Aplikace matematiky

Petre P. Teodorescu
Über einige räumliche Probleme der Elastizitätstheorie

Aplikace matematiky, Vol. 4 (1959), No. 5, 225 (325)–238 (338)

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102674

ČLÁNKY

ÜBER EINIGE RÄUMLICHE PROBLEME DER ELASTIZITÄTSTHEORIE

P. P. Teodorescu

DT: 539.31

(Eingegangen am 1. Dezember 1958.)

Ausgehend von den Beltramischen Gleichungen wird eine Methode zur Lösung des räumlichen Problems der Elastizitätstheorie mit Hilfe von drei biharmonischen Funktionen oder drei bzw. vier (für $\mu = \frac{1}{4}$) harmonischen Funktionen dargestellt.

Es werden die Ergebnisse für den elastischen Halbraum und die elastische Schicht angegeben.

Ferner wird der Weg für die Lösung des elastischen Parallelepipedons gezeigt.

1. Im allgemeinen ergeben sich in der Elastizitätstheorie bei der Bestimmung des Spannungs- und Verzerrungszustandes in einem elastischen, homogenen und isotropen Körper je nach den Randbedingungen drei Grundprobleme.

Bei dem ersten Grundproblem sind die Randbedingungen in Spannungen gegeben und eine Lösung des Problems in Spannungen ist angebracht. Beim zweiten Grundproblem sind die Randbedingungen in Verschiebungen gegeben und die Lösung erfolgt ebenfalls in Verschiebungen. Im Rahmen des gemischten Problems (des dritten Grundproblems) sind die Randbedingungen teils in Spannungen, teils in Verschiebungen gegeben und man kann sowohl das eine als auch das andere Lösungsverfahren anwenden.

Die Behandlung des Problems in Verschiebungen, die von den Laméschen Gleichungen ausgeht, ist in der Fachliteratur am häufigsten zu finden. Eine Lösung in Spannungen wurde 1930 von B. G. Galerkin [6] mit Hilfe von drei biharmonischen Funktionen gegeben und später von R. D. Mindlin [9] und Gr. C. Moisil [10] wieder aufgenommen. Von diesen Ergebnissen ausgehend, fanden P. F. Papkovitsch [14] und H. Neuber [13] eine Darstellung mit Hilfe von drei harmonischen Verschiebungsfunktionen. Das Problem wurde später von F. S. Tschurikov [3], M. G. Slobodiansky [15] und R. A. Eubanks, E. Sternberg [4] erneut behandelt. G. Fichera [5] zeigte, dass eine allgemeine Darstellung mit Hilfe einer einzigen Verschiebungsfunktion nicht möglich ist.

K. Marguerre [7] veröffentlichte eine interessante Synthese der auf diesem Gebiet erzielten Ergebnisse.

Was die Lösung der Elastizitätsprobleme in Spannungen anbelangt, sind bisher bedeutend weniger Arbeiten erschienen. Die interessantesten Darstellungen verdanken wir J. Maxwell [8] und G. Morera [12], die später von Gr. C. Moisil [11] weiter entwickelt wurden. Diese Darstellungen genügen jedoch nur den Gleichgewichts-, nicht aber den Kontinuitätsgleichungen, wodurch das Problem kompliziert wird.

2. Von den Beltramischen Gleichungen¹)

$$\Delta\sigma_x + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) = 0\,, \tag{1}$$

$$\Delta\tau_{yz} + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) = 0 \tag{1'}$$

ausgehend, wo σ_x, σ_y, σ_z, τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{xy} die Normal- und Schubspannungskomponenten, μ die Poissonsche Querzahl und Δ den Laplace-Operator bedeuten, hat der Verfasser kürzlich [19] das Problem in Spannungen gelöst.

Die Spannungen werden somit durch die Beziehungen

$$\sigma_x = \Delta F_x - \frac{3}{2+\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,, \tag{2}$$

$$\tau_{yz} = -\frac{3}{2+\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}(F_{xy}-F_{zx}) + \varphi_x \tag{2'}$$

ausgedrückt, wo $F_x(x, y, z)$, $F_y(x, y, z)$, $F_z(x, y, z)$ biharmonische Funktionen

$$\Delta\Delta F_x = \Delta\Delta F_y = \Delta\Delta F_z = 0\,, \tag{3}$$

die Funktionen $F_{yz}(y, z)$, $F_{zx}(z, x)$, $F_{xy}(x, y)$, $\varphi_x(x, y, z)$, $\varphi_y(x, y, z)$, $\varphi_z(x, y, z)$ harmonische

$$\Delta F_{yz} = \Delta F_{zx} = \Delta F_{xy} = 0\,, \tag{4}$$

$$\Delta\varphi_x = \Delta\varphi_y = \Delta\varphi_z = 0 \tag{4'}$$

sind und die Bezeichnung

$$3F = F_x + F_y + F_z \tag{5}$$

eingeführt wurde.

Die Gleichgewichtsgleichungen — in Abwesenheit der Massenkräfte —

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} = 0 \tag{6}$$

zeigen, dass die Funktionen φ_x, φ_y, φ_z partikuläre Integrale des Gleichungssystems

$$\frac{\partial\varphi_y}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_z}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\Delta\left(F_x - \frac{3}{2+\mu}F\right) \tag{7}$$

sein müssen.

¹) Hier und im Folgenden wurde nur die erste Gleichung geschrieben; die übrigen ergeben sich durch zirkuläre Permutation.

Als partikuläre Integrale kann man die harmonischen Funktionen

$$\varphi_x = \frac{3\mu}{2(2+\mu)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int\int \Delta F \, dy \, dz + \frac{1}{2} \Delta \left(\int \frac{\partial F_y}{\partial z} dy + \int \frac{\partial F_z}{\partial y} dz \right) \qquad (8)$$

wählen, wobei es erforderlich ist, die arbiträren Funktionen, die wegen der Integralen auftreten, so zu bestimmen, dass das System (7) befriedigt ist. Diese Funtionen können immer gleich Null gesetzt werden, wenn die biharmonischen Funktionen F_x, F_y, F_z nach E. ALMANSI [1] mit Hilfe von sechs harmonischen Funktionen der Form

$$e^{\alpha x + \beta y + \gamma z} \quad (\alpha, \beta, \gamma = \text{konst.}) \, ,$$

wo

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

ist, dargestellt werden.

Die Verschiebungskomponenten erhält man zu

$$\frac{E}{1+\mu} [u - (- y\omega_{xy}^0 + z\omega_{zx}^0 + u_0)] = \Delta \int \left(F_x - \frac{3}{2+\mu} F \right) dx -$$

$$- \frac{3}{2+\mu} \frac{\partial F}{\partial x} + 2\overline{F}_{yz} + f_{yz} \, , \qquad (10)$$

wo E den Elastizitätsmodul darstellt, die Funktionen $\overline{F}_{yz}(y, z)$, $\overline{F}_{zx}(z, x)$, $\overline{F}_{xy}(x,y)$ harmonische Konjugierte der Funktionen $F_{yz}(y, z)$, $F_{zx}(z, x)$, $F_{xy}(x, y)$ und die Funktionen $f_{yz}(y, z)$, $f_{zx}(z, x)$, $f_{xy}(x, y)$ partikuläre Integrale des Gleichungssystem mit getrennten Variabeln

$$\frac{\partial f_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial f_{xy}}{\partial y} = \frac{3\mu}{2+\mu} \left(\int \frac{\partial F}{\partial z} dy + \int \frac{\partial F}{\partial y} dz + \int\int \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dy \, dz \right) \qquad (11)$$

sind.

Die Konstanten u_0, v_0, w_0, ω_{yz}^0, ω_{zx}^0, ω_{xy}^0 sind die Verschiebungen bzw. Umdrehungen des Körpers, der als starr betrachtet werden soll, und werden durch die Auflagebedingungen bestimmt.

3. Stellt man nach E. ALMANSI eine biharmonische Funktion F mit Hilfe von zwei harmonischen Funktionen Φ und Ψ

$$F = \Psi + (ax + by + cz) \, \Phi \qquad (12)$$

dar, wo a, b, c arbiträre Konstanten sind, und geht von den Ausdrücken (2), (2′) aus, so kann man die Spannungen in der Form

$$\sigma_x = \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} - \frac{1}{2(2+\mu)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \, ,$$

$$\tau_{yz} = - \frac{1}{2(2+\mu)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \, \partial z} + \frac{\partial}{\partial x} (F_{xy} - F_{zx}) + \psi_x \qquad (13')$$

schreiben, wo

$$\Phi = x\Phi_x + y\Phi_y + z\Phi_z + \Phi_0 \qquad (14)$$

und die Funktionen $\Phi_x(x, y, z)$, $\Phi_y(x, y, z)$, $\Phi_z(x, y, z)$, $\Phi_0(x, y, z)$, $\psi_x(x, y, z)$, $\psi_y(x, y, z)$, $\psi_z(x, y, z)$ harmonisch sind

$$\Delta\Phi_x = \Delta\Phi_y = \Delta\Phi_z = \Delta\Phi_0 = 0\,, \tag{15}$$

$$\Delta\psi_x = \Delta\psi_y = \Delta\psi_z = 0\,. \tag{15'}$$

Die Funktionen ψ_x, ψ_y, ψ_z sind partikuläre Integrale des Systems

$$\frac{\partial\psi_y}{\partial z} + \frac{\partial\psi_z}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi_x}{\partial x} - \frac{1}{2+\mu}\Psi\right). \tag{16}$$

Als partikuläre Integrale kann man die harmonischen Funktionen

$$\psi_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi_y}{\partial z} + \frac{\partial\Phi_z}{\partial y}\right) + \frac{\mu}{2(2+\mu)}\int\int\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{17}$$

wählen, wobei es erforderlich ist, die arbiträren Funktionen, die infolge der Integrale auftreten, so zu bestimmen, dass das System befriedigt ist. Diese Funktionen können immer gleich Null genommen werden, wenn man harmonische Funktionen der Form (9), (9′) anwendet.

Die Verschiebungskomponenten können folgendermassen geschrieben werden

$$\frac{E}{1+\mu}\left[u - (-y\omega_{xy}^0 + z\omega_{zx}^0 + u_0)\right] = \Phi_x - \frac{1}{2(2+\mu)}\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{\mu}{2+\mu}\int\Psi\,\mathrm{d}x + {} + 2\overline{F}_{yz} + f_{yz}\,, \tag{18}$$

wobei die Funktionen $f_{yz}(y, z)$, $f_{zx}(z, x)$, $f_{xy}(x, y)$ durch das Gleichungssystem mit getrennten Variabeln

$$\frac{\partial f_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial f_{xy}}{\partial y} = \frac{\mu}{2+\mu}\left(\int\frac{\partial\Psi}{\partial z}\,\mathrm{d}y + \int\frac{\partial\Psi}{\partial y}\,\mathrm{d}z + \int\int\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right) \tag{19}$$

gegeben sind.

4. Wie kürzlich von R. A. Eubanks und E. Sternberg gezeigt wurde, kann mit Ausnahme des Falles $\mu = \frac{1}{4}$ eine dieser Funktionen durch die übrigen ausgedrückt oder gleich Null (z. B. $\Phi_0 = 0$) gesetzt werden, je nachdem was für die Rechnungen günstiger ist. Spannungs- und Verschiebungszustand des Körpers sind also durch drei harmonische Funktionen eindeutig bestimmt.

Die Grenzbedingungen nehmen in Spannungen (erstes Grundproblem der Elastizitätstheorie) folgende Form an

$$p_{nx} = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy}\cos(n, y) + \tau_{zx}\cos(n, z)\,, \tag{20}$$

wo (p_{nx}, p_{ny}, p_{nz}) die Intensität der äusseren Belastung auf der Flächeneinheit mit der äusseren Normalen n ist.

Benutzt man die Darstellungen (13), (13′), so hat man drei harmonische Funktionen zu bestimmen, für welche drei Bedingungen in einem beliebigen

Punkt des Randes gegeben werden. In diesem Falle sind die drei Funktionen für ein einfach konnexes Gebiet eindeutig bestimmt, wenn die Randbelastungen im Gleichgewicht stehen.[2])

Verwendet man dagegen die Darstellungen (2), (2′), so sind drei biharmonische Funktionen zu bestimmen, für welche drei Bedingungen in einem beliebigen Randpunkte gegeben sind, was der Bestimmung von sechs harmonischen Funktionen mit den gleichen Grenzbedingungen gleichkommt; diese Darstellung ist nicht mehr eindeutig. Trotzdem hat man auf Grund des Kirchhoffschen Satzes die Gewissheit, dass unter bestimmten, praktisch ziemlich umfassenden Bedingungen die Lösung des Problems (Spannungs- und Verschiebungszustand) eindeutig ist, selbst wenn sie verschiedenen Gruppen von Spannungsfunktionen entspricht.

Ferner scheint es, dass die harmonischen Funktionen von zwei Variabeln F_{yz}, F_{zx}, F_{xy}, die häufig gleich Null genommen werden können, für die Aufstellung der Randbedingungen von Nutzen sind. Tatsächlich treten sie nur in den Ausdrücken (2′) und (13′) der Schubspannungen auf und können zur Korrektur der Nichterfüllung gewisser Randbedingungen durch diese Schubspannungen dienen.

Mit Hilfe der obigen Darstellungen kann man interessante Ergebnisse erzielen, indem man harmonische und biharmonische Polynome oder Funktionen der Form (9), (9′) [17], [18], [20], [21], [22] benützt.

5. Es soll zuerst der Fall des elastischen Halbraumes unter äusserer Belastung betrachtet werden.

Die Koordinatenachsen Ox, Oy werden in der Trennungsebene und die Achse Oz gegen das Innere des Halbraumes gerichtet angenommen. Man kann für die gegebene Belastung im allgemeinen vier Fälle unterscheiden, je nach der Symmetrie oder Antimetrie gegenüber der Ox- und Oy-Achse.

Es soll hier nur der Fall der symmetrischen Belastung in Bezug auf beide Achsen behandelt werden, da die Ergebnisse für die andern Fälle analog folgen.

Im Falle einer periodichen Belastung in zwei Richtungen

$$p(x, y) = b_0 + \sum_{n,\, m} b_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y \,, \tag{21}$$

wo

$$\alpha_n = \frac{2n\pi}{L_x} = \frac{n\pi}{a}\,, \quad \beta_m = \frac{2m\pi}{L_y} = \frac{m\pi}{b}\,, \tag{22}$$

b_0 die mittlere Belastung auf einem rechteckigen Abschnitt, $L_x = 2a$ und $L_y = 2b$ die Längen der Perioden in den beiden Richtungen sind, seien Spannungsfunktionen der Form

[2]) Es ist keine Beweisführung für dieses Ergebnis bekannt; da jedoch eine Analogie zum ebenen Problem besteht, ist es sehr wahrscheinlich, dass dieses Resultat korrekt ist.

$$
\begin{aligned}
F_x &= K_1 x^2 + \sum_{n,m} (A'_{nm} + B'_{nm}\gamma_{nm} z) \cos \alpha_n x \cos \beta_m y \; e^{-\gamma_{nm} z} \,, \\
F_y &= K_2 y^2 + \sum_{n,m} (A''_{nm} + B''_{nm}\gamma_{nm} z) \cos \alpha_n x \cos \beta_m y \; e^{-\gamma_{nm} z} \,, \\
F_z &= K_3 z^2 + \sum_{n,m} (A'''_{nm} + B'''_{nm}\gamma_{mn} z) \cos \alpha_n x \cos \beta_m y \; e^{-\gamma_{nm} z} \,,
\end{aligned}
\tag{23}
$$

mit

$$\gamma_{nm} = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \tag{24}$$

und

$$F_{yz}(y, z) = F_{zx}(z, x) = F_{xy}(x, y) = 0 \tag{25}$$

gegeben.

Stellt man die Randbedingungen

$$z = 0\colon \sigma_z = p(x, y)\,,\quad \tau_{zx} = 0\,,\quad \tau_{zy} = 0\,, \tag{26}$$

wobei dafür Sorge zu tragen ist, dass man für $z \to \infty$ endliche Spannungen erhält und dass für $x \to \infty$ und $y \to \infty$ die Verschiebungen u und v nicht unendlich werden, so erhält man Spannungsfunktionen der Form[3])

$$
\begin{aligned}
F_x - \frac{\mu(2+\mu)}{2(1-\mu^2)}\, b_0 x^2 &= -\, F_y + \frac{\mu(2+\mu)}{2(1-\mu^2)}\, b_0 y^2 = \\
&= \mu z \sum_{n,m} \frac{\alpha_n^2 - \beta_m^2}{\gamma_{nm}^3}\, b_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y \, e^{-\gamma_{nm} z} \,, \\
F_z &= (2+\mu) \sum_{n,m} \frac{1}{\gamma_{nm}^2} (1 + 2\mu - \gamma_{nm} z)\, b_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y \, e^{-\gamma_{nm} z} \,.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Diese Funktionen ergeben die Spannungen

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{\mu}{1-\mu}\, b_0 + \sum_{n,m} \frac{1}{\gamma_{nm}^2} [\alpha_n^2 (1 - \gamma_{nm} z) + 2\mu\beta_m^2]\, b_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y \, e^{-\gamma_{nm} z} \,, \\
\sigma_y &= \frac{\mu}{1-\mu}\, b_0 + \sum_{n,m} \frac{1}{\gamma_{nm}^2} [\beta_m^2 (1 - \gamma_{nm} z) + 2\mu\alpha_n^2]\, b_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y \, e^{-\gamma_{nm} z} \,, \\
\sigma_z &= b_0 + \sum_{n,m} (1 + \gamma_{nm} z)\, b_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y \, e^{-\gamma_{nm} z} \,,
\end{aligned}
\tag{28}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n,m} \beta_m z b_{nm} \cos \alpha_n x \sin \beta_m y \, e^{-\gamma_{nm} z} \,, \\
\tau_{zx} &= \sum_{n,m} \alpha_n z b_{nm} \sin \alpha_n x \cos \beta_m y \, e^{-\gamma_{nm} z} \,, \\
\tau_{xy} &= -\sum_{n,m} \frac{\alpha_n \beta_m}{\gamma_{nm}^2} (1 - 2\mu - \gamma_{nm} z)\, b_{nm} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y \, e^{-\gamma_{nm} z} \,.
\end{aligned}
\tag{28'}
$$

[3]) Es muss bemerkt werden, dass man unendlich viele Gruppen von Spannungsfunktionen erhalten kann, die alle den gleichen Spannungszustand ergeben.

Die obigen Beziehungen wurden so geschrieben, dass die Art und Weise, in der diese Ergebnisse die Verallgemeinerung der vom Falle der elastischen Halbebene her bekannten Resultate darstellen, klar hervortritt.

Unter Berücksichtigung der Symmetriebedingungen findet man die Verschiebungskomponenten in der Form

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{1+\mu}{E} \sum_{n,m} \frac{\alpha_n}{\gamma_{nm}^2} (1 - 2\mu - \gamma_{nm} z)\, b_{nm} \sin \alpha_n x \cos \beta_m y\, e^{-\gamma_{nm} z}\,, \\
v &= \frac{1+\mu}{E} \sum_{n,m} \frac{\beta_m}{\gamma_{nm}^2} (1 - 2\mu - \gamma_{nm} z)\, b_{nm} \cos \alpha_n x \sin \beta_m y\, e^{-\gamma_{nm} z}\,, \qquad (29) \\
w &= w_0 + \frac{1+\mu}{E} \left\{ \frac{1-2\mu}{1-\mu} b_0 z - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n,m} \frac{1}{\gamma_{nm}} [2(1-\mu) + \gamma_{nm} z]\, b_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y\, e^{-\gamma_{nm} z} \right\}.
\end{aligned}
$$

Praktisch hängt die Konvergenz der Reihen, welche die Spannungen ergeben, von dem Faktor b_{nm} ab. Sogar im Falle von Einzellasten kann die Summe der Reihe durch eine kleine Anzahl von Gliedern angenähert werden, und zwar dank dem Exponentialfaktor. Die Reihen, welche die Verschiebungen ergeben, sind in Abhängigkeit von dem Faktor b_{nm}/γ_{nm} konvergent; sie können also mit Hilfe einer noch kleineren Anzahl von Gliedern als die Spannungen berechnet werden.

Unter Berücksichtigung von (21) kann man für die Trennungsebene schreiben:

$$
\begin{aligned}
\sigma_x(x, y, 0) &= p(x, y) - b_0 + \frac{\mu}{1-\mu} b_0 - (1 - 2\mu) \sum_{n,m} \left(\frac{\beta_m}{\gamma_{nm}}\right)^2 b_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y\,, \\
\sigma_y(x, y, 0) &= p(x, y) - b_0 + \frac{\mu}{1-\mu} b_0 - (1 - 2\mu) \sum_{n,m} \left(\frac{\alpha_n}{\gamma_{nm}}\right)^2 b_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y\,,
\end{aligned} \qquad (30)
$$

$$
\tau_{xy}(x, y, 0) = -(1 - 2\mu) \sum_{n,m} \frac{\alpha_n \beta_m}{\gamma_{nm}^2} b_{nm} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y\,, \qquad \mathbf{(30')}
$$

$$
w(x, y, 0) = w_0 - \frac{2(1-\mu^2)}{E} \sum_{n,m} \frac{b_{nm}}{\gamma_{nm}} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y\,, \qquad \mathbf{(30'')}
$$

wo die Differenz zwischen der äusseren und der mittleren Belastung in Rechnung gezogen ist.

6. Steht der elastische Halbraum unter einer örtlichen Belastung der Form

$$
p(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty b(\alpha, \beta) \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta\,, \qquad (31)
$$

wo

$$
b(\alpha, \beta) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty p(\xi, \eta) \cos \alpha \xi \cos \beta \eta \, d\xi \, d\eta \qquad (32)
$$

ist, so wendet man Spannungsfunktionen der Form

$$F = \int_0^\infty \int_0^\infty [A(\alpha, \beta) + \gamma z B(\alpha, \beta)] \, e^{-\gamma z} \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta \tag{33}$$

an, wo

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \tag{34}$$

ist.

Die Spannungsfunktionen können folgendermassen geschrieben werden

$$\begin{aligned} F_x = - F_y &= \mu z \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\gamma^3} \, b(\alpha, \beta) \, e^{-\gamma z} \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta \,, \\ F_z &= (2 + \mu) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\gamma^2} \, (1 + 2\mu - \gamma z) \, b(\alpha, \beta) \, e^{-\gamma z} \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta \,, \end{aligned} \tag{35}$$

also ähnlich den Beziehungen (24); man erhält auf diese Weise analoge Ergebnisse.

Diese Resultate verallgemeinern die von J. BOUSSINESQ [2] für den Fall einer normalen Einzellast auf der Trennungsebene gefundenen Ergebnisse.

7. Im Falle der elastischen Schicht (unendliche, dicke, ebene Platte) kann man analoge Untersuchungen durchführen. Man nimmt dafür die Ox- und Oy-Achse in der Mittelebene und die Oz-Achse normal zu dieser Ebene.

Es sollen die Fälle der Symmetrie bzw. Antimetrie in bezug auf die Oxy-Ebene in Betracht gezogen werden.

Für eine periodische Belastung in zwei Richtungen, die gegenüber der Oxy-Ebene symmetrisch ist, werden als Spannungsfunktionen

$$\begin{aligned} F_x &= K_1 x^2 + \sum_{n,m} (A'_{nm} \operatorname{ch} \gamma_{nm} z + \gamma_{nm} z B'_{nm} \operatorname{sh} \gamma_{nm} z) \cos \alpha_n x \cos \beta_m y \,, \\ F_y &= K_2 y^2 + \sum_{n,m} (A''_{nm} \operatorname{ch} \gamma_{nm} z + \gamma_{nm} z B''_{nm} \operatorname{sh} \gamma_{nm} z) \cos \alpha_n x \cos \beta_m y \,, \\ F_z &= K_3 z^2 + \sum_{n,m} (A'''_{nm} \operatorname{ch} \gamma_{nm} z + \gamma_{nm} z B'''_{nm} \operatorname{sh} \gamma_{nm} z) \cos \alpha_n x \cos \beta_m y \,, \end{aligned} \tag{36}$$

mit den Bezeichnungen (19) und (21) gewählt.

Mit den Randbedingungen

$$z = \pm c : \sigma_z = p(x, y) \,, \quad \tau_{zx} = 0 \,, \quad \tau_{zy} = 0 \tag{37}$$

und unter der Voraussetzung, dass die Verschiebungen u und v nicht gleichzeitig mit den Variabeln x und y unendlich werden (die seitliche Verformung ist durch die Umgebung verhindert), findet man die Spannungsfunktionen

$$\begin{aligned} F_x - \frac{\mu(2 + \mu)}{2(1 - \mu^2)} \, b_0 x^2 &= - F_y + \frac{\mu(2 + \mu)}{2(1 - \mu^2)} \, b_0 y^2 = \\ &= - \mu z \sum_{n,m} \frac{\alpha_n^2 - \beta_m^2}{\gamma_{nm}^3} \, \frac{\operatorname{sh} \gamma_{nm} c \operatorname{sh} \gamma_{nm} z}{\gamma_{nm} c + \operatorname{sh} \gamma_{nm} c \operatorname{ch} \gamma_{nm} c} \, b_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y \,, \end{aligned}$$

$$F_z = \frac{2+\mu}{2(1+\mu)} b_0 z^2 +$$

$$+ (2+\mu) \sum_{n,m} \frac{[(1+2\mu)\,\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}c - \gamma_{nm}c\,\mathrm{ch}\,\gamma_{nm}c]\,\mathrm{ch}\,\gamma_{nm}z + \gamma_{nm}z\,\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}c\,\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}z}{\gamma_{nm}c + \mathrm{sh}\,\gamma_{nm}c\,\mathrm{ch}\,\gamma_{nm}c} \,.$$

$$. \frac{b_{nm}}{\gamma_{nm}^2} \cos\alpha_n x \cos\beta_m y \tag{38}$$

mit den gleichen Bemerkungen wie unter Punkt 5.

Daraus folgen für die Spannungen die Beziehungen

$$\sigma_x = \frac{\mu}{1-\mu} b_0 + \sum_{n,m} \frac{[\alpha_n^2(1 - \gamma_{nm}c\,\mathrm{cth}\,\gamma_{nm}c) + 2\mu\beta_m^2]\,\mathrm{ch}\,\gamma_{nm}z + \alpha_n^2\gamma_{nm}z\,\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}z}{\mathrm{ch}\,\gamma_{nm}c + \dfrac{\gamma_{nm}c}{\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}c}} \,.$$

$$. \frac{b_{nm}}{\gamma_{nm}^2} \cos\alpha_n x \cos\beta_m y \,,$$

$$\sigma_y = \frac{\mu}{1-\mu} b_0 + \sum_{n,m} \frac{[\beta_m^2(1 - \gamma_{nm}c\,\mathrm{cth}\,\gamma_{nm}c) + 2\mu\alpha_n^2]\,\mathrm{ch}\,\gamma_{nm}z + \beta_m^2\gamma_{nm}z\,\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}z}{\mathrm{ch}\,\gamma_{nm}c + \dfrac{\gamma_{nm}c}{\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}c}} \,.$$

$$. \frac{b_{nm}}{\gamma_{nm}^2} \cos\alpha_n x \cos\beta_m y \,, \tag{39}$$

$$\sigma_z = b_0 + \sum_{n,m} \frac{(1 + \gamma_{nm}c\,\mathrm{cth}\,\gamma_{nm}c)\,\mathrm{ch}\,\gamma_{nm}z - \gamma_{nm}z\,\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}z}{\mathrm{ch}\,\gamma_{nm}c + \dfrac{\gamma_{nm}c}{\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}c}} b_{nm} \cos\alpha_n x \cos\beta_m y \,,$$

$$\tau_{yz} = -\sum_{n,m} \frac{\gamma_{nm}c\,\mathrm{cth}\,\gamma_{nm}c\,\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}z - \gamma_{nm}z\,\mathrm{ch}\,\gamma_{nm}z}{\mathrm{ch}\,\gamma_{nm}c + \dfrac{\gamma_{nm}c}{\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}c}} \frac{\beta_m}{\gamma_{nm}} b_{nm} \cos\alpha_n x \sin\beta_m y \,,$$

$$\tau_{zx} = -\sum_{n,m} \frac{\gamma_{nm}c\,\mathrm{cth}\,\gamma_{nm}c\,\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}z - \gamma_{nm}z\,\mathrm{ch}\,\gamma_{nm}z}{\mathrm{ch}\,\gamma_{nm}c + \dfrac{\gamma_{nm}c}{\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}c}} \frac{\alpha_n}{\gamma_{nm}} b_{nm} \sin\alpha_n x \cos\beta_m y \,, \tag{39'}$$

$$\tau_{xy} = -\sum_{n,m} \frac{(1 - 2\mu - \gamma_{nm}c\,\mathrm{cth}\,\gamma_{nm}c)\,\mathrm{ch}\,\gamma_{nm}z + \gamma_{nm}z\,\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}z}{\mathrm{ch}\,\gamma_{nm}c + \dfrac{\gamma_{nm}c}{\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}c}} \,.$$

$$. \frac{\alpha_n\beta_m}{\gamma_{nm}^2} b_{nm} \sin\alpha_n x \sin\beta_m y$$

und für die Verschiebungskomponenten

$$u = \frac{1+\mu}{E} \sum_{n,m} \frac{(1 - 2\mu - \gamma_{nm}c\,\mathrm{cth}\,\gamma_{nm}c)\,\mathrm{ch}\,\gamma_{nm}z + \gamma_{nm}z\,\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}z}{\mathrm{ch}\,\gamma_{nm}c + \dfrac{\gamma_{nm}c}{\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}c}} \frac{\beta_m}{\gamma_{nm}^2} \,.$$

$$. b_{nm} \sin\alpha_n x \cos\beta_m y \,,$$

$$v = \frac{1+\mu}{E} \sum_{n,m} \frac{(1 - 2\mu - \gamma_{nm} c \operatorname{cth} \gamma_{nm} c) \operatorname{ch} \gamma_{nm} z + \gamma_{nm} z \operatorname{sh} \gamma_{nm} z}{\operatorname{ch} \gamma_{nm} c + \dfrac{\gamma_{nm} c}{\operatorname{sh} \gamma_{nm} c}} \frac{\alpha_n}{\gamma_{nm}^2} \,.$$

$$. \, b_{nm} \cos \alpha_n x \sin \beta_m y \,, \tag{40}$$

$$w = \frac{1+\mu}{E} \left\{ \frac{1-2\mu}{1-\mu} b_0 z + \right.$$

$$+ \sum_{n,m} \frac{[2(1-\mu) + \gamma_{nm} c \operatorname{cth} \gamma_{nm} c] \operatorname{sh} \gamma_{nm} z - \gamma_{nm} z \operatorname{ch} \gamma_{nm} z}{\operatorname{ch} \gamma_{nm} c + \dfrac{\gamma_{nm} c}{\operatorname{sh} \gamma_{nm} c}} \frac{b_{nm}}{\gamma_{nm}} \,.$$

$$. \cos \alpha_n x \cos \beta_m y \,.$$

Über die praktische Anwendung dieser Entwicklungen können analoge Betrachtungen wie zu Punkt 5 angestellt werden.

Je mehr man sich den Trennungsebenen $z = \pm c$ nähert, umso langsamer konvergieren die Reihen. Unter Heranziehung von (21) kann man für diese Ebenen wie folgt schreiben

$$\sigma_x(x, y, \pm c) = p(x, y) - b_0 + \frac{\mu}{1-\mu} b_0 - (1 - 2\mu) \sum_{n,m} \left(\frac{\beta_m}{\gamma_{nm}} \right)^2 b_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y -$$

$$- \sum_{n,m} \frac{\alpha_n^2 + \mu \beta_m^2}{\gamma_{nm}^2} \frac{4\gamma_{nm} c}{2\gamma_{nm} c + \operatorname{sh} 2\gamma_{nm} c} b_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y \,, \tag{41}$$

$$\sigma_y(x, y, \pm c) = p(x, y) - b_0 + \frac{\mu}{1-\mu} b_0 - (1 - 2\mu) \sum_{n,m} \left(\frac{\alpha_n}{\gamma_{nm}} \right)^2 b_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y -$$

$$- \sum_{n,m} \frac{\beta_m^2 + \mu \alpha_n^2}{\gamma_{nm}^2} \frac{4\gamma_{nm} c}{2\gamma_{nm} c + \operatorname{sh} 2\gamma_{nm} c} b_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y \,,$$

$$\tau_{xy}(x, y, \pm c) = -(1 - 2\mu) \sum_{n,m} \frac{\alpha_n \beta_m}{\gamma_{nm}^2} b_{nm} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y +$$

$$+ (1 - \mu) \sum_{n,m} \frac{\alpha_n \beta_m}{\gamma_{nm}^2} \frac{4\gamma_{nm} c}{2\gamma_{nm} c + \operatorname{sh} 2\gamma_{nm} c} b_{nm} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y \,, \tag{41'}$$

$$w(x, y, \pm c) = \pm \frac{(1 - 2\mu)(1 + \mu)}{(1 - \mu) E} b_0 c \pm$$

$$\pm \frac{2(1 - \mu^2)}{E} \sum_{n,m} \frac{1}{\operatorname{cth} \gamma_{nm} c + \dfrac{\gamma_{nm} c}{\operatorname{sh}^2 \gamma_{nm} c}} \frac{b_{nm}}{\gamma_{nm}} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y \,. \tag{41''}$$

Im Falle einer Belastung, die symmetrisch in bezug auf die Oy-Achse and antimetrisch in bezug auf die Ox-Achse ist

$$p(x, y) = \sum_{n,m} a_{nm} \cos \alpha_n x \sin \beta_m y \,, \tag{42}$$

geht man von Spannungsfunktionen der Form

$$F = \sum_{n,m} (A_{nm} \operatorname{ch} \gamma_{nm}z + \gamma_{nm}zB_{nm} \operatorname{sh} \gamma_{nm}z) \cos \alpha_n x \sin \beta_m y \tag{43}$$

aus.

Für eine Belastung, die antimetrisch gegenüber der Oy-Achse und symmetrisch gegenüber der Ox-Achse ist,

$$p(x, y) = \sum_{n,m} c_{nm} \sin \alpha_n x \cos \beta_m y , \tag{44}$$

benutzt man Spannungsfunktionen der Form

$$F = \sum_{n,m} (A_{nm} \operatorname{ch} \gamma_{nm}z + \gamma_{nm}zB_{nm} \operatorname{sh} \gamma_{nm}z) \sin \alpha_n x \cos \beta_m y . \tag{45}$$

Für eine antimetrische Belastung in bezug auf beide Koordinatenachsen

$$p(x, y) = \sum_{n,m} d_{nm} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y , \tag{46}$$

wählt man Spannungsfunktionen der Form

$$F = \sum_{n,m} (A_{nm} \operatorname{ch} \gamma_{nm}z + \gamma_{nm}zB_{nm} \operatorname{sh} \gamma_{nm}z) \sin \alpha_n x \sin \beta_m y . \tag{47}$$

Die auf diese Weise erzielten Ergebnisse sind den weiter oben dargestellten analog.

8. Ist die elastische Schicht örtlichen Belastungen der Form (31), (32) unterworfen, so können folgende Spannungsfunktionen in Anwendung kommen

$$F = \int_0^\infty \int_0^\infty [A(\alpha, \beta) \operatorname{ch} \gamma z + \gamma z B(\alpha, \beta) \operatorname{sh} \gamma z] \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta , \tag{48}$$

mit

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} . \tag{49}$$

Auf diese Weise erhält man die Spannungsfunktionen

$$F_x = - F_y = - 2\mu z \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\gamma^3} \frac{\operatorname{sh} \gamma c \operatorname{sh} \gamma z}{2\gamma c + \operatorname{sh} 2\gamma c} b(\alpha, \beta) \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta ,$$

$$F_z = 2(2 + \mu) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{[(1 + 2\mu) \operatorname{sh} \gamma c - \gamma c \operatorname{ch} \gamma c] \operatorname{ch} \gamma z + \gamma z \operatorname{sh} \gamma c \operatorname{sh} \gamma z}{2\gamma c + \operatorname{sh} 2\gamma c} \cdot \tag{50}$$

$$\cdot \frac{b(\alpha, \beta)}{\gamma^2} \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta ,$$

die in der Form den Beziehungen (35) ähnlich sind. Hieraus kann man Formeln analog den unter Punkt 7 gefundenen ableiten.

9. Die obigen Ergebnisse sind für den Fall gültig, dass der Körper in einer Richtung von einer oder zwei Ebenen begrenzt ist. Sie können jedoch auch auf die Fälle erweitert werden, in welchen der Körper in zwei Richtungen (Halbschicht, Band) oder drei Richtungen (Halbband, elastisches Parallelepipedon) begrenzt ist.

Es sollen nun also die oben ausgeführten Gedankengänge auf den allgemeinsten Fall des Parallelepipedons (mit den Ausmessungen 2a, 2b, 2c) angewandt werden. Zu diesem Zwecke seien als Koordinatenachsen die drei Symmetrieebenen des Parallelepipedons gewählt und das Problem in acht Belastungsfälle je nach der Symmetrie oder Antimetrie gegenüber den drei Koordinatenebenen aufgeteilt.

Für die in bezug auf alle drei Koordinatenachsen symmetrichsche Belastung wählt man Spannungsfunktionen der Form

$$\begin{aligned} F = {} & K_1x^2 + K_2y^2 + K_3z^2 + \\ & + \sum_{n,m} (A_{nm} \operatorname{ch} \gamma_{nm}x + \gamma_{nm}xB_{nm} \operatorname{sh} \gamma_{nm}x) \cos \alpha_n y \cos \beta_m z + \\ & + \sum_{p,q} (C_{pq} \operatorname{ch} \varkappa_{pq}y + \varkappa_{pq}yD_{pq} \operatorname{sh} \varkappa_{pq}y) \cos \delta_p z \cos \varepsilon_q x + \\ & + \sum_{r,s} (E_{rs} \operatorname{ch} \chi_{rs}z + \chi_{rs}zF_{rs} \operatorname{sh} \chi_{rs}z) \cos \mu_r x \cos \nu_s y \,, \end{aligned} \tag{51}$$

wo folgende Beziehungen eingeführt wurden

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{n\pi}{b}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{c} \quad (n, m = 1, 2, 3, \ldots)\,, \\ \delta_p &= \frac{p\pi}{c}, \quad \varepsilon_q = \frac{q\pi}{a} \quad (p, q = 1, 2, 3, \ldots)\,, \\ \mu_r &= \frac{r\pi}{a}, \quad \nu_s = \frac{s\pi}{b} \quad (r, s = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned} \tag{52}$$

und

$$\begin{aligned} \gamma_{nm} &= \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2}\,, \\ \varkappa_{pq} &= \sqrt{\delta_p^2 + \varepsilon_q^2}\,, \\ \chi_{rs} &= \sqrt{\mu_r^2 + \nu_s^2}\,. \end{aligned}$$

Stellt man Randbedingungen in Spannungen, so reduziert sich das Problem zu der Lösung eines unendlichen Systems von linearen algebraischen Gleichungen. Man kann Gedankengänge analog den vom Verfasser a. a. O [16] im Zusammenhang mit dem ebenen Problem für das Rechteck dargestellten dazu anwenden.

10. Die in den obigen Ausführungen erzielten Ergebnisse zeigen in anschaulicher Weise ein Verfahren, mit Hilfe dessen man direkt räumliche Probleme der Elastizitätstheorie auf Grund der hier gefundenen Darstellungen angreifen kann.

[1] *E. Almansi:* Sull integrazione dell'Equazione differenziale $\Delta^{2n} = 0$. Ann. di Matem., S. III, Tom II, S. 1, 1898.

[2] *J. Boussinesq:* Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, avec des notes étendues sur divers points de physique, mathématique et d'analyse. Paris 1885.

[3] *F. S. Tschurikov:* Über eine allgemeine Lösung der Gleichgewichtsgleichungen der Elastizitätstheorie in Spannungen. Prikl. Mat. i Mech., T. XVII, Nr. 6, S. 751, 1953.

[4] *R. A. Eubanks, E. Sternberg:* On the Completeness of the Boussinesq-Papkovitch Stress Functions. Journ. of Rat. Mech. and Analysis, Vol. 5, Nr. 5, S. 735, 1956.

[5] *G. Fichera:* Sull'esistenza delle funzioni potenziali nei problemi della Fisica matematica. Atti della Accad. naz. dei Lincei, S. VIII, vol. II, S. 527, 1947.

[6] *B. G. Galerkine:* Contribution à la solution générale du problème de la théorie de l'élasticité dans le cas de trois dimensions. C. Rend. de l'Acad. des Sc. de Paris, Vol. 190, Nr. 18, S. 1047, 1930.

[7] *K. Marguerre:* Ansätze zur Lösung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie. ZAMM, Bd. 35, Nr. 6/7, S. 242, 1955.

[8] *J. C. Maxwell:* Trans. Roy. Soc. Edinbourgh, Vol. 26, 1870.

[9] *R. D. Mindlin:* Note on the Galerkine and Papkovitch Stress Functions. Bull. Am. Math. Soc., Vol. 42, S. 373, 1936.

[10] *Gr. C. Moisil:* Über die Galerkinschen Formeln in der Elastizitätstheorie. Bul. Acad. R. P. R., S. A, T. 5, Nr. 6, S. 587, 1949.

[11] *Gr. C. Moisil:* Über die Gleichgewichtsgleichungen der elastischen Körper. An. Acad. R. P. R., S. Mat.-Fiz.-Chim., T. III, 31, S. 739, 1950.

[12] *G. Morera:* Soluzione generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio di un corpo continuo (e appendice). Atti della R. Acad. dei Lincei, S. 5, Vol. I, S. 137, S. 233, 1892.

[13] *H. Neuber:* Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. Der Hohlkegel unter Einzellast als Beispiel. ZAMM, B. 14, Nr. 4, S. 203, 1934.

[14] *P. F. Papkovitch:* Solution générale des équations différentielles fondamentales d'élasticité, exprimée par trois fonctions harmoniques. C. Rend. de l'Acad. des Sc. de Paris, Vol. 195, S. 754, 1932.

[15] *M. G. Slobodiansky:* Die allgemeinen Formen der Lösungen der Gleichungen der Elastizitätstheorie für einfach und vielfach konnexe Gebiete mit Hilfe der harmonischen Funktionen. Prikl. mat. i mech., T. XVIII, Nr. 1, S. 55, 1954.

[16] *P. P. Teodorescu:* Über die Berechnung wandartiger Träger auf zwei Stützen. St. şi cerc. de mec. apl., T. VIII, Nr. 1, S. 115; Nr. 2, S. 451, 1957. — Revue de Méc. Appl., T. III, Nr. 2, S. 125, 1958.

[17] *P. P. Teodorescu:* Über die Berechnung des elastischen Halbraumes unter periodischer Belastung. St. şi cerc. de mec. apl., T. VIII, Nr. 3, S. 831, 1957. — Rev. de Méc. Appl., T. IV, Nr. 1, S. 141, 1959.

[18] *P. P. Teodorescu:* Über einige räumliche Probleme der Elastizitätstheorie. St. şi cerc. de mec. apl., T. VIII, Nr. 4, S. 1101, 1957.

[19] *P. P. Teodorescu:* Sur une solution générale du problème en espace de la théorie de l'élasticité. IX-e Congrès International de Mécanique Appliquée, Bruxelles, 1956. Actes, T. V, S. 155, 1957.

[20] *P. P. Teodorescu:* Über die Berechnung des elastischen Halbraumes unter örtlicher Belastung. Bull. Math., T. II (50), Nr. 1, S. 113, 1958.

[21] *P. P. Teodorescu:* Über die Berechnung der Festigkeit dicker ebener Platten. St. şi cerc. de mec. apl., T. IX., Nr. 3, S. 727, 1958. — Rev. de Méc. Appl., T. IV, Nr. 2, 1959.

[22] *P. P. Teodorescu:* Über die Berechnung dicker ebener Platten unter örtlicher Belastung. Bull. Math., Bd. II (50), Nr. 3, 1958.

Souhrn

O NĚKTERÝCH PROSTOROVÝCH PROBLÉMECH TEORIE PRUŽNOSTI

P. P. TEODORESCU

(Došlo dne 1. prosince 1958.)

V práci je řešen prostorový problém matematické teorie pružnosti pomocí tří biharmonických nebo tří resp. čtyř ($\mu = \frac{1}{4}$) harmonických funkcí. Vychází se přitom z rovnic Beltramiho.

Fourierovými řadami je pak řešen problém pružného poloprostoru a pružné vrstvy pro případ periodického zatížení resp. zatížení osamělým břemenem.

Dále je v článku naznačena cesta pro řešení napjatosti pružného kvádru.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

П. П. ТЕОДОРЕСКУ (P. P. Teodorescu)

(Поступило в редакцию 1/XII 1958 г.)

В работе решается пространственная задача математической теории упругости при помощи трех бигармонических или же трех и, возможно, четырех ($\mu = \frac{1}{4}$) гармонических функций. Исходным пунктом служат уравнения Бельтрами.

Применяя ряды Фурье, решает автор задачу упругого полупространства и упругого слоя в случае периодической нагрузки или же нагрузки одиноким бременем.

Затем в статье намечен путь решения напряженности упругого параллелепипеда.