 + x^3} < \infty$,

$$u\,(0, t) = 0 \quad \text{für} \quad 0 < t < T\,. \tag{3}$$

Satz 1.1. *Es sei B eine Klasse von Funktionen $u(x, t)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(*a*) *$u(x, t)$ sei definiert und stetig in $\langle 0, \infty) \times \langle 0, T \rangle$ mit Ausnahme endlich vieler Punkte auf der Halbgeraden $0 \leqq x < \infty$, $t = 0$ in deren Umgebung die Funktion $u(x, t)$ beschrenkt sei;*

(*b*) *wenn wir $f(x) = \operatorname{Sup}_t |u(x, t)|$ setzen, ist die Funktion $f(x)/(1 + x^3)$ auf dem Intervall $\langle 0, \infty)$ beschränkt.*

Dann existiert in B gerade eine Lösung des Problems 1.

Definition 1.2. *Es sei P ein Raum stetiger Funktionen auf dem Intervall $\langle 0, \infty)$, für welche gelten möge*

$$\operatorname*{Sup}_{x \in \langle 0,\infty)} \frac{|f(x)|}{1 + x^3} < \infty \tag{4}$$

und A sei ein Operator, welcher der Funktion $f \in P$ die Funktion Af durch die Vorschrift

$$(Af)(x) = u(x, t_0) \tag{5}$$

zuordnet, in welcher $u(x, t)$ eine Lösung des Problems 1 gemäss Definition 1.1 für $t = t_0$ bedeutet mit

$$\begin{aligned} p(x) &= 0 && \text{für } 0 < x < b\,, \\ p(x) &= f(x - b) && \text{für } b < x < \infty\,. \end{aligned}$$

Die Funktion $f \in P$ bezeichnen wir als quasistationäre Lösung des Problems 1 sofern gilt

$$Af = f\,. \tag{6}$$

Satz 1.2. *Es sei $G = \operatorname{Sup} q(t)$, t_0, b seien Konstante und $q(t)$ eine Funktion gamäss Definition 1.1, $\alpha = Gt_0/b$, $b_0 = 2G\sqrt{a}\sqrt{t_0}/\sqrt{\pi} + \alpha$, $b_1 = G\sqrt{a}\sqrt{t_0}/b\sqrt{\pi}$ und es sei $f \in M$, $M \subset P$ gerade dann, falls gilt:*

(*a*) $0 \leqq f(x) \leqq \alpha x + b\alpha$, $x \in \langle 0, \infty)$;

(*b*) $\overline{D}f(x) \leqq b_0 + b_1 x$, $\underline{D}f(x) \geqq -(b_0 + b_1 x)$, $x \in \langle 0, \infty)$.[1])

Dann existiert in M gerade eine quasistationäre Lösung des Problems 1.

Satz 1.3. ([2]) *Es sei P ein lokal konvexer, topologischer, linearer Raum. $M \subset P$ sei konvex und kompakt. Es sei A eine stetige Abbildung von M in M. Dann existiert ein solches $f_0 \in M$, dass gilt*

$$Af_0 = f_0\,. \tag{7}$$

---

[1]) Unter dem Symbol $\overline{D}f(x)$ bezw. $\underline{D}f(x)$ werde $\limsup_{h \to 0} (f(x + h) - f(x))/h$ bezw. $\liminf_{h \to 0} (f(x + h) - f(x))/h$ verstanden.

Satz 1.4. *Wenn wir in P eine Norm durch die Beziehung*

(8) $$\|f\| = \operatorname*{Sup}_{x \in \langle 0, \infty)} \frac{|f(x)|}{1 + x^3}$$

einführen, so bildet P einen normierten linearen Raum.

Im weiteren werden wir uns mit der Differenzenanalogie der oben formulierten Aufgabe befassen.

2. DIE QUASISTATIONÄRE DIFFERENZENLÖSUNG

Definition 2.1. *Als Netz $S_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ bezeichnen wir eine Punktmenge $[kh_n, l\tau_n]$ $(k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, worin bedeuten $h_n = \frac{1}{2^n} h_0$, $\tau_n = \frac{1}{2^{2n}} \tau_0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $h_0 = b/N_1$, $\tau_0 = t_0/N_2$ $(N_1, N_2 \ldots$ sind natürliche Zahlen$)$,*

(1) $$0 < \frac{\tau_n}{ah_n^2} \equiv \beta < \frac{1}{2}$$

und a, b, t_0 sind die Konstanten aus der Definition 1.1. Analog bezeichnen wir als Netz $S_n^{(0)}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ eine Punktmenge $kh_n \in E_1$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ und mit $S_n^{(1)}$ die Punktmenge $l\tau_n \in E_1$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Die Punkte des Netzes $S_n(S_n^{(i)})$ werden wir Knoten nennen und die auf $S_n(S_n^{(i)})$ definierten Funktionen öfter abgekürzt Netzfunktionen.

Definition 2.2. *Mit dem Zeichen B_n bezeichnen wir eine Menge von Netzfunktionen $u_n(x, t)$ der folgenden Eigenschaften:*

(a) $u_n(x, t)$ ist definiert in $(\langle 0, \infty) \times \langle 0, T)) \cap S_n$ $(T > 0$ beliebig und fest gewählt$)$;

(b) wenn wir $f_n(x) = \operatorname{Max} |u_n(x, t)|$ setzen, so ist $f_n(x)/(1 + x^3)$ beschränkt auf $\langle 0, \infty) \cap S_n^{(0)}$.

Definition 2.3. *Als Problem 2 bezeichnen wir das folgende: Es ist eine Funktion $u_n(x, t) \in B_n$ zu bestimmen, für welche gilt:*

(a) In jedem Knoten $[x, t]$ von solcher Beschaffenheit, dass $[x, t + \tau_n] \in \in (0, \infty) \times (0, T)$ ist, gilt

(2) $$\frac{u_n(x, t + \tau_n) - u_n(x, t)}{\tau_n} - \frac{1}{a} \frac{u_n(x + h_n, t) - 2u_n(x, t) + u_n(x - h_n, t)}{h_n^2} = \\ = \frac{1}{\tau_n} z_n(x, t + \tau_n),$$

worin $z_n(x, t)$ eine Netzfunktion ist, welche durch die Beziehungen

(3) $$z_n(x, t) = \int_{t-\tau_n}^{t} q(s + kt_0) \, \mathrm{d}s \quad \text{für} \quad kb < x < (k + 1)\, b\,,$$
$$z_n(kb, t) = \tfrac{1}{2}\Big[\int_{t-\tau_n}^{t} q(s + (k - 1)\, t_0) \, \mathrm{d}s + \int_{t-\tau_n}^{t} q(s + kt_0) \, \mathrm{d}s\Big]$$

definiert ist und $q(t)$ die aus der Definition 1.1 herrührende Funktion ist.

(*b*) *Für* $x \in \langle 0, \infty) \cap S_n^{(0)}$ *ist*

$$u_n(x, 0) = p_n(x)$$

und $p_n(x)$ *ist eine Netzfunktion, für welche gilt*

$$\operatorname*{Sup}_{x \in \langle 0,\infty) \cap S_n^{(0)}} \frac{|p_n(x)|}{1 + x^3} < \infty \, ;$$

(5) $$u_n(0, t) = 0 \quad \text{für} \quad t \in (0, T) \cap S_n^{(1)} \, .$$

Satz 2.1. *Die einzige Lösung des Problems 2 ist durch die Formel*

(6) $$u_n(x, t) = u_{1,n}(x, t) + u_{2,n}(x, t)$$

gegeben, in welcher bedeuten

(7) $$u_{1,n}(x, t) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(a_{\frac{t}{\tau_n}} \left(\frac{x}{h_n} - r \right) - a_{\frac{t}{\tau_n}} \left(\frac{x}{h_n} + r \right) \right) p_n(rh_n) \, ,$$

(8) $$u_{2,n}(x, t) = \sum_{s=1}^{\frac{t}{\tau_n}} \sum_{r=0}^{\infty} \left(a_{\frac{t}{\tau_n} - s} \left(\frac{x}{h_n} - r \right) - a_{\frac{t}{\tau_n} - s} \left(\frac{x}{h_n} + r \right) \right) z_n(rh_n, s\tau_n)$$

und

(9) $$a_s(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ((1 - 2\beta) + 2\beta \cos x)^s \, e^{-irx} \, dx \, ,$$

$$s = 1, 2, \ldots, \; r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Beweis: Der Satz folgt leicht aus [3].

Definition 2.4. *Es sei* $f_n(x)$ *eine Netzfunktion, die auf* $S_n^{(0)}$ *definiert ist. Wir definieren einen Operator* A_n, *welcher der Funktion* f_n *wiederum eine Netzfunktion in* $\langle 0, \infty)$ *durch die Vorschrift*

(10) $$(A_n f_n)(x) = u_n(x, t_0)$$

zuordnet, worin $u_n(x, t)$ *eine Lösung des Problems 2 nach Definition 2.3 für* $t = t_0$ *ist mit*

(11) $$\begin{aligned} p_n(x) &= 0 && \text{für} \quad 0 < x < b \, , \\ p_n(x) &= f_n(x - b) && \text{für} \quad b < x < \infty \, . \end{aligned}$$

Definition 2.5. *Als Raum* P_n *bezeichnen wir die Menge der auf* $\langle 0, \infty) \cap S_n^{(0)}$ *definierten Funktionen* $f_n(x)$, *für welche gilt*

(12) $$\operatorname*{Sup}_{x \in \langle 0,\infty) \cap S_n^{(0)}} \frac{|f_n(x)|}{1 + x^3} < \infty \, .$$

Nun gelten offenbar die Sätze:

Satz 2.2. *Der Operator* A_n *hat einen Sinn für jedes* $f_n \in P_n$.

Satz 2.3. *Wenn wir in P_n eine Norm durch die Beziehung*

$$\|f_n\|_{P_n} = \sup_{x \in \langle 0, \infty) \cap S_n^{(0)}} \frac{|f_n(x)|}{1 + x^3} \tag{13}$$

einführen, so ist P_n ein linearer, normierter Raum.

Definition 2.6. *Die Funktion $f_n \in P_n$ bezeichnen wir als quasistationäre Lösung des Problems 2 (oder als quasistationäre Differenzenlösung), sofern gilt*

$$A_n f_n = f_n . \tag{14}$$

Satz 2.4. *(Existenz der quasistationären Differenzenlösung.) Es sei $M_n \subset P_n$ eine Menge von Funktionen, für welche gilt*

$$0 \leqq f_n(x) \leqq \alpha x + b\alpha , \quad x \in \langle 0, \infty) \cap S_n^{(0)} , \tag{15}$$

und α die Konstante aus Satz 1.2 ist. Dann existiert in M_n eine quasistationäre Lösung des Problems 2.

Lemma 2.1. *Die Menge M_n aus Satz 2.4 ist kompakt.*

Beweis: Es sei $\{f_n^{(k)}\}$ eine beliebige Folge aus M_n. Weil nun für jede Funktion $f_n \in M_n$ (15) gilt, so ist es möglich aus der Folge $\{f_n^{(k)}\}$ eine Folge $\{f_n^{(k,0)}\}$ derart auszuwählen, dass die Zahlenfolge $\{f_n^{(k,0)}(0)\}$ konvergent ist. Aus der Folge $\{f_n^{(k,0)}\}$ können wir wiederum eine Folge $\{f_n^{(k,1)}\}$ so auswählen, dass auch $\{f_n^{(k,1)}(h_n)\}$ konvergiert usw. Die Diagonalfolge $\{f_n^{(k,k)}\}$ konvergiert offenbar in jedem Punkt $x = rh_n$, $r = 0, 1, 2, \ldots$. Wir setzen nun $f_n(x) = \lim_{k \to \infty} f_n^{(k,k)}(x)$. Vor allem einmal ist offenbar $f_n \in M_n$. Wir wählen $\varepsilon > 0$ und setzen $\varphi_n^{(k)}(x) = f_n^{(k,k)}(x) - f_n(x)$. Nach (15) gilt für jeden Knotenpunkt $x = rh_n$

$$\frac{|\varphi_n^{(k)}(x)|}{1 + x^3} \leqq \frac{2\alpha x + 2b\alpha}{1 + x^3}$$

und also ist es möglich $x_0 > 0$ so zu wählen, dass in jedem Knotenpunkt x, für welchen $x > x_0$ ist,

$$\left| \frac{\varphi_n^{(k)}(x)}{1 + x^3} \right| < \varepsilon$$

gilt und dies für alle k. Die Zahl der Knoten, für welche $x \leqq x_0$ ist, ist endlich und es ist deshalb möglich zu einem gegebenem $\varepsilon > 0$ $k(\varepsilon)$ so zu wählen, dass für jedes $x = rh_n$, $r = 0, 1, \ldots \left[\frac{x_0}{h_n}\right]$

$$k > k(\varepsilon) \Rightarrow \left| \frac{\varphi_n^{(k)}(x)}{1 + x^3} \right| < \varepsilon$$

gilt. Also gilt insgesamt

$$k > k(\varepsilon) \Rightarrow \left| \frac{\varphi_n^{(k)}(x)}{1 + x^3} \right| < \varepsilon$$

und auch

$$f_n^{(k,k)} \to f_n \quad \text{in} \quad P_n$$

und das Lemma ist bewiesen.

Beweis des Satzes 2.4: Die Menge M_n ist offenbar konvex und nach Lemma 2.1 auch kompakt. Wir beweisen ferner, dass die Abbildung A_n auf der Menge M_n stetig ist. Es seien also $f_n^{(1)}, f_n^{(2)} \in M_n$. Weiter sei $A_{1,n}$ die durch die Identität

$$(16) \qquad (A_{1,n}f_n)(x) = \sum_{r=\frac{b}{h_n}} \left(a_{\frac{t_0}{\tau_n}}\left(\frac{x}{h_n} - r\right) - a_{\frac{t_0}{\tau_n}}\left(\frac{x}{h_n} + r\right)\right) f_n(rh_n - b)$$

definierte Abbildung.

Dann gilt

$$(17) \qquad (A_nf_n)(x) = (A_{1,n}f_n)(x) + u_{2,n}(x, t_0)$$

und also ist

$$(18) \qquad |(A_nf_n^{(1)})(x) - (A_nf_n^{(2)})(x)| = |(A_{1,n}f_n^{(1)})(x) - (A_{1,n}f_n^{(2)})(x)| =$$

$$= \left| \sum_{x=\frac{b}{h_n}}^{\infty} \left(a_{\frac{t_0}{\tau_n}}\left(\frac{x}{h_n} - r\right) - a_{\frac{t_0}{h_n}}\left(\frac{x}{h_n} + r\right)\right)(f_n^{(1)}(rh_n - b) - f_n^{(2)}(rh_n - b))\right|.$$

Gemäss Definition der Norm im Raum P_n gilt in jedem Knotenpunkt

$$(19) \qquad |f_n^{(1)}(x) - f_n^{(2)}(x)| \leqq (1 + x^3)\, \| f_n^{(1)} - f_n^{(2)}\|.$$

Weil nun offenbar weiter gilt

$$\begin{aligned} &a_s(m - r) - a_s(m + r) \geqq 0 \qquad && \textit{für} \quad m, s, r = 0, 1, 2, \ldots, \\ &a_s(r) \geqq 0 && \textit{für} \quad s, r = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

und weil eine Konstante C_s (unabhängig von r) derart existiert, dass

$$|a_s(r)| \leqq \frac{C_s}{r^5}$$

gilt (denn die Funktion $(1 - 2\beta + 2\beta \cos x)^s$ ist beliebig oft stetig differenzierbar), so erhalten wir leicht aus (18) und (19), dass solche Konstanten α_i ($i = 0, 1, 2, 3$) unabhängig von x existieren, dass

$$|(A_nf_n^{(1)})(x) - (A_nf_n^{(2)})(x)| \leqq (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3)\, \|f_n^{(1)} - f_n^{(2)}\|$$

gilt und also existiert auch eine Konstante K von solcher Beschaffenheit, dass

$$\|A_nf_n^{(1)} - A_nf_n^{(2)}\| \leqq K\, \|f_n^{(1)} - f_n^{(2)}\|$$

gilt und daraus folgt die Stetigkeit des Operators A_n in M_n. Wir beweisen schliesslich, dass $f_n \in M_n \Rightarrow A_nf_n \in M_n$. Weil für $f_n \in M_n$

$$0 \leqq f_n(rh_n - b) \leqq \alpha rh_n$$

gilt, so gilt weiter

$$0 \leqq (A_{1,n}f_n)(x) \leqq \alpha h_n \sum_{r=0}^{\infty} \left(a_{\frac{t_0}{\tau_n}} \left(\frac{x}{h_n} - r \right) - a_{\frac{t_0}{\tau_n}} \left(\frac{x}{h_n} + r \right) \right) r =$$
$$= \alpha x \sum_{r=-\infty}^{\infty} a_{\frac{t_0}{\tau_n}}(r) = \alpha x$$

gemäss Definition der Zahlen $a_s(r)$,

$$0 \leqq u_{2,n}(x, t_0) = \sum_{s=1}^{\frac{t_0}{\tau_n}} \sum_{r=0}^{\infty} \left(a_{\frac{t_0}{\tau_n}-s} \left(\frac{x}{h_n} - r \right) - a_{\frac{t_0}{\tau_n}-s} \left(\frac{x}{h_n} + r \right) \right) z_n(rh_n, s\tau_n) \leqq$$
$$\leqq \tau_n G \sum_{s=1}^{\frac{t_0}{\tau_n}} \sum_{r=0}^{\infty} \left(a_{\frac{t_0}{\tau_n}-s} \left(\frac{x}{h_n} - r \right) - a_{\frac{t_0}{\tau_n}-s} \left(\frac{x}{h_n} + r \right) \right) \leqq$$
$$\leqq \tau_n G \sum_{s=1}^{\frac{t_0}{\tau_n}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{\frac{t_0}{\tau_n}-s}(r) = Gt_0 = b\alpha .$$

Also insgesammt

$$0 \leqq (A_n f_n)(x) \leqq \alpha x + b\alpha .$$

Es sind also die Voraussetzungen des Satzes 1.3 erfüllt und demzufolge existiert $f_n \in M_n$ derart, dass

$$f_n = A_n f_n$$

ist, was den Satz beweist.

Satz 2.5. *Es sei $\{\varphi_n^{(k)}\}$ eine Folge von Netzfunktionen, definiert durch die Vorschrift*

$$\varphi_n^{(k+1)}(x) = (A_{1,n}\varphi_n^{(k)})(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots ,$$
$$\varphi_n^{(0)}(x) \in M_{1,n} = \underset{\varphi}{E}[\varphi \in P_n , \ |\varphi(x)| \leqq \alpha x + b\alpha] , \tag{20}$$

$A_{1,n}$ ist durch die Formel (17) definiert; dann gilt

$$\|\varphi_n^{(k)}\|_{P_n} \to 0 \quad \text{für} \quad k \to \infty . \tag{21}$$

Auf Grund dieses Satzes beweisen wir analogisch wie in [1] folgende Sätze:

Satz 2.6. *(Eindeutigkeit der quasistationären Differenzenlösung.) In der Menge M_n aus Satz 2.4 existiert gerade nur eine quasistationäre Lösung des Problems 2.*

Satz 2.7. *(Konvergenz der schrittweisen Näherungen.) Es sei $f_n^{(0)} \in M_n$, $f_n^{(k+1)} = A_n f_n^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ Dann gilt*

$$\lim_{k \to \infty} \|f_n^{(k)} - f_n\|_{P_n} = 0 , \tag{22}$$

worin f_n die quasistationäre Lösung des Problems 2 ist.

Vor dem Beweis des Satzes 2.5 beweisen wir zuächst einige Hilfssätze:

Lemma 2.2. *Es sei $\{\psi_n^{(k)}\}$ eine Folge von Netzfunktionen, definiert durch die Vorschrift*

$$\psi_n^{(k+1)}(x) = (A_1\psi_n^{(k)})(x), \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad \psi_n^{(1)}(x) = \alpha x. \tag{23}$$

Dann ist $\{\psi_n^{(k)}\}$ konvergent in jedem festen Knoten $x = mh_n$, $m = 0, 1, 2, \ldots$

Beweis: Die Zahlenfolge $\{\psi_n^{(k)}(x)\}$ ($x = mh_n$ fest) ist offenbar nach unten begrenzt, sodass es genügt zu beweisen, dass sie fallend ist. Zu diesem Zweck setzen wir

$$\mu_n^{(1)}(x) = \psi_n^{(2)}(x) - \psi_n^{(1)}(x), \qquad \mu_n^{(k+1)}(x) = (A_{1,n}\mu_n^{(k)})(x), \; k = 1, 2, \ldots \tag{24}$$

Durch vollständige Induktion beweist man leicht, dass

$$\mu_n^{(k)}(x) = \psi_n^{(k+1)}(x) - \psi_n^{(k)}(x) \tag{25}$$

gilt.

Ich behaupte weiter, dass für jedes fest gewählte $k \geqq 1$

$$\mu_n^{(k)}(x + h_n) - \mu_n^{(k)}(x) \leqq 0 \tag{26}$$

gilt. Wir wollen diese Behauptung durch vollständige Induktion beweisen. Für $k = 1$ ist die Behauptung richtig, denn es ist

$$\mu_n^{(1)}(x + h_n) - \mu_n^{(1)}(x) = \psi_n^{(2)}(x + h_n) - \psi_n^{(1)}(x + h_n) - \psi_n^{(2)}(x) + \psi_n^{(1)}(x) = \\ = \psi_n^{(2)}(x + h_n) - \psi_n^{(2)}(x) - \alpha h_n$$

und

$$\psi_n^{(2)}(x + h_n) - \psi_n^{(2)}(x) = \sum_{r=\frac{b}{h_n}}^{\infty} \left(a_{\frac{t_0}{\tau_n}}\left(\frac{x}{h_n} + 1 - r\right) - a_{\frac{t_0}{\tau_n}}\left(\frac{x}{h_n} + 1 + r\right)\right) \alpha h_n \left(r - \frac{b}{h_n}\right) - \\ - \sum_{r=\frac{b}{h_n}}^{\infty} \left(a_{\frac{t_0}{\tau_n}}\left(\frac{x}{h_n} - r\right) - a_{\frac{t_0}{\tau_n}}\left(\frac{x}{h_n} + r\right)\right) \alpha h_n \left(r - \frac{b}{h_n}\right) = \\ = -\alpha h_n \sum_{r=\frac{b}{h_n}}^{\infty} \left(a_{\frac{t_0}{\tau_n}}\left(r - \frac{x}{h_n}\right) - a_{\frac{t_0}{\tau_n}}\left(r - 1 - \frac{x}{h_n}\right)\right)\left(r - \frac{b}{h_n}\right) - \\ - \alpha h_n \sum_{r=\frac{b}{h_n}}^{\infty} \left(a_{\frac{t_0}{\tau_n}}\left(r + 1 + \frac{x}{h_n}\right) - a_{\frac{t_0}{\tau_n}}\left(r + \frac{x}{h_n}\right)\right)\left(r - \frac{b}{h_n}\right) = \\ = \alpha h_n \sum_{r=\frac{b}{h_n}+1}^{\infty} a_{\frac{t_0}{\tau_n}}\left(\frac{x}{h_n} + 1 - r\right) + \alpha h_n \sum_{r=\frac{b}{h_n}+1}^{\infty} a_{\frac{t_0}{\tau_n}}\left(\frac{x}{h_n} + r\right) \leqq \alpha h_n,$$

wie man leicht durch Teilsummation feststellt. Wir wollen also voraussetzen, dass die Behauptung für $k = l \geqq 1$ richtig ist und beweisen sie für $k = l + 1$:

$$\mu_n^{(l+1)}(x + h_n) - \mu_n^{(l+1)}(x) =$$

$$= - \sum_{r=\frac{b}{h_n}}^{\infty} \left(a_{\frac{t_0}{\tau_n}}\left(r - \frac{x}{h_n}\right) - a_{\frac{t_0}{\tau_n}}\left(r - 1 - \frac{x}{h_n}\right)\right) \mu_n^{(l)}(rh_n - b) -$$

$$- \sum_{r=\frac{b}{h_n}}^{\infty} \left(a_{\frac{t_0}{\tau_n}}\left(r + 1 + \frac{x}{h_n}\right) - a_{\frac{t_0}{\tau_n}}\left(r + \frac{x}{h_n}\right)\right) \mu_n^{(l)}(rh_n - b) =$$

$$= \sum_{r=\frac{b}{h_n}+1}^{\infty} a_{\frac{t_0}{\tau_n}}\left(r - 1 - \frac{x}{h_n}\right) (\mu_n^{(l)}(rh_n - b) - \mu_n^{(l)}(rh_n - h_n - b)) +$$

$$+ \sum_{r=\frac{b}{h_n}+1}^{\infty} a_{\frac{t_0}{\tau_n}}\left(r + \frac{x}{h_n}\right) (\mu_n^{(l)}(rh_n - b) - \mu^{(l)}(rh_n - h_n - b)) \leqq 0$$

gemäss Induktionvoraussetzung. Die Beziehung (26) gilt also wirklich für jeden Knotenpunkt x und für jedes fest gewählte $k \geqq 1$. Also gilt für festes $k \geqq 1$

$$\mu_n^{(k)}(x) \leqq \mu_n^{(k)}(x - h_n) \leqq \mu_n^{(k)}(0) = 0$$

und infolgendessen gilt nach (24) und (25)

$$\psi_n^{(k+1)}(x) \leqq \psi_n^{(k)}(x)$$

für jedes x und $k = 1, 2, \ldots$, was das Lemma beweist.

Lemma 2.3. *Für die durch die Gleichungen* (23) *definierte Folge gilt für* $k = 1, 2, \ldots$

$$(27) \qquad 0 \leqq \psi_n^{(k)}(mh_n) \leqq \alpha \frac{\frac{t_0}{\tau_n}}{\frac{b}{h_n} + \frac{t_0}{\tau_n}} mh_n \quad \textit{für} \quad 0 \leqq m \leqq (k-1)\left(\frac{b}{h_n} + \frac{t_0}{\tau_n}\right),$$

$$\psi_n^{(k)}(mh_n) = \alpha(mh_n - (k-1)\,b) \quad \textit{für} \quad m \geqq (k-1)\left(\frac{b}{h_n} + \frac{t_0}{\tau_n}\right).$$

Beweis: Durch Induktion. Für $k = 1$ ist die Behauptung offenbar richtig. Wir werden also voraussetzen, dass die Behauptung für $k = s \geqq 1$ richtig ist und wollen sie für $k = s + 1$ beweisen. Definieren wir einen Operator $A_{1,n}^{(\tau_n)}$ welcher der Netzfunktion $p_n(x)$ die Netzfunktion

$$(28) \qquad (A_{1,n}^{(\tau_n)} p_n)(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(a_1\left(\frac{x}{h_n} - r\right) - a_1\left(\frac{x}{h_n} + r\right)\right) p_n(rh_n)$$

zuordnet, oder mit anderen Worten $A_{1,n}^{(\tau_n)}$ ist ein Operator, welcher der Funktion $p_n(x)$ die Lösung des Problems 2 für $q(t) \equiv 0$ an erster Zeitzeile zuordnet. (Siehe Def. 2.3.) Setzen wir weiter für $l = 0, 1, 2, \ldots \frac{t_0}{\tau_n}$.

$$(29)\quad p_n^{(l)}(mh_n) = \frac{\alpha\left((s-1)\frac{t_0}{\tau_n}+l\right)}{s\frac{b}{h_n}+(s-1)\frac{t_0}{\tau_n}+l}\, mh_n,\ m \leqq s\frac{b}{h_n}+(s-1)\frac{t_0}{\tau_n}+l\,,$$

$$p_n^{(l)}(mh_n) = \alpha(mh_n - sb)\,,\quad m \geqq s\frac{b}{h_n}+(s-1)\frac{t_0}{\tau_n}+l$$

und beweisen wir, dass in jedem Knoten $x = mh_n$

$$(30)\qquad (A_{1,n}^{(\tau_n)}p_n^{(l)})\,(x) \leqq p_n^{(l+1)}\,(x)\,,\ l = 0, 1, \ldots, \frac{t_0}{\tau_n}-1$$

gilt.

Offenbar gilt

$$(31)\qquad (A_{1,n}^{(\tau_n)}p_n^{(l)})\,(mh_n) = \frac{\alpha\left((s-1)\frac{t_0}{\tau_n}+l\right)}{s\frac{b}{h_n}+(s-1)\frac{t_0}{\tau_n}+l}\, mh_n \leqq$$

$$\leqq \alpha\,\frac{\left((s-1)\frac{t_0}{\tau_n}+l+1\right)}{s\frac{b}{h_n}+(s-1)\frac{t_0}{\tau_n}+l+1}\, mh_n = p_n^{(l+1)}(mh_n)$$

für

$$m \leqq s\frac{b}{h_n}+(s-1)\frac{t_0}{\tau_n}+l-1\,,$$

$$(32)\qquad (A_{1,n}^{(\tau_n)}p_n^{(l)})\,(mh_n) = \alpha(mh_n - sb) = p_n^{(l+1)}(mh_n)$$

für $m \geqq s\frac{b}{h_n}+(s-1)\frac{t_0}{\tau_n}+l+1$, sodass es bleibt den Ausdruck $(A_{1,n}^{(\tau_n)}p_n^{(l)})\,(m_0h_n)$ zu untersuchen, in welchem $m_0 = s\frac{b}{h_n}+(s-1)\frac{t_0}{\tau_n}+l$ ist:

$$(A_{1,n}^{(\tau_n)}p_n^{(l)})\,(m_0h_n) = \beta\alpha h_n\,\frac{(s-1)\frac{t_0}{\tau_n}+l}{s\frac{b}{h_n}+(s-1)\frac{t_0}{\tau_n}+l}\left(s\frac{b}{h_n}+(s-1)\frac{t_0}{\tau_n}+l-1\right)+$$

$$+(1-2\beta)\,\alpha h_n\left((s-1)\frac{t_0}{\tau_n}+l\right)+\beta\alpha h_n\left((s-1)\frac{t_0}{\tau_n}+l+1\right) =$$

$$= \alpha h_n\left((s-1)\frac{t_0}{\tau_n}+l\right)+\beta\alpha h_n\,\frac{s\frac{b}{h_n}}{s\frac{b}{h_n}+(s-1)\frac{t_0}{\tau_n}+l} \leqq$$

$$\leqq \alpha h_n\,\frac{(s-1)\frac{t_0}{\tau_n}+l+1}{s\frac{b}{h_n}+(s-1)\frac{t_0}{\tau_n}+l+1}\left(s\frac{b}{h_n}+(s-1)\frac{t_0}{\tau_n}+l\right) = p_n^{(l+1)}(m_0h_n)\,,$$

was in Verbindung mit (31) und (32) die Ungleichung (30) beweist. Setzen wir weiter

$$p_n(x) = 0 \qquad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq b\ ,$$
$$p_n(x) = \psi_n^{(s)}(x - b) \quad \text{für} \quad x \geqq b\ .$$

Aus (28) folgt, dass

$$\psi_n^{(s+1)}(x) = ((A_{1,n}^{(\tau_n)})^{\frac{t_0}{\tau_n}})\ (x)$$

ist. Weiter folgt nach der Induktionvoraussetzung, dass

$$p_n(x) \leqq p_n^{(0)}(x)$$

gilt.
Daraus ergibt sich

$$\psi_n^{(s+1)}(x) = ((A_{1,n}^{(\tau_n)})^{\frac{t_0}{\tau_n}}\ p_n)\ (x) \leqq ((A_{1,n}^{(\tau_n)})^{\frac{t_0}{\tau_n}}\ p_n^{(0)})\ (x)$$

und durch wiederholte Anwendung von (30)

$$\psi_n^{(s+1)}(x) \leqq p^{\left(\frac{t_0}{\tau_n}\right)}(x)\ ,$$

was (27) beweist für $k = s + 1$. Das Lemma ist damit bewiesen.

Lemma 2.4. *Die durch die Gleichungen* (23) *definierte Folge* $\{\psi_n^{(k)}\}$ *konvergiert nach Null für jedes feste* $x = mh_n$.

Beweis: Vorausgeschickt sei, dass für jede Folge von Netzfunktionen $\{\eta_n^{(k)}\}$, für welche

$$0 \leqq \eta_n^{(1)}(x) \leqq \alpha x\ ,$$
$$\eta_n^{(k+1)} = A_{1,n}\eta_n^{(k)}\ ,\ \ k = 1, 2, \ldots$$

gilt, in jedem fest gewähltem Punkte x auch

$$(33) \qquad 0 \leqq \limsup_{k\to\infty} \eta_n^{(k)}(x) \leqq \alpha \frac{\dfrac{t_0}{\tau_n}}{\dfrac{t_0}{\tau_n} + \dfrac{b}{h_n}}\ x$$

gilt, denn offenbar gilt

$$\limsup_{k\to\infty} \eta_n^{(k)}(x) \leqq \lim_{k\to\infty} \psi_n^{(k)}(x)$$

und

$$\psi_n^{(k)}(x) \leqq \alpha \frac{\dfrac{t_0}{\tau_n}}{\dfrac{t_0}{\tau_n} + \dfrac{b}{h_n}}\ x$$

für hinreichend grosse k. Aus der Ungleichung (33) beweisen wir schon leicht (Siehe [1], Lemma 3.11) die aufgestellte Behauptung.

Beweis des Satzes 2.5: Für die durch die Gleichungen (20) und (21) definierte Folge gilt

$$|\varphi_n^{(k)}(x)| \leqq \psi_n^{(k)}(x) \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots \tag{34}$$

Da andererseits $\psi_n^{(k)}(x) \leqq \alpha x$ für $k = 1, 2, \ldots$ ist, so folgt (21) aus (34) und dem Lemma 2.4.

3. KONVERGENZ DER QUASISTATIONÄREN DIFFERENZENLÖSUNGEN

Ziel dieses Abschnittes ist es den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 3.1. *Es sei $f_n(x)$ die quasistationäre Lösung des Problems 2 (auf dem Netz S_n). Weiter sei $f(x)$ die quasistationäre Lösung des Problems 1. Wir definieren zusätzlich die Funktion $f_n(x)$ in den Punkten $x_0 < x < x_0 + h_n$, worin x_0 einen Knotenpunkt bedeutet, als linear. Dann ist*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_P = 0\,. \tag{1}$$

Ehe wir zur Formulierung der zum Beweis des Satzes 3.1 nötigen Hilfssätze schreiten, treffen wir folgende Vereinbarung: Es sei $u_n(x, t)$ eine Funktion definiert auf dem Netz S_n. Wir ordnen der Funktion u_n eine stetige Funktion $\tilde{u}_n$ durch die Vorschrift $\tilde{u}_n(x, t) = u_n(x, t)$ für jeden Knotenpunkt $[x, t] \in S_n$, im Dreieck mit den Ecken $[x, t]$, $[x + h_n, t]$, $[x, t + \tau_n]$ und im Dreieck mit den Ecken $[x, t + \tau_n]$, $[x + h_n, t + \tau_n]$, $[x + h_n, t]$ ist $\tilde{u}_n$ linear, zu. Immer, wenn wir von der Funktion $u_n(x, t)$ in Punkten ausserhalb des Netzes S_n sprechen werden, werden wir darunter die Funktion $\tilde{u}_n(x, t)$ verstehen.

Lemma 3.1. *Es sei u_n eine auf $(\langle 0, \infty) \times \langle 0, T\rangle) \cap S_n$ definierte Netzfunktion, für welche in jedem Knotenpunkt $[x, t] \in (0, \infty) \times \langle 0, T)$*

$$L(u_n) \equiv \frac{1}{a}\, u_{nx\bar{x}}(x, t) - u_t(x, t) \geqq 0 \tag{2}$$

bezw.

$$L(u_n) \leqq 0 \tag{2'}$$

gilt. (Hier wurde gesetzt

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &\equiv \frac{u(x + h_n, t) - u(x, t)}{h_n}\,, \\ u_{\bar{x}}(x, t) &\equiv \frac{u(x, t) - u(x - h_n, t)}{h_n}\,, \\ u_t(x, t) &\equiv \frac{u(x, t + \tau_n) - u(x, t)}{\tau_n}\,; \end{aligned} \tag{3}$$

diese Bezeichnung werden wir weiterhin oft verwenden.) Es sei $u_n(x, 0)$ nichtpositiv bezw. nichtnegativ auf $\langle 0, \infty)$ und $u_n(0, t)$ nichtpositiv bezw. nichtnegativ *auf* $\langle 0, T)$. *Dann gilt für die Funktion* $u_n(x, t)$ *überall in* $(\langle 0, \infty) \times \langle 0, T)) \cap S_n$

$$u_n(x, t) \leqq 0 \tag{4}$$

bezw.

$$u_n(x, t) \geqq 0 \,. \tag{4'}$$

Beweis: Das Lemma wird leicht durch vollständige Induktion nach den Zeitspalten bewiesen.

Lemma 3.2. *Es sei* $u_{2,n}^{(m)}(x, t)$ *eine Netzfunktion, welche den Gleichungen*

$$-L(u_{2,n}^{(m)}) = \frac{1}{\tau_n} z_n^{(m)}(x, t + \tau_n)\,, \quad [x, t] \in (0, \infty) \times \langle 0, T)\,, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} u_{2,n}^{(m)}(x, 0) &= 0\,, \quad x \in \langle 0, \infty)\,, \\ u_{2,n}^{(m)}(0, t) &= 0\,, \quad x \in \langle 0, T)\,, \end{aligned} \tag{5'}$$

genügt, wo

$$\begin{aligned} z_n^{(m)}(x, t) &= z_n(x, t) & &\text{für} \quad x \in (0, (m + 1)\, b) \cap S_n^{(0)}\,, \\ z_n^{(m)}((m + 1)\, b, t) &= \tfrac{1}{2} \int_{t-\tau_n}^{t} q(s + mt_0)\, ds\,, & & \\ z_n^{(m)}(x, t) &= 0 & &\text{für} \quad x \in ((m + 1)\, b, \infty) \cap S_n^{(0)} \end{aligned} \tag{6}$$

bedeutet. (Siehe Definition 2.3.) Es sei $u_{2,n}(x, t)$ *eine. Funktion definiert durch Formel* (8) *in Satz* 2.1. *Dann gilt für jedes fest gewählte* $t \in (0, T) \cap S_n^{(1)}$

$$\lim_{m \to \infty} \|u_{2,n}^{(m)}(x, t) - u_{2,n}(x, t)\|_P = 0 \tag{7}$$

gleichmässig in Bezug auf n.

Beweis: Vor allem ergibt sich aus dem Beweis des Satzes 2.1, dass gerade eine Funktion $u_{2,n}^{(m)} \in B_n$ existiert, für welche (5), (5′) gilt. Wir setzen nun

$$\varphi_n^{(m)}(x, t) = u_{2,n}(x, t) - u_{2,n}^{(m)}(x, t)\,.$$

Für diese Funktion gilt

$$-L(\varphi_n^{(m)}) = \frac{1}{\tau_n} \xi_n^{(m)}(x, t + \tau_n)\,, \quad [x, t] \in ((0, \infty) \times \langle 0, T)) \cap S_n\,,$$
$$\varphi_n^{(m)}(x, 0) = \varphi_n^{(m)}(0, t) = 0$$

und

$$\begin{aligned} \xi_n^{(m)}(x, t) &= 0 & &\text{für} \quad x \in (0, (m + 1)\, b) \cap S_n^{(0)}\,, \\ \xi_n^{(m)}(x, t) &= \tfrac{1}{2} \int_{t-\tau_n}^{t} q(s + (m + 1)\, t_0)\, ds\,, & & \\ \xi_n^{(m)}(x, t) &= z_n(x, t) & &\text{für} \quad x \in ((m + 1)\, b, \infty) \cap S_n^{(0)}\,. \end{aligned}$$

Setzen wir weiter

$$\psi_n^{(m)}(x, t) = \frac{Gtx}{(m + 1)\, b}$$

($G = \operatorname{Sup}_{t \in \langle 0, \infty)} q(t)$). Für diese Funktion gilt offenbar

$$L(\psi_n^{(m)}) = -\frac{Gx}{(m+1)\,b}$$

und also gilt für die Funktion $\psi_n^{(m)} - \varphi_n^{(m)}$ in jedem Knotenpunkt $[x, t] \in \in (0, \infty) \times \langle 0, T)$

$$L(\psi_n^{(m)} - \varphi_n^{(m)}) = -\frac{Gx}{(m+1)\,b} + \frac{1}{\tau_n}\,\xi_n^{(m)}(x, t + \tau_n) \leqq 0$$

und

$$\psi_n^{(m)}(x, 0) - \varphi_n^{(m)}(x, 0) = \psi_n^{(m)}(0, t) - \varphi_n^{(m)}(0, t) = 0\,.$$

Daraus erhalten wir aber nach Lemma 3.1, dass in allen Knotenpunkten $[x, t] \in \langle 0, \infty) \times \langle 0, T)$

(8) $$\varphi_n^{(m)}(x, t) \leqq \frac{Gtx}{(m+1)\,b}$$

gilt.

Da aber andererseits offenbar auch $\varphi_n^{(m)} \geqq 0$ gilt, so folgt die aufgestellte Behauptung leicht aus (8).

Lemma 3.3. *Es sei $u_2^{(m)}(x, t)$ eine Lösung des folgenden Problems:*

(a) $u_2^{(m)}(x, t)$ hat in $R_k^{(m)}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, m + 1$, $R_k^{(m)} = R_k$ nach Definition 1.1 für $k = 0, 1, \ldots, m$, $R_{m+1}^{(m)} = \underset{[x,t]}{E}\,[(m+1)\,b < x < \infty,\ 0 < t < T]$) stetige partielle Ableitungen $\partial u_2^{(m)}/\partial t$, $\partial^2 u_2^{(m)}/\partial x^2$ und genügt der Gleichung

(9) $$\frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial t} = \frac{1}{a}\,\frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial x^2} + z^{(m)}(x, t)\,, \quad [x, t] \in R_k^{(m)},\ k = 0, 1, \ldots, m + 1\,,$$

in welcher

(10) $$\begin{aligned} z^{(m)}(x, t) &= z(x, t) && \text{für} \quad x < (m+1)\,b\,, \\ z^{(m)}(x, t) &= 0 && \text{für} \quad x > (m+1)\,b\,, \\ z(x, t) &= q(t + kt_0) && \text{für} \quad [x, t] \in R_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

ist.

(b) Die Ableitungen $\partial u_2^{(m)}/\partial t$, $\partial u_2^{(m)}/\partial x$ sind in $(0, \infty) \times (0, T)$ stetig.

(c) $u_2^{(m)}(x, t)$ ist in $\langle 0, \infty) \times \langle 0, T)$ stetig und

(11) $$u_2^{(m)}(x, 0) = u_2^{(m)}(0, t) = 0\,.$$

Es sei weiter $u_2(x, t)$ die Lösung des Problems 1 für $p(x) \equiv 0$ (nach Definition 1.1). Dann gilt für jedes fest gewählte $t \in (0, T)$

(12) $$\lim_{m \to \infty} \|u_2^{(m)}(x, t) - u_2(x, t)\|_P = 0\,.$$

Beweis: Aus dem Beweis des Satzes 1.1 (siehe [1]) folgt, dass gerade eine Funktion $u_2^{(m)} \in B$ mit den im Lemma beschriebenen Eigenschaften existiert. Die Beziehung (12) wird ganz analog wie (7) in Lemma 3.2 bewiesen.

Lemma 3.4. *Es sei*

(13) $$w^{(0)}(x,t) = v_1^{(0)}(t) + v_2^{(0)}(x,t) \quad \text{für} \quad x \leqq (m+1)\,b,\ t \geqq -mt_0\,,$$
$$w^{(0)}(x,t) = v_1^{(0)}(t) + v_3^{(0)}(x,t) \quad \text{für} \quad x \geqq (m+1)\,b,\ t \geqq -mt_0,$$

(14) $$w^{(k)}(x,t) = w^{(k-1)}(x,t) + v_1^{(k)}(t) + v_2^{(k)}(x,t) \quad \text{für} \quad x \leqq (m+1-k)\,b,\ t \geqq -(m-k)\,t_0$$
$$w^{(k)}(x,t) = w^{(k-1)}(x,t) + v_1^{(k)}(t) + v_3^{(k)}(x,t) \quad \text{für} \quad x \geqq (m+1-k)\,b,\ t \geqq -(m-k)\,t_0\,;$$
$$k = 1, 2, \ldots, m,$$

worin

(15) $$v_1^{(k)}(t) = \int_{-(m-k)t_0}^{t} q_k(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad k = 0, 1, \ldots, m\,,$$

(16) $$q_0(t) = \tfrac{1}{2}\,q(t + mt_0)\,,$$
$$q_k(t) = \tfrac{1}{2}\,(q(t + (m-k)\,t_0) - q(t + (m-k+1)\,t_0)),\ k = 1, 2, \ldots, m$$

($q(t)$ ist die Funktion gemäss Definition 1.1), $v_2^{(k)}(x,t)$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ ist eine in $(-\infty, (m+1-k)\,b\rangle \times \langle -(m-k)\,t_0, T)$ stetige Funktion, für welche gilt

(17) $$\frac{\partial v_2^{(k)}}{\partial t} = \frac{1}{a}\frac{\partial^2 v_2^{(k)}}{\partial x^2} + q_k(t)\,,\ [x,t] \in (-\infty, (m+1-k)\,b) \times (-(m-k)\,t_0, T)\,,$$

(18) $$v_2^{(k)}(x, -(m-k)\,t_0) = v_2^{(k)}((m+1-k)\,b, t) = 0\,,$$

und $v_3^{(k)}(x,t)(k = 0, 1, \ldots, m)$ ist eine in $\langle m+1-k)\,b, \infty) \times \langle -(m-k)\,t_0, T)$ stetige Funktion, für welche

(19) $$\frac{\partial v_3^{(k)}}{\partial t} = \frac{1}{a}\frac{\partial^2 v_3^{(k)}}{\partial x^2} - q_k(t)\,,\ [x,t] \in ((m+1-k)\,t_0, \infty) \times (-(m-k)\,t_0, T)\,,$$

(20) $$v_3^{(k)}(x, -(m-k)\,t_0) = v_3^{(k)}((m+1-k)\,b, t) = 0$$

gilt. Dann ist die Funktion $w^{(m)}(x,t)$ stetig und beschränkt in $\langle 0, \infty) \times \langle 0, T)$ und genügt den Forderungen (a) und (b) aus dem Lemma 3.3.

Beweis: (Siehe [4].) Wir untersuchen zuerst die Funktion $w^{(0)}(x,t)$. Wie sich aus dem Bewies des Satzes 1.1 ergibt, existiert vor allem gerade eine Funktion $v_2^{(0)} \in B$ bezw. $v_3^{(0)} \in B$, welche die Gleichungen (17), (18) bezw. (19), (20) erfüllt. Ausserdem gilt

(21) $$v_2^{(0)}(x,t) = v_1^{(0)}(t) - F_2^{(0)}(x,t)\,,$$

(22) $$v_3^{(0)}(x,t) = -\,v_1^{(0)}(t) - F_3^{(0)}(x,t)\,.$$

Hier ist $F_2^{(0)}$ bezw. $F_3^{(0)}$ eine in $(-\infty, (m+1)\,b\rangle \times \langle -mt_0, T)$ bezw. $\langle (m+1)\,b, \infty) \times \langle -mt_0, T)$ stetige Funktion, für welche in jedem innern Punkt des Definitonsbereichs

(23) $$\frac{\partial F_2^{(0)}}{\partial t} - \frac{1}{a}\frac{\partial^2 F_2^{(0)}}{\partial x^2} = 0$$

bezw.

$$\frac{\partial F_3^{(0)}}{\partial t} - \frac{1}{a}\frac{\partial^2 F_3^{(0)}}{\partial x^2} = 0 \tag{24}$$

und ferner

$$F_2^{(0)}(x, -mt_0) = 0\,, \quad F_2^{(0)}((m+1)\,b, t) = v_1^{(0)}(t)\,, \tag{25}$$

$$F_3^{(0)}(x, -mt_0) = 0\,, \quad F_3^{(0)}((m+1)\,b, t) = -\,v_1^{(0)}(t) \tag{26}$$

gilt. Weiter gilt, wie man leicht durch Anwendung der Laplace-Transformation (siehe z. B. [5]) feststellt,

$$F_2^{(0)}(x, t) = \frac{\sqrt{a}\,((m+1)\,b - x)}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{t+mt_0} \frac{1}{\tau^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{a((m+1)b-x)^2}{4\tau}}\, v_1(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau \tag{27}$$

und

$$F_3^{(0)}(x, t) = -\,F_2^{(0)}(2(m+1)\,b - x, t)\,. \tag{28}$$

Aus (21), (22) (27), und (28) folgt durch eine leichte Rechnung, dass die Funktion $w^{(0)}(x, t)$ in $(-\infty, \infty) \times \langle -mt_0, T)$ stetig und beschränkt ist, sie hat innerhalb dieses Bereichs stetige partielle Ableitungen $\partial w^{(0)}/\partial t$, $\partial w^{(0)}/\partial x$ und genügt den Gleichungen

$$\frac{\partial w^{(0)}}{\partial t} = \frac{1}{a}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial x^2} + q(t + mt_0) \quad \text{für} \quad x < (m+1)\,b\,,$$

$$\frac{\partial w^{(0)}}{\partial t} = \frac{1}{a}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial x^2} \quad \text{für} \quad x > (m+1)\,b\,.$$

Schreiten wir nun ganz analogisch weiter fort, so erhalten wir für die Funktion $w^{(m)}(x, t)$ den Beweis der aufgestellten Behauptung.

Lemma 3.5. *Es sei $u_n(x, t)$ eine Netzfunktion definiert im Rechteck $\bar{Q} \cap S_n$, $Q = \underset{(x,t)}{E}\,[-c_1 < x < c_2,\ 0 < t < T]$, für welche gilt*

$$|u_n(x, t)| \leqq K_1 \qquad \textit{für} \quad (x, t) \in \bar{Q} \cap S_n\,, \tag{29}$$

$$L(u_n) \equiv \frac{1}{a}\, u_{nx\bar{x}} - u_{nt}(x, t) = 0 \quad \textit{für} \quad (x, t + \tau_n) \in Q \cap S_n\,. \tag{30}$$

Es sei $Q_1 = \underset{[x,t]}{E}\,[-c_2 < x < c_2,\ 0 < t < T]$; $c_2 < c_1$ und c_1, c_2 seien so gewählt, dass die Geraden $x = c_1, x = c_2$, von einem bestimmten n angefangen, Netzgerade seien. Dann gilt für jeden Knotenpunkt $[x, t] \in Q_1$

$$u_{nx}^2 \leqq \frac{3CK_1^2}{t(c_2^2 - x^2)^2} \tag{31}$$

mit der Konstanten C unabhängig von n.

Beweis: Es sei $g_1(x, t)$ eine Netzfunktion, definiert durch die Beziehung

$$g_1(x, t) = u_{nx}^2 F + C g_2,\ [x, t] \in \bar{Q}_1 \cap S_n\,, \tag{32}$$

in welcher

$$F(x, t) = t(c_2^2 - x^2)^2\,, \quad g_2(x, t) = u_n^2(x + h_n, t) + u_n^2(x - h_n, t) + + u_n^2(x, t + \tau_n)$$

und C eine Konstante ist. Wir wollen beweisen, dass es möglich ist die Konstante so C gross zu wählen, dass

$$L(g_1) \geqq 0 \quad \text{in} \quad Q_1 \cap S_n \tag{33}$$

gilt. Weil

$$L(\varphi\psi) = \varphi L(\psi) + \psi L(\varphi) + \frac{1}{a}\varphi_x\psi_x + \frac{1}{a}\varphi_{\bar{x}}\psi_{\bar{x}} - \tau_n\varphi_t\psi_t \tag{34}$$

gilt, so ist

$$L(g_1) = u_{nx}^2 L(F) + F L(u_{nx}^2) + \frac{1}{a}(u_{nx}^2)_x F_x + \frac{1}{a}(u_{nx}^2)_{\bar{x}} F_{\bar{x}} - - \tau_n (u_{nx}^2)_t F_t + C L(v_2)\,.$$

Nach (34) ist weiter

$$L(u_n^2) = \frac{1}{a}u_{nx}^2 + \frac{1}{a}u_{n\bar{x}}^2 - \tau_n u_{nt}^2 = \frac{1}{a}u_{nx}^2 + \frac{1}{a}u_{n\bar{x}}^2 - \tau_n\frac{1}{a^2}u_{nx\bar{x}}^2 =$$

$$= (1 - 2\beta)\frac{1}{a}u_{nx}^2 + (1 - 2\beta)\,u_{n\bar{x}}^2 + \frac{1}{a}\beta\,(u_{nx} + u_{n\bar{x}})^2$$

und ähnlich

$$L(u_{nx}^2) = (1 - 2\beta)\,u_{nxx}^2 + (1 - 2\beta)\,u_{nn\bar{x}}^2 + \frac{1}{a}\beta(u_{nxx} + u_{nx\bar{x}})^2\,,$$

denn es ist $L(u_{nx}) = 0$. Weil gilt

$$(u_{nx}^2)_x = \frac{1}{h_n}(u_{nx}^2(x + h_{n,t}) - u_{nx}^2(x, t)) = (u_{nx}(x + h_n, t) + u_{nx})\,u_{nxx}\,,$$

$$(u_{nx}^2)_{\bar{x}} = \frac{1}{h_n}(u_{nx}^2(x, t) - u_{nx}^2(x - h_n, t)) = (u_{nx} + u_{nx}(x - h_n, t))\,u_{nx\bar{x}}\,,$$

$$\tau_n(u_{nx}^2)_t = u_{nx}^2(x, t + \tau_n) - u_{nx}^2$$

und $F \geqq 0$, $F_t \geqq 0$, ist

$$L(g_1) \geqq C(1 - 2\beta)\frac{1}{a}[u_{nx}^2(x + h_n, t) + u_{nx}^2(x, t) + u_{nx}^2(x - h_n, t) +$$

$$+ u_{n\bar{x}}^2(x - h_n, t) + u_{nx}^2(x, t + \tau_n) + u_{n\bar{x}}^2(x, t + \tau_n)] - F_t u_{nx}^2(x, t + \tau_n) +$$

$$+ (1 - 2\beta)\frac{1}{a}F\,(u_{nxx}^2 + u_{nx\bar{x}}^2) + \frac{1}{a}F_x(u_{nx}(x + h_n, t) + u_{nx})\,u_{nxx} +$$

$$+ \frac{1}{a}F_{\bar{x}}\,(u_{nx} + u_{nx}(x - h_n, t))\,u_{nx\bar{x}} + u_{nx}^2 L(F)\,.$$

Ferner gilt

$$(1-2\beta)\, F u_{nxx}^2 + F_x(u_{nx}(x+h_n, t) + u_{nx})\, u_{nxx} =$$
$$= (1-2\beta)\, t(c_2^2 - x^2)^2\, u_{nxx}^2 - 2t(c_2^2 - x^2)\,(2x+h_n)\,(u_{nx}(x+h_n, t) + u_{nx})\, u_{nxx} +$$
$$+ (2x+h_n)^2\, t h_n (u_{nx}(x+h_n, t) + u_{nx})\, u_{nxx} =$$
$$= (1-2\beta)\, t \left[(c_2^2 - x^2)\, u_{nxx} - \frac{2x+h_n}{1-2\beta}\,(u_{nx}(x+h_n, t) + u_{nx}) \right]^2 -$$
$$- t\,\frac{(2x+h_n)^2}{1-2\beta}\,(u_{nx}(x+h_n, t) + u_{nx})^2 + (2x+h_n)\, t\,(u_{nx}^2(x+h_n, t) - u_{nx}^2) \geqq$$
$$\geqq - t\,\frac{(2x+h_n)^2}{1-2\beta}\,(u_{nx}^2(x+h_n, t) + u_{nx}^2 + 2u_{nx}u_{nx}(x+h_n, t) -$$
$$- (1-2\beta)\, u_{nx}^2(x+h_n, t) + (1-2\beta)\, u_{nx}^2) \geqq$$
$$\geqq - \frac{t(2x+h_n)^2}{1-2\beta}\,(2u_{nx}^2 + u_{nx}^2(x+h_n, t) + 2u_{nx}u_{nx}(x+h_n, t)) \geqq$$
$$\geqq - \frac{t(2x-h_n)^2}{1-2\beta}\,(3u_{nx}^2 + 2u_{nx}^2(x+h_n, t))$$

und analog

$$(1-2\beta)\, F u_{nx\bar{x}}^2 + F_{\bar{x}}(u_{nx} + u_{nx}(x-h_n, t))\, u_{nx\bar{x}} \geqq$$
$$\geqq - \frac{t\,(2x-h_n)^2}{1-2\beta}\,(3u_{nx}^2 + 2u_{nx}^2(x-h_n, t))\,,$$

also insgesamt

$$L(g_1) \geqq C(1-2\beta)\frac{1}{a}[u_{nx}^2(x+h_n, t) + u_{nx}^2(x, t) + u_{nx}^2(x-h_n, t) + u_{nx}^2(x, t+\tau_n)] -$$
$$- F_t u_{nx}^2(x, t+\tau_n) - \frac{t(2x+h_n)^2}{1-2\beta}\,\frac{1}{a}\,(3u_{nx}^2(x, t) + 2u_{nx}^2(x+h_n, t)) -$$
$$- \frac{t(2x-h_n)^2}{1-2\beta}\,\frac{1}{a}\,(3u_{nx}^2(x, t) + 2u_{nx}^2(x-h_n, t)) + u_{nx}^2 L(F) =$$
$$= \frac{1}{a}\left[(1-2\beta)\, C - \frac{2t(2x+h_n)^2}{1-2\beta}\right] u_{nx}^2\,(x+h_n, t) +$$
$$+ \frac{1}{a}\left[(1-2\beta)\, C - \frac{2t(2x-h_n)^2}{1-2\beta}\right] u_{nx}^2(x-h_n, t) +$$
$$+ \frac{1}{a}\left[(1-2\beta)\, C - \frac{3t(2x+h_n)^2}{1-2\beta} - \frac{3t(2x-h_n)^2}{1-2\beta} + a\, L(F)\right] u_{nx}^2(x, t) +$$
$$+ \left[(1-2\beta)\,\frac{1}{a}\, C - F_t\right] u_{nx}^2(x, t+\tau_n)$$

und daraus ist ersichtlich, dass es in der Tat möglich ist die Konstante $C > 0$ unanhängig von n so zu wählen, dass überall in $Q_1 \cap S_n$ (33) gültig ist. Aus (33) ergibt sich dann aber (analog wie beim Beweis des Lemmas 3.1), dass g_1 auf der parabolischen Grenze der Menge Q_1 Maximalwerte erreicht. Daraus folgt aber die Gültigkeit von (31). (Über den Beweis der analogen Behauptung für den Operator $L_1(u) = u_{x\bar{x}} - u_{\bar{t}}$ siehe [6].)

Bemerkung 3.1. *Wenn unter den Voraussetzungen des Lemmas 3.5 überdies gilt, dass* $|u_{nx}(x, 0)| \leqq K$ *gleichmässig in Bezug auf* n *ist, so beweisen wir leicht durch einen analogen Vorgang wie oben, wenn wir die Hilfsfunktion* $F(x, t)$ *der Form* $(c_2^2 - x^2)^2$ *wählen, die Gültigkeit der Ungleichung*

$$u_{nx}^2 \leqq \frac{K^2 c_2^4 + 3CM^2}{(c_2^2 - x^2)^2}\,, \quad [x, t] \in Q_1 \cap S_n\,. \tag{35}$$

Lemma 3.6. *Es sei* $\omega_n(x, t)$ *eine in* $\langle 0, \infty) \times \langle 0, T)$ *definierte Netzfunktion, für welche gelten möge:*

(*a*) *in jedem Knotenpunkt* $[x, t] \in (0, \infty) \times \langle 0, T)$ *sei*

$$\omega_{nt}(x, t) - \frac{1}{a}\,\omega_{nx\bar{x}}(x, t) = 0\,, \tag{36}$$

(37) (*b*)
$$\omega_n(x, 0) = f_1(x)\,,$$
$$\omega_n(0, t) = f_2(t)\,,$$

$f_1(x)$ *sei stetig und beschränkt auf* $\langle 0, \infty)$, $f_2(t)$ *sei stetig auf* $\langle 0, T\rangle$. *Dann existiert gerade eine Funktion*, $\omega(x, t) \in B$, *welche die Gleichungen*

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{a}\,\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\,, \quad [x, t] \in (0, \infty) \times (0, T)\,, \tag{38}$$

(39)
$$\omega(x, 0) = f_1(x)\,, \quad 0 < x < \infty\,,$$
$$\omega(0, t) = f_2(t)\,, \quad 0 < t < T$$

erfüllt und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n(x, t) = \omega(x, t)$$

gleichmässig auf jedem endlichen Bereich Q *von solcher Beshaffenheit, dass* $\bar{Q} \subset (0, \infty) \times (0, T)$.

Beweis: Mit Hilfe des Lemmas 3.5 und des Satzes von Arzela beweisen wir leicht, dass eine Teilfolge $\{\omega_{n_k}\}$ existiert für welche gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \omega_{n_k} = \Omega$ gleichmässig auf jedem endlichen Q von solcher Bechraffenheit, dass $\bar{Q} \subset (0, \infty) \times \times (0, T)$ ist und dass $\Omega(x, t)$ für jedes $[x, t] \in (0, \infty) \times (0, T)$ die Gleichung (38) erfüllt. (Siehe [6].) Wir wollen weiter beweisen, dass gilt

$$\lim_{\substack{[x,t]\to[0,\tilde{t}]\\ [x,t]\in(0,\infty)\times(0,T)}} \Omega(x, t) = f_2(\tilde{t})\,, \tag{40}$$

$$\lim_{\substack{[x,t]\to[\tilde{x},0]\\ [x,t]\in(0,\infty)\times(0,T)}} \Omega(x, t) = f_1(\tilde{x})\,. \tag{41}$$

Wir wollen zunächst die Gleichheit von (40) beweisen. (Der Beweis der Gleichheit von (41) erfolgt ganz analog.) Wir setzen

$$v(x, t) = \left(x - \frac{1}{a}(t - \tilde{t})\right)^{\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1\,, \quad D_\delta = \underset{[x,t]}{E}\,[0 < x < \delta, \tilde{t} - \delta < t < \tilde{t}].$$

Die Funktion $v(x, t)$ ist stetig in $\overline{D}_\delta$, weiter ist $v(0, \tilde{t}) = 0$ und $v(x, t) > 0$ für alle übrigen Punkte aus $\overline{D}_\delta$ und für hinreichend kleines δ ist $L(v) \leqq 0$ für alle Knotenpunkte $[x, t + \tau_n] \in D_\delta$ von einem bestimmten n angefangen, wie man leicht feststellt. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig und es sei K_ε eine solche Umgebung des Punktes $[0, \tilde{t}]$, dass für jeden Knotenpunkt $[0, t] \in K_\varepsilon$ gilt

$$|\omega_{n_k}(0, \tilde{t}) - f_2(\tilde{t})| < \varepsilon \,, \tag{42}$$

was infolge der Stetigkeit der Funktion f_2 möglich ist. Es sei weiter C eine solche Konstante, dass in allen Punkten $[x, t] \in D_\delta - K_\varepsilon$

$$Cv > 2 \operatorname{Max} \left(\sup_{x \in \langle 0, \infty)} |f_1(x)| \,, \max_{t \in \langle 0, T \rangle} |f_2(t)| \right) \tag{43}$$

gilt und weiter wollen wie setzen $\varphi_k^{(1)} = f_2(\tilde{t}) - \varepsilon - Cv - \omega_{n_k}$, $\varphi_k^{(2)} = \omega_{n_k} - f_2(\tilde{t}) - \varepsilon - Cv$. Für diese Funktionen gilt wegen der Eigenschaften der Funktion v in jedem Knotenpunkt $[x, t + \tau_{n_k}] \in D_\delta$ von einem bestimten k angefangen $\varphi_k^{(i)}\left(x, -\left[\frac{\delta - \tilde{t}}{\tau_{n_k}}\right] \tau_{n_k}\right) \leqq 0$, $\varphi_k^{(i)}(0, t) \leqq 0$, $\varphi_k^{(i)}\left(\left[\frac{\delta}{h_{n_k}}\right] h_{n_k}, t\right) \leqq 0$ gemäss (42), (43) und dem Lemma 6.1. Also gilt $\varphi_k^{(i)} \leqq 0$ in allen Knotenpunkten $[x, t] \in \overline{D}_\delta$, d. h.

$$f_2(\tilde{t}) - \varepsilon - Cv \leqq \omega_{n_k} \leqq f_2(\tilde{t}) + \varepsilon + Cv \tag{44}$$

in allen Knotenpunkten $[x, t] \in \overline{D}_\delta$ beginnend mit einem bestimmten k. Daraus erhalten wir durch Grenzübergang (in einem festen Knotenpunkt $[x, t] \in \overline{D}_\delta \cap (0, \infty) \times (0, T)$)

$$f_2(\tilde{t}) - \varepsilon - Cv \leqq \Omega(x, t) \leqq f_2(\tilde{t}) + \varepsilon + Cv \,. \tag{45}$$

Weil die Menge der Knotenpunkte in $\overline{D}_\delta \cap (0, \infty) \times (0, T)$ dicht ist, so gilt diese Ungleichung in jedem Punkt $[x, t] \in \overline{D}_\delta \cap ((0, \infty) \times (0, T))$, und weil $v(0, \tilde{t}) = 0$ und $v(x, t)$ stetig ist, so erhalten wir

$$\lim_{\substack{[x,t] \to [0,\tilde{t}] \\ [x,t] \in (0,\infty) \times (0,T) \\ t \leqq \tilde{t}}} \Omega(x, t) = f_2(\tilde{t}) \,. \tag{46}$$

Aus der Ungleichung (44) folgt weiter, dass es möglich ist eine solche Umgebung $K \subset K_\varepsilon$ des Punktes $[0, \tilde{t}]$ zu finden, dass in allen Knotenpunkten $[x, t] \in K \cap (\langle 0, \infty) \times \langle 0, T))$, für welche $t \leqq \tilde{t}$ ist, von einem bestimmten k angefangen, gilt

$$|\omega_{n_k}(x, t) - f_2(\tilde{t})| < 2\varepsilon \,. \tag{47}$$

Wir setzen $w = x^2 + \frac{3}{a}(t - \tilde{t})$ und C_1 sei eine so gewählte Konstante, dass

$$C_1 w > 2 \operatorname{Max} \left(\sup_{x \in \langle 0, \infty)} |f_1(x)| \,, \max_{t \in \langle 0, T \rangle} |f_2(t)| \right)$$

in allen Punkten $[x, t] \in \langle 0, \infty) \times \langle 0, T)$, welche nicht in K liegen und welche oberhalb der Geraden $t = \tilde{t} - \delta_1$ liegen, gilt. $\delta_1 > 0$ sei so klein, dass $C_1 w > -\varepsilon$ auf $K \cap (\langle 0, \infty) \times (\tilde{t} - \delta_1, \tilde{t}))$ ist. Dann erhalten wir durch einen ganz analogen Vorgang wie oben (weil überall in $(0, \infty) \times (0, T)$ die Bedingung $L(w) < 0$ gilt), dass mit einem bestimmten k beginnend für alle Knotenpunkte $[x, t] \in (0, \infty) \times (0, T)$, in welchen $t > \tilde{t} - h_{n_k}$ ist,

(48) $$f_2(\tilde{t}) - 3\varepsilon - C_1 w \leqq \omega_{n_k}(x, t) \leqq f_2(\tilde{t}) + 3\varepsilon + C_1 w$$

gilt. Daraus erhalten wir dann schon leicht

(49) $$\lim_{\substack{[x,t] \to (0,\tilde{t}) \\ [x,t] \in (0,\infty) \times (0,T) \\ t \geqq \tilde{t}}} \Omega(x, t) = f_2(\tilde{t}) .$$

Die Gleichungen (46) und (49) beweisen zusammen (40). Wir haben also die Existenz einer Funktion $\Omega(x, t) \in B$, welche (38) und (39) erfüllt, bewiesen. Man beweist aber ferner auch leicht (siehe z. B. [1]), dass es nur eine einzige Funktion dieser Eigenschaften gibt. Aus der Eindeutigkeit der durch die Eigenschaften (38) und (39) bestimmten Funktion folgt gleichfalls leicht, dass nicht nur die Teilfolge sondern auch die ganze Folge nach der Funktion Ω konvergiert. Das Lemma ist damit bewiesen.

Bemerkung 3.2. *Mit Hilfe der Ungleichung* (47), *welche nicht nur für die Folge* $\{\omega_{n_k}\}$, *sondern auch für die ganze Folge* $\{\omega_n\}$, *angefangen von einem bestimmten* n, *gilt, beweisen wir leicht, dass*

$$\omega_n(x, \tilde{t}) \to \omega(x, \tilde{t}) \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

gleichmässig auf jedem Intervall $\langle 0, x_0 \rangle$, $x_0 > 0$ *und zwar für jedes fest gewählte* $\tilde{t} \in (0, T)$ *von solcher Beschaffenheit, dass die Gerade* $t = \tilde{t}$ *von einem bestimmten* n *angefangen, eine Netzgerade ist.*

Lemma 3.7. *Wir wollen setzen*

(50) $$v^{(m)}(x, t) = u_2^{(m)}(x, t) - w^{(m)}(x, t) ,$$

worin $u_2^{(m)}$ *bezw.* $w^{(m)}$ *die durch Lemma 3.3 bezw. Lemma 3.4 definierte Funktion bedeutet. Es sei* $v_n^{(m)}$ *eine Netzfunktion definiert in* $\langle 0, \infty) \times \langle 0, T)$, *für welche gilt:*

(*a*) *in jedem Knotenpunkt* $[x, t] \in (0, \infty) \times \langle 0, T)$ *ist*

(51) $$\frac{1}{a} v_{nxx}^{(m)}(x, t) - v_{nt}^{(m)}(x, t) = 0 ,$$

(52) (*b*) $$v_n^{(m)}(x, 0) = - w^{(m)}(x, 0) , \quad v_n^{(m)}(0, t) = - w^{(m)}(0, t) .$$

Dann gilt

(53) $$\lim_{n \to \infty} v_n^{(m)}(x, t_0) = v^{(m)}(x, t_0)$$

gleichmässig auf jedem Intervall $\langle 0, x_0 \rangle$, $x_0 > 0$.

Beweis: Folgt leicht aus dem Lemma 3.6 bezw. aus der Bemerkung 3.2.

Lemma 3.8. *Es seien $w_n^{(k)}(k = 0, 1, \ldots, m)$ Netzfunktionen definiert durch die Vorschrift*

$$
\begin{aligned}
(54)\qquad & w_n^{(0)}(x, t) = v_1^{(0)}(t) + v_{2,n}^{(0)}(x, t) \quad \text{für} \quad x \leqq (m + 1)\, b,\ t \geqq - mt_0,\\
& w_n^{(0)}(x, t) = v_1^{(0)}(t) + v_{3,n}^{(0)}(x, t) \quad \text{für} \quad x \geqq (m + 1)\, b\,,\quad t \geqq - mt_0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(55)\qquad & w_n^{(k)}(x, t) = w_n^{(k-1)}(x, t) + v_1^{(k)}(t) + v_{2,n}^{(k)}(x, t) \quad \text{für} \quad x \leqq (m + 1 - k)\, b\,,\\
& \qquad\qquad t \geqq -(m - k)\, t_0\,,\\
& w_n^{(k)}(x, t) = w_n^{(k-1)}(x, t) + v_1^{(k)}(t) + v_{3,n}^{(k)}(x, t) \quad \text{für} \quad x \geqq (m + 1 - k)\, b,\\
& \qquad\qquad t \geqq -(m - k)\, t_0
\end{aligned}
$$

für $k = 1, 2, \ldots, m$, worin $v_1^{(k)}(t)(k = 0, 1, \ldots, m)$ die durch Gleichung (15) definierte Funktion bedeutet und $v_{2,n}^{(k)}(x, t)$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ eine Netzfunktion ist, für welche gilt

$$
(56)\qquad v_{2,n}^{(k)}(x, t) - \frac{1}{a}\, v_{2,nx\bar{x}}^{(k)}(x, t) = \frac{1}{\tau_n}\int_t^{t+\tau_n} q_k(s)\, ds\,,
$$

$$
[x, t] \in (-\infty, (m + 1 - k)\, b) \times \langle -(m - k)\, t_0, T)\,,
$$

$$
(57)\qquad v_{2,n}^{(k)}(x, -(m - k)\, t_0) = v_{2,n}^{(k)}((m + 1 - k)\, b, t) = 0\,;
$$

weiter ist $v_{3,n}^{(k)}(x, t)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, m)$ eine Netzfunktion, für welche

$$
(58)\qquad v_{3,nt}^{(k)}(x, t) - \frac{1}{a}\, v_{3,nx\bar{x}}^{(k)}(x, t) = -\frac{1}{\tau_n}\int_t^{t+\tau_n} q_k(s)\, ds\,,
$$

$$
[x, t] \in ((m + 1 - k)\, b, \infty) \times \langle -(m - k)\, t_0, T)\,,
$$

$$
v_{3,n}^{(k)}(x, -(m - k)\, t_0) = v_{3,n}^{(k)}(m + 1 - k)\, b, t) = 0
$$

gilt und die Funktionen $q_k(t)$ durch Formel (16) definiert sind. Dann ist die Netzfunktion $w_n^{(m)}(x, t)$ in $(0, \infty) \times \langle 0, T)$ beschränkt, erfüllt in jedem Knotenpunkt $[x, t] \in (0, \infty) \times \langle 0, T)$ die Gleichung (5) und es gilt

$$
(60)\qquad w_n^{(m)} \to w^{(m)} \quad \text{für} \quad n \to \infty
$$

gleichmässig auf jeder Menge $\langle 0, x_0\rangle \times \langle 0, T)$, $x_0 > 0$; $w^{(m)}$ ist die in Lemma 3.4. definierte Funktion.

Beweis: Betrachten wir zuerst die Funktion $w_n^{(0)}(x, t)$. Vor allem stellen wir durch leichte Rechnung fest, dass für die Funktion $w_n^{(0)}$ gilt

$$
w_{nt}^{(0)}(x, t) - \frac{1}{a}\, w_{nx\bar{x}}^{(0)}(x, t) = \frac{1}{\tau_n}\int_t^{t+\tau_n} q(s + mt_0)\, ds
$$

für

$$
[x, t] \in (-\infty, (m + 1)\, b) \times \langle -mt_0, T)\,,
$$

$$
w_{nt}^{(0)}(x, t) - \frac{1}{a}\, w_{nx\bar{x}}^{(0)}(x, t) = 0
$$

für

$$[x, t] \in ((m + 1)\, b, \infty) \times \langle -mt_0, T) \,,$$

$$w^{(0)}_{nt}((m + 1)\, b, t) - \frac{1}{a}\, w^{(0)}_{nx\bar{x}}\, ((m + 1)\, b, t) = \frac{1}{2\tau_n} \int\limits_t^{t+\tau_n} q(s + mt_0)\, \mathrm{d}s \,,$$

weil $v^{(0)}_{3,n}(x, t) = - v^{(0)}_{2,n}(2(m + 1)\, b - x, t)$ ist. Weiter lässt sich die Funktion $v^{(0)}_{2,n}(x, t)$ in der Gestalt

$$v^{(0)}_{2,n}(x, t) = v^{(0)}_1(t) - F^{(0)}_{2,n}(x, t)$$

schreiben und die Funktion $F^{(0)}_{2,n}(x, t)$ genügt den Gleichungen

$$F^{(0)}_{2,nt} - \frac{1}{a}\, F^{(0)}_{2,nx\bar{x}} = 0 \,, \quad [x, t] \in (-\infty, (m + 1)\, b) \times \langle -mt_0, T) \,,$$
$$F^{(0)}_{2,n}(x, -mt_0) = 0 \,, \quad F^{(0)}_{2,n}((m + 1)\, b, t) = v^{(0)}_1(t) \,.$$

Gemäss Lemma 6.6 gilt

$$\lim_{n\to\infty} F^{(0)}_{2,n}(x, t) = F^{(0)}_2(x, t)$$

gleichmässig auf jeder Menge $\langle \delta_1, \delta_2 \rangle \times \langle \delta_3, T)$, worin $-\infty < \delta_1 < \delta_2 < (m + 1)\, b$, $-mt_0 < \delta_3 < T$ gilt und $F^{(0)}_2$ die in Lemma 3.4 definierte Funktion ist. Weiter ist entsprechend Bemerkung 3.1, wegen $F^{(0)}_{2,n}(x, -mt_0) = 0$, die Netzfunktion $F^{(0)}_{2,nx}$ durch eine von n unabhängige Konstante in jedem Bereich $\langle \delta_1, \delta_2 \rangle \times \langle -mt_0, T)$ beschränkt. Setzen wir weiter

$$\varphi_n(x, t) = F^{(0)}_{2,nt} \quad \text{für} \quad [x, t] \in ((-\infty, (m + 1)\, b \rangle \times \langle -mt_0, T)) \cap S_n \,.$$

Für diese Funktion gilt offenbar

$$\varphi_{nt} - \frac{1}{a}\, \varphi_{nx\bar{x}} = 0 \quad \text{für} \quad [x, t] \in (-\infty, (m + 1)\, b) \times \langle -mt_0, T) \,,$$
$$\varphi_n(x, -mt_0) = 0 \quad \text{für} \quad x < (m + 1)\, b \,,$$
$$\varphi_n((m + 1)\, b, t_0) = \frac{v^{(0)}_1(t + \tau_n) - v^{(0)}_1(t)}{\tau_n} \quad \text{für} \quad t \geqq -mt_0 \,.$$

Weil die Ableitung der Funktion $v^{(0)}_1(t)$ auf dem Intervall $\langle -mt_0, T)$ beschränkt ist, ist φ_n und mithin auch $F^{(0)}_{2,nt}$ gemäss Lemma 3.1 in allen Knotenpunkten der Menge $(-\infty, (m + 1)\, b \rangle \times \langle -mt_0, T)$ beschränkt und dies durch eine von n unabhängige Konstante. Weil $F^{(0)}_{2,nx\bar{x}} = aF^{(0)}_{2,nt}$ gilt, so gilt dasselbe auch für die Funktion $F^{(0)}_{2,nx\bar{x}}$ und weil

$$|F_{2,nx}(x, t)| \leqq |x - x_0|\, K + |F^{(0)}_{2,nx}(x_0, t)|$$

gilt, worin $K = \operatorname{Sup} |F^{(0)}_{2,nx\bar{x}}|$ bedeutet und $x_0 > 0$ ist, so erhalten wir das Ergebnis, dass die Funktion $F^{(0)}_{2,nx}$ auf jeder Menge $(\langle \delta_1, (m + 1)\, b) \times \langle -mt_0, T)) \cap S_n$ durch eine von n unabhängige Konstante beschränkt ist. Daraus folgt, dass die Funktion $F^{(0)}_{2,n}(x, t)$ auf jeder Menge $\langle \delta_1, (m + 1)\, b \rangle \times \langle -mt_0, T)$ gleichmässig zu der Funktion $F^{(0)}_2(x, t)$ konvergiert, das heisst aber, dass die Funktion $v_{2,n}^{(0)}(x, t)$ auf jeder Menge $\langle \delta_1, (m + 1)\, b\rangle \times \langle - mt_0, T)$ gleichmässig nach der Funktion $v_2^{(0)}(x, t)$ aus Lemma 3.4 konvergiert. Eine analoge Behauptung gilt auch für die Funktion $v_{3,n}^{(0)}(x, t)$ und mithin gilt überhaupt

$$\lim_{n\to\infty} w_n^{(0)}(x, t) = w^{(0)}(x, t)$$

gleichmässig auf jeder Menge $\langle - \delta_1, \delta_1\rangle \times \langle - mt_0, T)$, wobei $w^{(0)}(x, t)$ in Lemma 3.4 definiert ist. Schreiten wir nun auf analoge Weise fort, so gelangen wir zum Beweis der aufgestellten Behauptung.

Lemma 3.9. *Es sei $u_{2,n}(x,t)$, die durch Formel (8) in Satz 2.1 definierte Funktion und es sei $u_2(x, t)$ die in Lemma 3.3 definierte Funktion. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_{2,n}(x, t_0) - u_2(x, t_0)\|_P = 0\,. \tag{61}$$

Beweis: Wir wollen setzen

$$\alpha_n(x, t) = u_{2,n}^{(m)} - v_n^{(m)} - w_n^{(m)}\,, \tag{62}$$

worin $u_{2,n}^{(m)}$ in Lemma 3.2, $v_n^{(m)}$ in Lemma 3.7 und $w_n^{(m)}$ in Lemma 3.8 definiert sind. Für diese Funktion gilt

$$\alpha_{nt}(x, t) - \frac{1}{a}\, \alpha_{nxx}(x, t) = 0\,,\ [x, t] \in ((0, \infty) \times \langle 0, T)) \cap S_n\,, \tag{63}$$

$$\begin{aligned} \alpha_n(x, 0) &= w^{(m)}(x, 0) - u_n^{(m)}(x, 0)\,,\\ \alpha_n(0, t) &= w^{(m)}(0, t) - u_n^{(m)}(0, t) \end{aligned} \tag{64}$$

($w^{(m)}$ gemäss Lemma 3.4.) Nach Formel (50) gilt weiter

$$u_{2,n}^{(m)}(x, t) - u_2^{(m)}(x, t) = \alpha_n(x, t) + (v_n^{(m)} - v^{(m)}) + (w_n^{(m)} - w^{(m)})\,; \tag{65}$$

$u_2^{(m)}$ ist in Lemma 3.3 und $v^{(m)}$ in Lemma 3.7 definiert. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Weil die Funktionen $v_n^{(m)}$, $v^{(m)}$, $w_n^{(m)}$, $w^{(m)}$ beschränkt sind, ist es möglich ein $x_0 > 0$ so zu bestimmen, dass gilt

$$\frac{|v_n^{(m)}(x, t_0) - v^{(m)}(x, t_0)|}{1 + x^3} < \varepsilon\,, \tag{66}$$

$$\frac{|w_n^{(m)}(x, t_0) - w^{(m)}(x, t_0)|}{1 + x^3} < \varepsilon \tag{67}$$

für alle $x \in \langle x_0, \infty)$ und $n = 1, 2, \ldots$

Weil $v_n^{(m)}(x, t_0) \to v^{(m)}(x, t_0)$, $w_n^{(m)}(x, t_0) \to w^{(m)}(x, t_0)$ für $n \to \infty$ gilt und dies gleichmässig auf dem Intervall $\langle 0, x_0\rangle$ (siehe Lemma 3.7 und Lemma 3.8), so existiert eine nur von ε abhängige Konstante N_1 derart, dass für alle $x \in$ $\in \langle 0, x_0\rangle$ gilt

$$n > N_1 \Rightarrow \frac{|v_n^{(m)}(x, t_0) - v^{(m)}(x, t_0)|}{1 + x^3} < \varepsilon\,, \tag{68}$$

$$n > N_1 \Rightarrow \frac{|w_n^{(m)}(x, t_0) - w^{(m)}(x, t_0)|}{1 + x^3} < \varepsilon \tag{69}$$

und daher folgt aus (66), (67), (68) und (69), dass auch gilt

(70) $\quad n > N_1 \Rightarrow \|v_n^{(m)}(x, t_0) - v^{(m)}(x, t_0)\|_P < \varepsilon\,, \quad \|w_n^{(m)}(x, t_0) - w^{(m)}(x, t_0)\|_P < \varepsilon\,.$

Weiter folgt aus der Beschränktheit der Funktionen $w_n^{(m)}$, $w^{(m)}$ die Existenz eines $x_1 > 0$ von solcher Bechaffenheit, dass für alle $[x, t] \in \langle x_1, \infty) \times \langle 0, T)$

(71) $$|w^{(m)}(x, t) - w_n^{(m)}(x, t)| < \frac{\varepsilon}{D}(1 + x)$$

gilt, mit

(72) $$D = \operatorname*{Sup}_{x \in \langle 0, \infty)} \frac{1 + x}{1 + x^3}\,.$$

Weil $w_n^{(m)} \to w^{(m)}$ für $n \to \infty$ auf $\langle 0, x_1\rangle \times \langle 0, T\rangle$ gleichmässig konvergiert, so existiert eine nur von ε abhängende Konstante N_2 derart, dass für alle $[x, t] \in \langle 0, x_1\rangle \times \langle 0, T)$

(73) $$n > N_2 \Rightarrow |w^{(m)}(x, t) - w_n^{(m)}(x, t)| < \frac{\varepsilon}{D}$$

erfüllt ist. Also erhalten wir zusammen aus (71) und (73), dass in jedem Knotenpunkt für $n > N_2$ gilt

$$|\alpha_n(x, 0)| < \frac{\varepsilon}{D}(1 + x)\,, \quad 0 \leqq x < \infty\,,$$

$$|\alpha_n(0, t)| < \frac{\varepsilon}{D}\,, \quad 0 \leqq t < T\,.$$

Daraus erhalten wir leicht unter Benutzung von Lemma 3.1, dass

(74) $$n > N_2 \Rightarrow |\alpha_n(x, t)| < \frac{\varepsilon}{D}(1 + x)$$

für alle Knotenpunkte $[x, t] \in \langle 0, \infty) \times \langle 0, T)$ gilt. Aus (74) folgt aber laut Definition der Zahl D, dass weiter

(75) $$n > N_2 \Rightarrow \|\alpha_n(x, t_0)\|_P < \varepsilon$$

gilt. Aus (65), (70) und (75) folgt

(76) $$\lim_{n \to \infty} \|u_{2,n}^{(m)}(x, t_0) - u_2^{(m)}(x, t_0)\|_P = 0\,.$$

Daraus, aus Lemma 3.2 und Lemma 3.3 ergibt sich leicht die Gültigkeit von (61).

Lemma 3.10. *Es sei $u_{1,n}(x, t)$ eine im Bereich $\langle 0, \infty) \times \langle 0, T)$ definierte Netzfunktion, für welche gelten möge*

(77) $\quad (a) \quad u_{1,nt}(x, t) - \frac{1}{a} u_{1,nx\bar{x}}(x, t) = 0\,, \quad [x, t] \in (0, \infty) \times \langle 0, T)\,,$

(78) $\quad (b) \quad u_{1,n}(0, t) = 0\,, \quad 0 \leqq t < T\,,$

(79) $$u_{1,n}(x, 0) = 0 \quad \textit{für} \quad 0 < x \leqq b$$
$$u_{1,n}(x, 0) = f_n(x - b) \quad \textit{für} \quad b < x < \infty$$

und $f_n(x)$ sei die quasistationäre Lösung des Problems 2. (Siehe Satz 2.4 bezw. Satz 2.6.) Dann existiert eine Funktion $U(x, t)$ stetig in $\langle 0, \infty) \times (0, T)$ derart, dass

$$0 \leqq U(x, t) \leqq \alpha x \quad \text{für} \quad [x, t] \in \langle 0, \infty) \times (0, T) \tag{80}$$

ist, U hat in $(0, \infty) \times (0, T)$ stetige Ableitungen $\partial U/\partial t$, $\partial^2 U/\partial x^2$ und es gilt

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{a}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad \text{für} \quad [x, t] \in (0, \infty) \times (0, T) \tag{81}$$

und es existiert eine Teilfolge $\{n_k\}$ von solcher Beschaffenheit, dass

$$\lim_{k\to\infty} u_{1,n_k}(x, t) = U(x, t) \tag{82}$$

gleichmässig auf jeder Menge $\langle 0, x_0\rangle \times \langle t_1, T)$ erfüllt ist.

Beweis: Für die Funktion $u_{1,n}(x, t)$ gilt nach Lemma 3.1 und nach Satz 2.4

$$0 \leqq u_{1,n}(x, t) \leqq \alpha x\,, \quad [x, t] \in \langle 0, \infty) \times \langle 0, T)\,.$$

Daraus und aus dem Lemma 3.5 erhalten wir den Beweis der aufgestellten Behauptung, wenn wir zusätzlich die Funktion $u_{1,n}(x, t)$ auf $(-\infty, 0\rangle \times \times \langle 0, T)$ durch die Gleichung $u_{1,n}(x, t) = -u_{1,n}(-x, t)$ definieren.

Beweis des Satzes 3.1: Aus (80) und (82) folgt, dass eine Teilfolge $\{n_k\}$ derart existiert, dass

$$\lim_{k\to\infty} u_{1,n_k}(x, t_0) = \lim_{k\to\infty} (A_{1,n_k} f_{n_k})(x) = U(x, t_0) \quad \text{in} \quad P \tag{83}$$

ist. Weil aber

$$f_{n_k}(x) = (A_{1,n_k} f_{n_k})(x) + u_{2,n_k}(x, t_0) \tag{84}$$

gilt (siehe Formel (17), Abschnitt 2), so folgt aus (80), (83), (84) und aus Lemma 3.9 die Existenz einer auf $\langle 0, \infty)$ stetigen Funktion $f_0(x)$ von solcher Beschaffenheit, dass

$$0 \leqq f_0(x) \leqq \alpha x + b\alpha \tag{85}$$

und weiter

$$\lim_{k\to\infty} \|f_{n_k}(x) - f_0(x)\|_P = 0 \tag{86}$$

erfüllt sind.

Wir wollen nun die Randbedingungen der Funktion $U(x, t)$ aus Lemma 3.10 untersuchen; vor allem gilt offenbar

$$\lim_{\substack{[x,t]\to[0,\tilde{t}]\\ [x,t]\in(0,\infty)\times(0,T)}} U(x, t) = 0\,, \quad 0 < \tilde{t} < T\,. \tag{87}$$

Wir wollen weiter beweisen, dass auch gilt

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{[x,t]\to[x_0,0]\\ [x,t]\in(0,\infty)\times(0,T)}} U(x, t) = 0 && \text{für} \quad 0 < x_0 < b\,, \\ &\lim_{\substack{[x,t]\to[x_0,0]\\ [x,t]\in(0,\infty)\times(0,T)}} U(x, t) = f_0(x_0 - b) && \text{für} \quad b < x_0 < \infty \end{aligned} \tag{88}$$

Setzen wir der Kürze halber

$$(89) \qquad \begin{aligned} p_0(x) &= 0 && \text{für} \quad 0 < x < b\,, \\ p_0(x) &= f_0(x-b) && \text{für} \quad b < x < \infty\,, \end{aligned}$$

$$(90) \qquad \begin{aligned} p_k(x) &= 0 && \text{für} \quad 0 < x \leqq b\,, \\ p_k(x) &= f_{n_k}(x-b) && \text{für} \quad b < x < \infty \end{aligned}$$

und es sei $x_0 \in (0, \infty)$, $x_0 \neq b$ ein fest gewählter Punkt. Weiter sei gesetzt

$$(91) \qquad w(x, t) = (x - x_0)^2 + \frac{3}{a}\, t$$

und es sei ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach (86) existiert $K(\varepsilon)$ derart, dass

$$(92) \qquad k > K(\varepsilon) \Rightarrow |p_k(x) - p_0(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

gilt, worin $\delta > 0$ beliebig und fest gewählt ist. Aus der Stetigkeit der Funktion $f_0(x)$ und also auch der Funktion $p_0(x)$ folgt die Existenz eines solchen δ_1, $0 < \delta_1 < \delta$, dass

$$(93) \qquad x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \Rightarrow |p_0(x) - p_0(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

erfüllt ist und dass also insgesamt zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ ein solches $K(\varepsilon)$ existiert, dass

$$(94) \qquad k > K(\varepsilon) \Rightarrow |p_k(x) - p_0(x_0)| < \varepsilon$$

für alle $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ erfüllt ist. Es sei weiter

$$(95) \qquad C = \operatorname{Max} \left\{ \sup_{x \in \langle 0, \infty) - (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)} \frac{|p_0(x_0)| + \alpha x}{(x - x_0)^2}, \frac{|p_0(x_0)|}{x_0^2} \right\}.$$

Dann beweisen wir aus den Beziehungen (94) und (95) mittels des Lemmas 3.1 leicht, dass für $k > K(\varepsilon)$ in jedem Knotenpunkt $[x, t] \in \langle 0, \infty) \times \langle 0, T)$

$$(96) \qquad p_0(x_0) - \varepsilon - Cw \leqq u_{1.n_k}(x, t) \leqq p_0(x_0) + \varepsilon + Cw$$

gilt. Daraus ergibt sich völlig analog wie beim Beweis des Lemmas 3.6 die Gültigkeit von (88). Aus dem eben Bewiesenen aber folgt, dass für die Funktion $f_0(x)$

$$(97) \qquad f_0(x) = (Af_0)\,(x)$$

gilt (siehe Definition 1.2) und also ist $f_0(x)$ eine quasistationäre Lösung des Problems 1. Auf Grund der Ungleichung (85) beweisen wir leicht auf grund des Satzes 1.2, dass $f_0 \in M$ und weil in M gerade nur eine quasistationäre Lösung existiert, so gilt (86) nicht nur für eine Teilfolge $\{n_k\}$, sondern für die ganze Folge $\{n\}$. Damit ist der Satz 3.1 bewiesen.

Literatur

[1] *E. Vitásek:* Über die quasistationäre Lösung der Wärmeleitungsgleichung, Apl. mat. 5 (1960), 109—140.

[2] *A. Tichonov:* Ein Fixpunktsatz, Math. Ann. 111 (1935), 767—776.

[3] *I. Babuška:* The Fourier Transform in the Theory of Difference Equations and its Applications, Archiwum mechaniki stosowanej 9 (1959), 349—381.

[4] *K. Rektorys:* Stanovení teploty v přehradě při působení vnitřních zdrojů tepla, Rozpravy ČSAV, řada matem. a přírod. věd, 66 (1956), sešit 14.

[5] *J. Nečas:* Vliv vnější teploty na napjatost přehrad a jiných betonových masivů, Apl. mat. 1 (1956), 103—118.

[6] *И. Г. Петровский:* Лекции об уравнениях с частными производными, изд. II., ГИТТЛ, Москва 1953.

Souhrn

NUMERICKÁ METODA PRO VÝPOČET QUASISTACIONÁRNÍHO ŘEŠENÍ ROVNICE PRO VEDENÍ TEPLA

EMIL VITÁSEK

V práci, která je pokračováním [1], se zabývám následujícím problémem:

Buď $h_n = h_0/2^n$, $\tau_n = \tau_0/2^{2n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $h_0 = b/N_1$, $\tau_0 = t_0/N_2$ (N_1, N_2 jsou přirozená čísla),

$$0 < \frac{\tau_n}{ah_n^2} \equiv \beta < \frac{1}{2},$$

a, b, t_0 jsou kladné konstanty. Znakem S_n označíme množinu bodů $[kh_n, l\tau_n] \in E_2(k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ a podobně znakem $S_n^{(0)}(S_n^{(1)})$ množinu bodů $kh_n \in E_1(l\tau_n \in E_1)$ $(k\ (l) = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Množiny S_n, $S_n^{(i)}$ budeme nazývat sítěmi a funkce definované na nich síťovými funkcemi.

Buď A_n operátor, který funkci $f_n(x)$ definované na $\langle 0, \infty) \cap S_n^{(0)}$ přiřazuje řešení rovnice

$$\frac{u_n(x, t + \tau_n) - u_n(x, t)}{\tau_n} - \frac{1}{a} \frac{u_n(x + h_n, t) - 2u_n(x, t) + u_n(x - h_n, t)}{h_n^2} = \tag{1}$$

$$= \frac{1}{\tau_n} z_n(x, t + \tau_n), \quad [x, t] \in ((0, \infty) \times \langle 0, T)) \cap S_n;$$

$z_n(x, t)$ je síťová funkce definovaná předpisem

$$z_n(x, t) = \int_{t-\tau_n}^{t} q(s + kt_0)\, ds \quad \text{pro} \quad kb < x < (k + 1)\, b, \tag{2}$$

$$z_n(kb, t) = \tfrac{1}{2} \left[\int_{t-\tau_n}^{t} q(s + (k - 1)\, t_0)\, ds + \int_{t-\tau_n}^{t} q(s + kt_0)\, ds \right],$$

(a, T jsou kladné konstanty, $T > t_0$, $q(t)$ je daná funkce) při počáteční podmínce

$$\begin{aligned} u_n(x, 0) &= 0 && \text{pro} \quad 0 < x < b\,, \\ u_n(x, 0) &= f_n(x - b) && \text{pro} \quad b < x < \infty \end{aligned}$$

a okrajové podmínce

$$u(0, t) = 0 \qquad \text{pro} \quad t > 0$$

pro $t = t_0$ (tj. $(A_n f)(x) = u_n(x, t_0)$).

Řekneme, že v nějaké množině síťových funkcí M_n existuje síťové quasistacionární řešení, jestliže existuje taková funkce $f_n \in M_n$, že platí

$$(A_n f_n)(x) = f_n(x)\,.$$

O síťovém quasistacionárním řešení dokazuji následující věty:

Věta 1. *Buď M_n množina funkcí f_n definovaných na $\langle 0, \infty) \cap S_n^{(0)}$, pro které platí*

$$0 \leqq f_n(x) \leqq \alpha x + b\alpha\,, \quad x \in \langle 0, \infty) \cap S^{(0)}$$

(α je jistá konstanta). Buď funkce $q(t)$ z rovnic (2) spojitá, nezáporná a omezená v $\langle 0, \infty)$. Pak existuje v M_n právě jedno síťové quasistacionární řešení.

Věta 2. *Buď $f_n^{(0)} \in M_n$; $f_n^{(k+1)} = A_n f_n^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Pak funkce $f_n^{(k)}$ konvergují pro $k \to \infty$ lokálně stejnoměrně k síťovému quasistacionárnímu řešení.*

Věta 3. *Buď f_n síťové quasistacionární řešení. Dodefinujme síťovou funkci $f_n(x)$ pro ta x, pro která není definována, lineárně. Takto získaná posloupnost spojitých funkcí pak konverguje pro $n \to \infty$ lokálně stejnoměrně ke quasistacionárnímu řešení* (ve smyslu [1]).

Резюме

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ДЛЯ ИСЧИСЛЕНИЯ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

ЭМИЛЬ ВИТАСЕК (Emil Vitásek)

В работе, которая является продолжением [1], я занимаюсь следующей проблемой:

Пусть $h_n = h_0/2^n$, $\tau_n = \tau_0/2^{2n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $h_0 = b/N_1$, $\tau_0 = t_0/N_2$ (N_1, N_2 — натуральные числа),

$$0 < \frac{\tau_n}{ah_n^2} \equiv \beta < \frac{1}{2}\,,$$

a, b, t_0 — положительные постоянные. Символом S_n обозначим множество точек $[kh_n, l\tau_n] \in E_2$ $(k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ и аналогично символом $S_n^{(0)}(S_n^{(1)})$ множество точек $kh_n \in E_1 (l\tau_n \in E_1)$ $(k\,(l) = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Множества S_n,

$S_n^{(t)}$ будем называть сетками и функции, определенные на них, функциями на сетках.

Пусть A_n — оператор, который функции $f_n(x)$, определенной на $\langle 0, \infty) \cap$ $\cap\, S_n^{(0)}$, ставит в соответствие решение уравнения

$$\text{(1)}\quad \frac{u_n(x, t + \tau_n) - u_n(x, t)}{\tau_n} - \frac{1}{a}\,\frac{u_n(x + h_n, t) - 2u_n(x, t) + u_n(x - h_n, t)}{h_n^2} =$$
$$= \frac{1}{\tau_n}\, z_n(x, t + \tau_n)\,, \ [x, t] \in ((0, \infty) \times \langle 0, T)) \cap S_n\,;$$

$z_n(x, t)$ — функция на сетке, определенная соотношениями

$$\text{(2)}\qquad z_n(x, t) = \int_{t-\tau_n}^{t} q(s + kt_0)\,\mathrm{d}s \quad \text{для} \quad kb < x < (k + 1)\,b\,,$$
$$z_n(kb, t) = \tfrac{1}{2}\Big[\int_{t-\tau_n}^{t} q(s + (k - 1)\,t_0)\,\mathrm{d}s + \int_{t-\tau_n}^{t} q(s + kt_0)\,\mathrm{d}s\Big]\,,$$

(a, T — положительные постоянные, $T > t_0$, $q(t)$ — данная функция) при начальном условии

$$u_n(x, 0) = 0 \qquad \text{для} \quad 0 < x < b\,,$$
$$u_n(x, 0) = f_n(x - b) \quad \text{для} \quad b < x < \infty$$

и краевом условии

$$u(0, t) = 0 \quad \text{для} \quad t > 0$$

при $t = t_0$ (т. е. $(A_n f)(x) = u_n(x, t_0)$).

Мы скажем, что в некотором множестве M_n функций на сетках существует разностное квазистационарное решение, если существует такая функция $f_n \in M_n$, что

$$(A_n f_n)(x) = f_n(x)\,.$$

О разностном квазистационарном решении доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть M_n — множество функций f_n, определенных на $\langle 0, \infty) \cap S_n^{(0)}$, для которых выполняются неравенства*

$$0 \leqq f_n(x) \leqq \alpha x + b\alpha\,, \quad x \in \langle 0, \infty) \cap S_n^{(0)}$$

(α — определенная константа). Пусть функция $q(t)$ из уравнений (2) является непрерывной, неотрицательной и ограниченной в $\langle 0, \infty)$. Тогда в M_n существует точно одно разностное квазистационарное решение.

Теорема 2. *Пусть $f_n^{(0)} \in M_n$, $f_x^{(k+1)} = A_n f_n^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда функции $f_n^{(k)}$ сходятся при $k \to \infty$ локально равномерно к разностному квазистационарному решению.*

Теорема 3. *Пусть f_n — разностное квазистационарное решение. Дополним определение функции на сетке $f_n(x)$ для тех x, для которых она не определена, линейно. Полученная таким образом последовательность непрерывных функций сходится при $n \to \infty$ локально равномерно к квазистационарному решению (в смысле [1]).*