Milan Práger

Sur une modification de la méthode de M. Kantorovitch

Aplikace matematiky, Vol. 5 (1960), No. 4, 305–316

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102717

SUR UNE MODIFICATION DE LA MÉTHODE DE M. KANTOROVITCH

MILAN PRÁGER

(Reçu le 19 septembre 1959.)

Dans cet article, l'auteur propose une certaine modification de la méthode de M. KANTOROVITCH de résolution approximative du premier problème aux limites pour les équations aux dérivées partielles du type elliptique. Cette modification a pour but de rendre plus faciles les procédes numériques appliqués dans la recherche des approximations d'ordre élevé pour le problème donné.

Comme on sait bien, la méthode de M. KANTOROVITCH de résolution approximative du premier problème aux limites (les conditions aux limites étant nulles) pour l'équation aux dérivées partielles de second ordre en deux variables

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x, y)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b(x, y)\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) - c(x, y)\,u = f(x, y)$$

consiste dans le procédé suivant (voir [1]). (Ils est evidemment possible d'appliquer des procédés analogues dans le cas d'une équation d'ordre plus élevé ou bien en plusieurs dimensions.)

Sur un domaine plan, borné par les courbes $y = g(x)$, $y = h(x)$ et les droites $x = a$, $x = b$, nous choisissons une suite de fonctions $\chi_n(x, y)$ vérifiant, sur les courbes $y = g(x)$, $y = h(x)$ les conditions homogènes aux limites, et qui satisfait en même temps à certaines conditions d'être complète. Alors nous supposons que u_n, n-ième approximation de la solution de notre problème, soit de la forme

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\,\chi_i(x, y)\ ,$$

et nous déterminons les fonctions $\varphi_i(x)$ à partir de la condition que la fonctionnelle

$$\iint_G \left[a\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^2 + cu_n - 2fu_n\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

soit minimalisée par rapport à toutes les fonctions de la forme donnée et que les $\varphi_i(x)$ satisfassent les conditions homogènes aux limites en $x = a$, $x = b$.

Par là le problème se trouve réduit au problème variationnel pour les fonctions d'une variable. Pratiquement, les fonctions $\varphi_i(x)$ sont déterminées à partir des équations d'Euler. En cherchant les approximations d'ordre élevé, nous avons à résoudre un système d'équations différentielles, ce qui est, en général, bien difficile et parfois même pratiquement irréalisable.

Dans le présent travail, nous allons décrire une certaine modification de la méthode citée, pour laquelle les solutions approximatives sont obtennues successivement en résolvant chaque fois une seule équation différentielle. L'idée fondamentale de la méthode sera rendue suffisamment claire à l'aide de l'exemple du premier problème aux limites pour l'équation biharmonique. Nous allons nous servir de méthodes variationnelles, en exploitant le théorème 1,5 du travail [2] pour démonter la convergence des solutions approximatives vers la solution généralisée. Nous commençons par donner les définitions et théorèmes nécessaires.

Soit G un domaine plan, déterminé par les courbes $y = g(x)$, $y = h(x)$, $a \leqq x \leqq b$ ($g(x) < h(x)$ pour $x \in \langle a, b \rangle$) et les segments de droites $x = a$, $g(a) \leqq y \leqq h(a)$ et $x = b$, $g(b) \leqq y \leqq h(b)$. Nous supposons que les fonctions $g(x)$ et $h(x)$ satisfassent sur l'intervalle $\langle a, b \rangle$ à la condition de Lipschitz. Nous désignons par $\dot{G}$ la frontière et par $\bar{G}$ la fermeture de G.

Par l'espace $L_2(G)$ nous comprenons l'espace de fonctions de carré sommable sur G, le produit scalaire étant défini par $(u, v)_{L_2} = \iint_G uv \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.

Considérons l'espace linéaire de fonctions définies et deux fois continûment dérivables sur $\bar{G}$, et qui s'annulent à l'extérieur d'un ensemble compact situé à l'intérieur de G. Si nous y introduisons le produit scalaire

$$(u, v) = \iint_G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, ,$$

nous obtenons un espace de Hilbert, mais qui n'est pas complet; l'espace obtenu par son complétement sera dénoté par $\overset{\circ}{W}{}_2^2(G)$.

Pour les fonctions de $\overset{\circ}{W}{}_2^2(G)$ on a le suivant théorème de l'immersion (cf. [3], [4]):

Toute fonction $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(G)$ est continue sur $\bar{G}$ et il existe une constante M telle que

$$\sup_{\bar{G}} |u| \leqq M \, \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(G)} \, .$$

Soit $p(x, y) \in L_2(G)$. Par solution généralisée du problème

$$\Delta^2 u = p \quad \text{sur} \quad G \, , \tag{1}$$

$$u = 0 \, , \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad \dot{G} \, , \tag{2}$$

$\left(\frac{\partial}{\partial n}\right.$ étant la dérivée le long de la normale extérieure$\left.\right)$, nous comprenons une fonction u, qui vérifie l'équation

$$(u, v)_{\mathring{W}_2^2(G)} = (p, v)_{L_2(G)}$$

pour n'importe quelle fonction $v \in \mathring{W}_2^2(G)$.

On sait bien que, sous nos hypothèses, cette solution généralisée existe toujours (voir p. ex. [5]).

Après cette introduction-là, nous pouvons procéder à l'exposition propre de notre méthode.

Soit donnée une fonction arbitraire $\chi(x, y)$, définie sur le domaine G. Nous désignons par le symbole $H(\chi)$ l'ensemble de toutes les fonctions de la forme $f(x)\,\chi(x, y)$ telles que $f(x)\,\chi(x, y) \in \mathring{W}_2^2(G)$.

Lemme. *L'ensemble $H(\chi)$ est sous-espace de l'espace $\mathring{W}_2^2(G)$.*

Démonstration. L'ensemble $H(\chi)$ étant évidemment linéaire, il suffit de montrer qu'il est aussi fermé dans $\mathring{W}_2^2(G)$. Soit donc $f_n(x)\,\chi(x, y)$ une suite de fonctions de $H(\chi)$, convergeant en norme de l'espace $\mathring{W}_2^2(G)$ vers une fonction $\varphi(x, y)$. Soit $\xi \in \langle a, b\rangle$. Alors, sur le segment $x = \xi$, $g(\xi) \leqq y \leqq h(\xi)$ la suite $f_n(\xi)\,\chi(\xi, y)$ tend, en vertu du théorème de l'immersion, vers $\varphi(\xi, y)$ uniformément en y (ξ étant fixe pour l'instant); toutes les fonctions $f_n(\xi)\,\chi(\xi, y)$ ainsi que $\varphi(\xi, y)$ sont continues.

Si pour tout y vérifiant $g(\xi) \leqq y \leqq h(\xi)$ on a $\chi(\xi, y) = 0$, nous poserons $f(\xi) = 0$. Dans le cas contraire, il existe y_0 tel que $g(\xi) \leqq y_0 \leqq h(\xi)$ et que $\chi(\xi, y_0) \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe un nombre N tel que pour $m, n > N$ on a

$$|(f_m(\xi) - f_n(\xi))\,\chi(\xi, y)| < \varepsilon\,,$$

donc aussi

$$|f_m(\xi) - f_n(\xi)| < \frac{\varepsilon}{|\chi(\xi, y_0)|}\,.$$

La suite $f_n(\xi)$ est alors convergente et dans ce cas nous posons

$$f(\xi) = \lim_{n \to \infty} f_n(\xi)\,.$$

Comme cela, la fonction $f(\xi)$ est définie pour tout $\xi \in \langle a, b\rangle$. Or, il est aisé de voir que l'on a

$$\varphi(x, y) = f(x)\,\chi(x, y) \in H(\chi)\,,$$

c. q. f. d.

Définition. *Soit $\{i_n\}$ la suite définie ainsi: $i_1 = 1$; si n est un nombre naturel, nous l'écrirons sous forme de $n = 2^m - m + k$, $0 < k \leqq 2^m - 1$, m et k étant naturels, et nous posons*

$$i_{2m-m+k} = i_{2m-m-k} \quad pour \quad 0 < k \leqq 2^m - m - 1\,,$$
$$i_{2m-m+k} = k - 2^m + m + 2 \quad pour \quad 2^m - m - 1 < k \leqq 2^m - 1\,.$$

Soit ensuite $\{\chi_i(x, y)\}$ une suite de fonctions différant de zéro presque partout dans G; pour abréger, nous écrirons H_i au lieu de $H(\chi_i)$.

Nous appellerons suite de Kantorovitch de solutions approximatives de l'équation (1) avec les conditions aux limites (2) la suite $\{u_n\}$ de fonctions construites comme suit:

$$u_1 \in H_1$$

et l'on a

$$(u_1, v)_{\mathring{W}_2^2} = (p, v)_{L_2}$$

pour toutes les fonctions $v \in H_1$;

$$u_n = u_{n-1} + \varphi_n\,,$$

où

$$\varphi_n \in H_{i_n}\,,$$

et l'on a

$$(u_{n-1} + \varphi_n, v)_{\mathring{W}_2^2} = (p, v)_{L2} \tag{3}$$

pour toutes les fonctions $v \in H_{i_n}$.

Toutes ces fonctions u_n existent, car si nous écrivons les conditions (3) sous la forme $(\varphi_n, v)_{\mathring{W}_2^2} = (p, v)_{L_2} - (u_{n-1}, v)_{\mathring{W}_2^2}$, alors les seconds membres de ces équations représentent des fonctionnelles linéaires sur les sous-espaces correspondants H_{i_n} et les fonctions φ_n sont réalisations de ces fonctionnelles.

La construction des solutions approximatives se résume donc en procédé suivant: Nous supposons la fonction u_n sous la forme $u_n = u_{n-1} + \psi_n(x)\,\chi_{i_n}(x, y)$ et nous déterminons la fonction $\psi_n(x)$ par la condition que l'intégrale

$$\iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial y\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial y_2}\right)^2 - 2pu_n\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$
$$= \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\psi_n\chi_{in})}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2(\psi_n\chi_{in})}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\psi_n\chi_{in})}{\partial y^2}\right) - \right.$$
$$\left. - 2p(u_{n-1} + \psi_n\chi_{in})\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

soit minimum. Le problème est ainsi réduit à un problème en une variable. Quant à la construction effective des fonctions $\psi_n(x)$, nous avons le théorème suivant.

Theorème 1. *Soient $\chi(x, y)$ et $\bar{u}(x, y)$ des fonctions quatre fois continûment dérivables sur $\bar{G}$; soit $\chi(x, y) \neq 0$ presque partout, soit enfin $h(x, y)$ une fonction continue sur $\bar{G}$. Supposons ensuite qu'il existe un nombre positif a_0 tel que*

$$\int\limits_{g(x)}^{h(x)} \chi^2(x, y)\,\mathrm{d}y \geqq a_0$$

pour tout x. Soit

$$a(x) = \int\limits_{g(x)}^{h(x)} \chi^2 \,\mathrm{d}y\,, \quad b(x) = \int\limits_{g(x)}^{h(x)} 4\chi \frac{\partial \chi}{\partial x} \,\mathrm{d}y\,, \quad c(x) = \int\limits_{g(x)}^{h(x)} \left(6\chi \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + 2\chi \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}\right) \mathrm{d}y\,,$$

$$d(x) = \int\limits_{g(x)}^{h(x)} \left(4\chi \frac{\partial^3 \chi}{\partial x^3} + 4\chi \frac{\partial^3 \chi}{\partial x\, \partial y}\right) \mathrm{d}y\,, \quad e(x) = \int\limits_{g(x)}^{h(x)} \chi\, \Delta^2 \chi \,\mathrm{d}y\,,$$

$$H(x) = \int\limits_{g(x)}^{h(x)} (h\, \Delta^2 \bar{u})\, \chi \,\mathrm{d}y\,.$$

Alors il existe une et une seule solution f_0 de l'équation

$$a(x)\, f^{\mathrm{IV}} + b(x)\, f''' + c(x)\, f'' + d(x)\, f' + e(x)\, f = H(x)\,, \tag{4}$$

qui soit quatre fois continûment dérivable sur l'intervalle fermé $\langle a, b \rangle$ et qui vérifie les conditions aux limites

$$f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0\,. \tag{5}$$

La fonction $\varphi(x, y) = f_0(x)\, \chi(x, y)$ appartient alors à $H(\chi)$ et vérifie l'équation

$$(\bar{u} + \varphi, v)_{\mathring{W}_2^2} = (h, v)_{L_2}$$

pour tout $v \in H(\chi)$.

Démonstration. Sous nos hypothèses, l'équation (4) est équivalente au système d'équations

$$\begin{aligned} f' &= u \\ u' &= v \\ v' &= w \\ w' &= \tilde{b}(x)\, w + \tilde{c}(x)\, v + \tilde{d}(x)\, u + \tilde{e}(x)\, f + \tilde{H}(x)\,, \end{aligned} \tag{6}$$

où

$$\tilde{b}(x) = -\frac{b(x)}{a(x)}\,, \quad \tilde{c}(x) = -\frac{c(x)}{a(x)}\,, \quad \tilde{d}(x) = -\frac{d(x)}{a(x)}\,, \quad \tilde{e}(x) = -\frac{e(x)}{a(x)}\,,$$

$$\tilde{H}(x) = \frac{H(x)}{a(x)}\,.$$

Comme les coefficients du système (6) sont continus sur l'intervalle fermé $\langle a, b \rangle$, chaque solution de ce système est aussi continue sur $\langle a, b \rangle$ (voir p. ex. [6], p. 122). Ensuite, on sait bien (cf. [7], p. 271) que le problème aux limites pour l'équation (4) avec les conditions aux limites (5) a une seule solution pour n'importe quel second membre si et seulement si l'équation homogène correspondante avec les conditions (5) a seulement la solution nulle. Nous allons montrer que cette dernière condition est remplie. En effet, si $\tilde{f}$ est une solution du problème aux limites homogène, alors on a

$$a(x)\, \tilde{f}^{\mathrm{IV}} + b(x)\, \tilde{f}''' + c(x)\, \tilde{f}'' + d(x)\, \tilde{f}' + e(x)\, \tilde{f} = \int\limits_{g(x)}^{h(x)} \chi\, \Delta^2(\tilde{f}, \chi) \,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Multiplions les deux membres par $\tilde{f}(x)$ et intégrons par rapport à x de a à b, nous aurons

$$\int_a^b \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x \int_{g(x)}^{h(x)} \chi\, \Delta^2(\tilde{f}\chi)\,\mathrm{d}y = \iint_G \tilde{f}\chi\, \Delta^2(\tilde{f}\chi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

En tenant compte des conditions aux limites et en appliquant le théorème de Green, nous obtenons

$$\iint_G \left[\left(\frac{\partial^2(\tilde{f}\chi)}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2(\tilde{f}\chi)}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2(\tilde{f}\chi)}{\partial y^2}\right)^2\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \|\tilde{f}\chi\|_{\overset{\circ}{W}_2{}^2(G)} = 0\,.$$

On a donc $\tilde{f}\chi = 0$ et comme $\chi(x, y)$ est presque partout différent de zéro, on a aussi $\tilde{f} \equiv 0$.

Soit donc $f_0(x)$ une solution du problème aux limites pour l'équation (4) avec les conditions aux limites (5) et posons $\varphi(x, y) = f_0(x), \chi(x, y)$. Alors

$$\int_{g(x)}^{h(x)} \chi\, \Delta^2\varphi\,\mathrm{d}y = \int_{g(x)}^{h(x)} (h - \Delta^2\bar{u})\,\chi\,\mathrm{d}y\,.$$

Soit $f_1(x)$ une fonction arbitraire telle que $f_1(x)\,\chi(x, y) \in H(\chi)$. Multiplions la dernière égalité par $f_1(x)$ et intégrons en x de a à b

$$\iint_G f_1\chi\, \Delta^2\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_G [h(f_1\chi) - \Delta^2\bar{u}\, f_1\chi]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

c'est-à-dire

$$\iint_G f_1\chi(\Delta^2(\varphi + \bar{u}))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_G h f_1\chi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

A partir de là, en intégrant par parties et en tenant compte des conditions aux limites nous obtenons

$$\iint_G \left[\frac{\partial^2(\varphi + \bar{u})}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2(f_1\chi)}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2(\varphi + \bar{u})}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2(f_1\chi)}{\partial x \partial y} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2(\varphi + \bar{u})}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2(f_1\chi)}{\partial y^2}\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_G h(f_1\chi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Or comme $f_1\chi$ représente une fonction arbitraire de $H(\chi)$, la démonstration est par cela achevée.

Remarque. Le théorème 1 donne, sous des hypothèses relativement fortes, un procédé pour calculer les fonctions particulières de la suite de solutions approximatives de Kantorovitch. Si les hypothèses mentionnées ne se trouvent pas vérifiées ou bien que le domaine G soit tel que $g(a) = h(a)$, alors le théorème n'est plus applicable pour la construction de la suite de Kantorovitch, néanmoins, dans certains cas, la résolution de l'équation (4) peut donner des résultats utiles.

Maintenant, il nous reste encore à montrer la convergence de la suite de Kantorovitch vers la solution généralisée de notre problème aux limites.

Théorème 2. *Si la somme* $\sum_{i=1}^{\infty} H_i$ *(par cela nous comprenons l'ensemble de tous les éléments de la forme* $\sum_{i=1}^{\infty} h_i$, $h_i \in H_i$, *le nombre des* h_i *différents de zéro étant chaque fois fini) est dense dans* $\overset{\circ}{W}{}_2^2(G)$, *alors la suite de Kantorovitch de solutions approximatives tend en norme de l'espace* $\overset{\circ}{W}{}_2^2(G)$ *vers la solution généralisée* u *du problème aux limites* (1) *avec les conditions aux limites* (2).

Démonstration. Nous allons démontrer que l'on a

$$u - u_n = P_{i_n}^* \dots P_{i_1}^* u \,, \tag{7}$$

où $P_{i_j}^*$ est l'opérateur de projection sur l'espace orthogonal au sous-espace H_{i_j}. Comme la somme des sous-espaces $\sum_{i=1}^{\infty} H_i$ est dense en $\overset{\circ}{W}{}_2^2(G)$, l'intersection des leur compléments orthogonaux correspondants est le sous-espace nul, et donc, en vertu du théorème 1,5 de [2] nous obtenons $\|u - u_n\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(G)} \to 0$. Démontrons maintenant (7) par induction.

On a

$$u - u_1 = P_1^* u \,.$$

En effet, d'après les conditions (3) nous avons $u_1 \in H_1$ et $u - u_1$ est orthogonal à H_1, car pour n'importe quelle fonction $v \in H_1$ on a

$$(u - u_1, v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^2} = (u, v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^2} - (u_1, v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^2} = 0 \,.$$

Supposons que nous ayons

$$u - u_{n-1} = P_{i_{n-1}}^* \dots P_{i_1}^* u \,.$$

D'après la définition de la fonction u_n nous avons

$$u - u_n = u - u_{n-1} - \varphi_n \,,$$

c'est-à-dire

$$u - u_{n-1} = (u - u_n) + \varphi_n$$

où $\varphi_n \in H_{i_n}$ et vérifie la condition correspondante (3). Or, $(u - u_n)$ est orthogonal au sous-espace H_{i_n}, car pour n'importe quelle fonction $v \in H_{i_n}$ on a

$$(u - u_n, v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^2} = (u, v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^2} - (u_n, v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^2} = (u, v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^2} - (u_{n-1} + \varphi_n, v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^2} = 0 \,.$$

Il en vient donc

$$u - u_n = P_{i_n}^*(u - u_{n-1}) = P_{i_n}^* \dots P_{i_1}^* u \,.$$

Par cela l'égalité (7) et donc aussi le théorème entier est démontré.

Pour terminer nous citons deux exemples numériques.

Exemple I. Trouver la solution de l'équation

$$\Delta^2 u = 1$$

sur le carré C dont les sommets sont les points $(\pm 1, \pm 1)$, les conditions homogènes aux limites sur la frontière du carré étant exprimées par

$$u = 0 \, , \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \, .$$

Nous choisissons

$$\chi_i(x, y) = (1 - y^2)^2 \, y^i \, , \quad i = 0, 1, \ldots$$

Pour faire voir que les suppositions du théorème 2 sont vérifiées nous allons démontrer que l'ensemble des polynomes de la forme $(1 - x^2)^2(1 - y^2)^2 P(x, y)$ où $P(x, y)$ est un polynome arbitraire, est dense dans $\mathring{W}_2^2(C)$. Si nous avons une fonction quelconque $u \in \mathring{W}_2^2(C)$, il existe une fonction $\tilde{u}$, indéfiniment dérivable et s'annulant à l'extérieur d'un compact situé à l'intérieur de C, telle que $\|u - \tilde{u}\|_{\mathring{W}_2^2} < \varepsilon$. Prenons maintenant la fonction $\dfrac{\tilde{u}}{(1 - x^2)^2(1 - y^2)^2}$; cette fonction-ci admet sur C des dérivées de tout ordre, on peut donc l'approcher avec toutes ses dérivées sur la fermeture de C par un polynome $Q(x, y)$ de telle manière que

$$\left\| \frac{\tilde{u}}{(1 - x^2)^2(1 - y^2)^2} - Q(x, y) \right\|_{\mathring{W}_2^2} < \varepsilon \, .$$

Toutes les dérivées de la fonction $(1 - x^2)^2(1 - y^2)^2$ étant bornées sur C, nous avons

$$\|\tilde{u} - (1 - x^2)^2(1 - y^2)^2 \, Q(x, y)\|_{\mathring{W}_2^2} =$$
$$= \left\| (1 - x^2)^2(1 - y^2)^2 \left(\frac{\tilde{u}}{(1 - x^2)^2(1 - y^2)} - Q(x, y) \right) \right\|_{\mathring{W}_2^2} \leqq M\varepsilon \, .$$

La fonction u admet donc, avec une précision arbitraire, des approximations par polynomes de la forme donnée.

Comme le second membre de l'équation, considérée est symétrique, il est possible de supprimer les fonctions χ_i d'indices impaires, car les fonctions φ_i correspondantes s'annulent identiquement.

On a construit, à l'aide du théorème 1, les trois premières approximations. Posons

$$A_k = \int_{-1}^{1} \chi_k^2 \, \mathrm{d}y \, , \quad B_k = \int_{-1}^{1} \chi_k \chi_k'' \, \mathrm{d}y \, , \quad C_k = \int_{-1}^{1} \chi_k \chi_k^{\mathrm{IV}} \, \mathrm{d}y \, , \quad D_k = \int_{-1}^{1} \chi_k \, \mathrm{d}y \, .$$

Alors $u_1 = \psi_1(x)(1 - y^2)^2$, où ψ_1 est solution de l'équation

$$A_0 \psi^{\mathrm{IV}} + 2B_0 \psi'' + C_0 \psi = D_0$$

avec les conditions aux limites

$$\psi(\pm 1) = \psi'(\pm 1) = 0 \, ; \tag{8}$$

$u_2 = u_1 + \psi_2(x)(1 - y^2)^2\, y^2$, où φ_2 est solution de l'équation

$$A_2\psi^{\mathrm{IV}} + 2B_2\psi'' + C_2\psi = D_2 - \int_{-1}^{1} \Delta^2 u_1 \chi_2 \,\mathrm{d}y$$

avec les conditions aux limites (8);

$u_3 = u_2 + \psi_3(x)(1 - y^2)^2$, où ψ_3 est solution de l'équation

$$A_0\psi^{\mathrm{IV}} + 2B_0\psi'' + C_0\psi = D_0 - \int_{-1}^{1} \Delta^2 u_2 \chi_0 \,\mathrm{d}y$$

avec les conditions aux limites (8).

Les valeurs numériques correspondantes sont

$$\psi_1(x) = 0{,}04167 - 0{,}02093 \operatorname{ch} \alpha_0 x \cos \beta_0 x - 0{,}00183 \operatorname{sh} \alpha_0 x \sin \beta_0 x\,;$$

$$\begin{aligned}\psi_2(x) = {} & 0{,}00026 \operatorname{ch} \alpha_1 x \cos \beta_1 x + 0{,}00003 \operatorname{sh} \alpha_1 x \sin \beta_1 x + \\ & + 0{,}00545 \operatorname{ch} \alpha_0 x \cos \beta_0 x - 0{,}00509 \operatorname{sh} \alpha_0 x \sin \beta_0 x\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_3(x) = {} & - 0{,}00068 \operatorname{ch} \alpha_0 x \cos \beta_0 x + 0{,}00127 \operatorname{sh} \alpha_0 x \sin \beta_0 x + \\ & + 0{,}00003 \operatorname{ch} \alpha_1 x \cos \beta_1 x - \\ & - x(0{,}00042 \operatorname{ch} \alpha_0 x \sin \beta_0 x + 0{,}00055 \operatorname{sh} \alpha_0 x \cos \beta_0 x)\,,\end{aligned}$$

où

$$\alpha_0 = 2{,}07515\,, \quad \beta_0 = 1{,}14291\,, \quad \alpha_1 = 4{,}37990\,, \quad \beta_1 = 2{,}48669\,.$$

Pour pouvoir comparer nous donnons ici encore une table de valeurs de la solution exacte et de nos approximations pour les points $(0; 0)$ et $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, en prenant pour solution exacte celle de HENCKY (voir [1], p. 79).

Point / Solution	$(0; 0)$	$(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$
u_1	0,02074	0,00702
u_2	0,02074	0,00753
u_3	0,02009	0,00726
exacte	0,02024	0,00736

Exemple II. Résoudre l'équation

$$\Delta u = f$$

dans le carré $(\pm 1, \pm 1)$, la condition aux limites étant $u = 0$. Ici, f est définie comme suit

$$f(x, y) = \Delta \cos^3 \frac{5\pi}{8} \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{pour} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leqq 0{,}8\,,$$

$$f(x, y) = 0 \qquad\qquad \text{pour} \quad \sqrt{x^2 + y^2} > 0{,}8\,.$$

La solution exacte de notre problème est donc

$$u(x, y) = \cos^3 \frac{5\pi}{8} \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{pour} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leqq 0{,}8$$

$$u(x, y) = 0 \qquad\qquad \text{pour} \quad \sqrt{x^2 + y^2} > 0{,}8 \,.$$

Posons

$$\chi_i(x, y) = \sin \frac{(2i-1)\pi}{2} (y+1)\,, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Il faut de nouveau vérifier les hypothèses du théorème 2. Nous approchons tout d'abord la fonction arbitraire $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(C)$ par une fonction $\tilde{u}$ indéfiniment dérivable et s'annulant à l'extérieur d'un certain compact situé à l'intérieur de C. La fonction $\tilde{u}$ étant suffisamment régulière, elle est uniformément approchée, avec ses dérivées premières, par les sommes partielles de son développement en série de Fourier (avec prolongement antisymétrique) qui sont de la forme

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \sin \frac{(2i-1)\pi}{2} (y+1) \sin \frac{(2j-1)\pi}{2} (x+1)\,,$$

c'est-à-dire qu'elles se trouvent dans la somme d'espaces $\sum_{i=1}^{N} H_i$.

Dans ce cas (en vertu de l'orthogonalité des sines) le processus d'approximations successives se décompose et les solutions approximatives sont

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x) \sin \frac{(2i-1)\pi}{2} (y+1)$$

où les fonctions $\psi_i(x)$ sont solutions de l'équation

$$\psi'' - \left(\frac{(2i-1)\pi}{2}\right)^2 \psi = \int_{-1}^{1} f(x, y) \sin \frac{(2i-1)\pi}{2} (y+1)\, dy \tag{9}$$

avec les conditions aux limites $y(\pm 1) = 0$.

Les seconds membres des équations (9) ont été calculés par intégration numérique et les problèmes aux limites pour les èquations (9) ont été résolus à l'aide des fonctions de Green aussi par intégration numérique. Pour cette intégration on a appliqué la modification de Filon de la formule de Simpson, le pas étant fixé à $h = 0{,}05$.

Les valeurs des solutions approximatives et exacte sont de nouveau rapportées dans la table suivant:

Point / Solution	(0; 0)	(0,2; 0,4)	(0,4; 0,2)	(0,6; 0,8)
u_1	0,627193	0,189043	0,390758	−0,000143
u_2	0,947866	0,259370	0,311313	−0,000091
u_3	1,006000	0,259370	0,258095	−0,000091
u_4	0,998749	0,259309	0,259742	−0,000114
u_5	0,999608	0,260809	0,259707	−0,000080
u_6	0,999965	0,260175	0,260276	−0,000095
exacte	1,—	0,260443	0,260443	0

Littérature

[1] *Л. В. Канторович, В. И. Крылов:* Приближенные методы высшего анализа. Москва-Ленинград 1952.

[2] *М. Прагер:* Об одном принципе сходимости в пространстве Гильберта. Чех. мат. журнал, 10 (85), 1960, 271—282.

[3] *С. Л. Соболев:* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград 1950.

[4] *E. Gagliardo:* Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili. Ric. Di Mat., 7 1958, 102—137.

[5] *М. И. Вишик, О. А. Ладыженская:* Краевые задачи для уравнений в частных производных. Усп. мат. наук, XI, 1956, 41—98.

[6] *И. Г. Петровский:* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва-Ленинград 1949.

[7] *Э. Камке:* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва 1951.

Souhrn

O JISTÉ MODIFIKACI KANTOROVIČOVY METODY

MILAN PRÁGER

V článku je na příkladě biharmonické rovnice popsána jistá modifikace Kantorovičovy metody pro přibližné řešení eliptických parciálních diferenciálních rovnic, která má umožnit snadnější zvládnutí numerického výpočtu při hledání vyšších aproximací.

Navrhovaná metoda spočívá v tomto postupu: Na oblasti G, omezené křivkami $y = g(x)$, $y = h(x)$ a úsečkami $g(a) \leqq y \leqq h(a)$, $g(b) \leqq y \leqq h(b)$, máme řešit okrajový problém $\Delta^2 u = p$ v G a $u = 0$, $\frac{\partial n}{\partial u} = 0$ na $\dot{G}$. Zvolíme posloupnost funkcí $\chi_k(x, y)$ a n-té přibližné řešení u_n budeme předpokládat ve tvaru $u_n = u_{n-1} + \psi_n(x)\, \chi_{i_n}(x, y)$, kde $\{i_n\}$ je posloupnost, definovaná

na str. 307 a $\psi_n(x)$ je hledaná funkce, kterou určíme z podmínky, aby příslušný integrál energie byl minimální. To vede za jistých předpokladů (věta 1) na řešení jedné obyčejné diferenciální rovnice, což je numericky výhodné. V článku je dokázána konvergence této metody (věta 2) a uvedeny dva numerické příklady.

Резюме

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА КАНТОРОВИЧА

МИЛАН ПРАГЕР (Milan Práger)

В статье описана на примере бигармонического уравнения одна модификация метода Канторовича для приближенного решения эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных; целью этой модификации является облегчение численных расчетов при нахождении высших аппроксимаций.

Предложенный метод заключается в следующем: На области G, ограниченной кривыми $y = g(x)$, $y = h(x)$ и отрезками $g(a) \leqq y \leqq h(a)$, $g(b) \leqq y \leqq h(b)$, задана краевая задача $\Delta^2 u = p$ в G и $u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ на $\dot{G}$. Возьмем последовательность функций $\chi_k(x, y)$ и будем предполагать, что n-ое приближенное решение u_n имеет вид $u_n = u_{n-1} + \psi_n(x)\, \chi_{i_n}(x, y)$, где $\{i_n\}$ — последовательность, определенная на стр. 307, и $\psi_n(x)$ — искомая функция, которую определим на основании требования, чтобы соответствующий интеграл был минимальным. При определенных условиях (теорема 1) дело сводитая к решению одного обыкновенного дифференциального уравнения, что является с вычислительной точки зрения выгодным. В статье доказана сходимость этого метода (теорема 2), и приведены два численных примера.