

Aplikace matematiky

Bohumil Jurek

Metoda numerického řešení obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu a její použití v geometrické optice

Aplikace matematiky, Vol. 4 (1959), No. 3, 203–210

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102661>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1959

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

METODA NUMERICKÉHO ŘEŠENÍ
 OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC I. ŘÁDU
 A JEJÍ POUŽITÍ V GEOMETRICKÉ OPTICE

BOHUMIL JUREK

(Došlo dne 13. července 1957.)

DT:517.92:518.12:535.31

Je popsán způsob, jak přejít od známého přibližného řešení obyčejné diferenciální rovnice I. řádu k řešení přesnějšmu. Jsou uvedeny aplikace tohoto způsobu na úlohy asférické optiky.

1. PRINCIP METODY

Buď dána v některé jednoduše souvislé oblasti bodů $[x, y]$ diferenciální rovnice

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \tag{1}$$

o funkci $f(x, y)$ předpokládáme, že je spojitá v x a y a má spojitou parciální derivaci I. řádu podle y . Rovnice (1) nechť má pro danou dvojici hodnot x_0, y_0 na jistém intervalu hodnot x přibližné řešení, derivovatelnou funkci $F(x)$ takovou, že $F(x_0) = y_0$. Naším úkolem je zlepšit aproximaci řešení rovnice (1). K tomu cíli uvažujme funkci proměnné x , závislou kromě toho na n parametrech, shodnou pro jistý bod prostoru parametrů s funkcí $F(x)$. Získáme ji např. tím, že přičteme k funkci $F(x)$ množen v $x-x_0$ s n obecně nenulovými koeficienty a s nulovými koeficienty u členu nultého a prvního stupně. Za parametry si však nevolíme koeficienty mnohočlenu, ale hodnoty y_k nově zavedené funkce v různých bodech x_k . Můžeme proto označit novou funkci symbolem $\tilde{F}(x; y_1, y_2, \dots, y_n)$; její derivaci podle x označíme $\tilde{F}'(x; y_1, y_2, \dots, y_n)$. O funkci \tilde{F}' předpokládáme, že má totální diferenciál vzhledem k proměnným y_1, y_2, \dots, y_n všude, kde bude uvažována. Je tedy diferenciál funkce $\tilde{F}'(x; y_1, y_2, \dots, y_n)$ při pevné hodnotě x dán vztahem

$$d\tilde{F}' = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \tilde{F}'}{\partial y_k} dy_k.$$

Při postupu, který má zlepšit aproximaci řešení rovnice (1), vyjdeme z té okolnosti, že derivace $F'(x)$ funkce $F(x)$ se v obecném případě liší od $f(x, F)$. Tento rozdíl nepříznivě ovlivňuje přesnost řešení. Pokusíme se volbou parametrů y_k dosáhnout toho, aby rozdíl $\tilde{F}'(x; y_1, y_2, \dots, y_n) - f(x, \tilde{F})$ alespoň přibližně vymizel pro všechna x_k . Při stanovení podmínky pro to použijeme té okolnosti, že $F(x)$ je přibližným integrálem rovnice (1) a nahradíme rozdíl $\tilde{F}'(x; y_1, y_2, \dots, y_n) - F(x)$ diferenciálem. Označme

$$\tilde{F}'(x_k; y_1, y_2, \dots, y_n) - F(x_k) = \Delta y_k. \quad (2)$$

Veličiny Δy_k určíme požadavkem, aby splňovaly soustavu rovnic

$$F'(x_m) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \tilde{F}'}{\partial y_k} \right)_m \Delta y_k - f(x_m, F(x_m)) - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_m \Delta y_m = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

kde závorky s indexem m značí, že parciální derivace jsou počítány pro bod $[x_m, F(x_m)]$. Řešení rovnice (3) se dá použít pro korekci funkce $F(x)$. Má-li korekce tvar

$$P(x - x_0) = \sum_{k=1}^n a_k (x - x_0)^{p_k}, \quad p_k > 1, \quad (4)$$

vypočteme konstanty a_k ze soustavy rovnic

$$\sum_{k=1}^n a_k (x_s - x_0)^{p_k} = \Delta y_s, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Dále stanovíme

$$\frac{\partial \tilde{F}'}{\partial y_k} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} (x_1 - x_0)^{p_1}, & (x_1 - x_0)^{p_2}, & \dots, & (x_1 - x_0)^{p_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_{k-1} - x_0)^{p_1}, & (x_{k-1} - x_0)^{p_2}, & \dots, & (x_{k-1} - x_0)^{p_n} \\ p_1(x - x_0)^{p_1-1}, & p_2(x - x_0)^{p_2-1}, & \dots, & p_n(x - x_0)^{p_n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_n - x_0)^{p_1}, & (x_n - x_0)^{p_2}, & \dots, & (x_n - x_0)^{p_n} \end{vmatrix}, \quad (6)$$

přičemž D je determinant soustavy (5). Má-li korekce jiný tvar, počítáme ji ze soustavy rovnic (3).

Z toho, co bylo uvedeno, neplyne, že popsaná metoda vede vždycky k cíli. V některých případech však ke zlepšení aproximace docházíme, jak ukážeme v další kapitole.

2. PŘÍKLAD

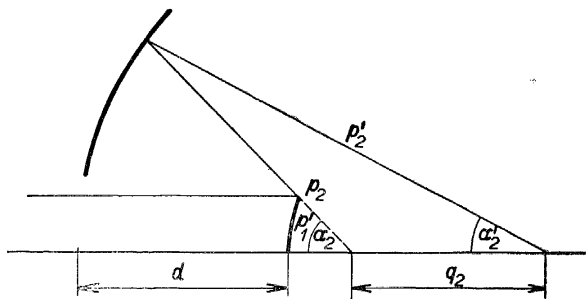
Nejvhodnějším příkladem aplikace aproximační metody je přibližné řešení problému, jehož přesné řešení je známo. Takový je problém tvaru zrcadel optické soustavy přesně aplanatické pro předmět v nekonečnu. Jsou známa

dokonce dvě exaktní řešení tohoto problému, jedno SCHWARZSCHILDHOVO, druhé autorovo, takže kontrola přesnosti výpočtu je možná. V obou případech jde o soustavy složené ze dvou zrcadel.

Přesně aplanatickou nazýváme takovou optickou soustavu, která zobrazuje přesně bodově některý bod na optické ose a kromě toho přesně splňuje sinovou podmínku. Je-li předmět v nekonečnu, je sinová podmínka dána vztahem

$$y = f \sin \alpha',$$

kde y je vzdálenost bodu dopadu paprsku na první plochu od optické osy, α' úhel, který svírá příslušný paprsek, procházející obrazovým bodem, s optickou osou.



Obr. 1.

Při řešení předloženého problému jsem použil parametru, definovaného na základě vzdáleností průsečíků prodloužených paprsků s optickou osou od průsečíků těchto paprsků se zrcadlem. Tuto vzdálenost označuji p na straně předmětové (před odrazem), p' na straně obrazové (po odrazu). Abych odlišil veličiny, vztahující se k různým zrcadlům, připojuji k těmto značkám indexy (obr. 1). Jiná důležitá veličina je vzdálenost q_2 mezi průsečíkem prodlouženého paprsku dopadajícího na druhé zrcadlo s optickou osou a obrazovým bodem soustavy na optické ose. K výpočtům potřebujeme dále vzdálenost d vrcholů obou zrcadel a úhel α_2 paprsku odraženého od prvního zrcadla s optickou osou. Zavedeme si tato označení:

$$\sigma_2 = p_2 + p_2', \quad (8)$$

$$v = \sigma_2 - q_2, \quad (9)$$

$$z = \frac{\sigma_2 - q_2}{\sigma_2 + q_2}. \quad (10)$$

Pro tyto veličiny jsem odvodil ve starší práci [1] vztahy

$$p_1' = \frac{1}{z^2} \left[fz - \frac{1}{2} (2d - v) (z^2 - 1) \right], \quad (11)$$

$$\cos \alpha_2 = -1 - \frac{2d - v}{r_1^2}, \quad (12)$$

$$\frac{dz}{dv} = z \frac{2d - v - 2f}{v(2d - v)} - \frac{1}{v}, \quad (13)$$

$$z = (2d - v) \left[C_1 - C_2 \left(1 - \frac{2d}{v} \right)^{\frac{f}{d} - 1} \right], \quad C_1, C_2 \text{ konstanty.} \quad (14)$$

Vztah (13) je diferenciální rovnice, na niž budeme aplikovat naši metodu.

V obecném případě jsou obě zrcadla přesně aplanatické soustavy nekulová (asférická). Jsou však prakticky použitelné přesně aplanatické soustavy s prvním zrcadlem přibližně kulovým. Nahradíme-li u takové soustavy prvé zrcadlo kulovým a druhé uzpůsobíme tak, aby dávalo s prvním přesně bodové (stigmatické) zobrazení nekonečně vzdáleného bodu na optické ose, vznikne soustava, která už není přesně aplanatická, ale kterou můžeme považovat za jisté přiblížení k původní soustavě. Tvar zrcadel této nové soustavy můžeme vyjádřit analyticky. Definujeme-li si veličiny v, z v nové soustavě na základě úseků na prodloužených paprscích jako jsme to udělali u původní soustavy, můžeme psát vztah [2]

$$\frac{v}{z} = v + \frac{r_1^2}{v - 2d} + 2c, \quad (15)$$

kde r_1 je poloměr křivosti 1. zrcadla, c vzdálenost středu křivosti 1. zrcadla od obrazového bodu soustavy. Rovnici (15) můžeme považovat za přibližné řešení diferenciální rovnice (13).

Provedeme zlepšení aproximace u soustavy, dané konstantami $r_1 = 4,757$, $d = 29,75$, $c = 12,80733775$. Abychom získali orientaci o tvaru potřebné korekce, vypočteme rozdíl derivace z podle v , počítané jednak z rovnice (13), jednak z rovnice (15) pro 4 dvojice hodnot v, z , vyhovující rovnici (15). Závislost zmíněného rozdílu na v znázorňuje křivka, připomínající parabolu (zde ji nereprodukuje). Můžeme tedy předpokládat, že dojdeme ke značnému zpřesnění řešení už dvojjparametrovou korekcí. Klademe

$$P(v - v_0) = a_1(v - v_0)^2 + a_2(v - v_0)^3 \quad (16)$$

a označíme

$$P' = \frac{dP(v - v_0)}{dv}.$$

Při tom $v_0 = 2d + r_1 = 64,257$. Žádáme, aby se rozdíl derivací anuloval pro $v_1 = 63,977$, $v_2 = 63,657$. Příslušné proměnné hodnoty veličiny z nazveme z_1, z_2 , jejich přírůstky (rozdíly vzhledem k (15)) Δ_1, Δ_2 a dále

$$v_1 - v_0 = \xi_1,$$

$$v_2 - v_0 = \xi_2.$$

Je potom

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial P'}{\partial z_1}\right)_1 &= \frac{2\xi_2 - 3\xi_1}{\xi_1\xi_2 - \xi_1^2} = -4,01785714, \\ \left(\frac{\partial P'}{\partial z_2}\right)_1 &= \frac{\xi_1^2}{\xi_2^2 - \xi_2^2\xi_1} = -0,68055556, \\ \left(\frac{\partial P'}{\partial z_1}\right)_2 &= -\frac{\xi_2^2}{\xi_1^2\xi_2 - \xi_1^3} = 14,34948979, \\ \left(\frac{\partial P'}{\partial z_2}\right)_2 &= \frac{3\xi_2 - 2\xi_1}{\xi_2^2 - \xi_1\xi_2} = -6,45833333.\end{aligned}$$

Označíme-li z' derivaci z podle v vypočtenou z rovnice (13), platí

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)_1 = 0,04008881, \quad \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)_2 = 0,04218256.$$

Soustava (6) nabývá konkrétního tvaru

$$\begin{aligned}0,00001908 - 4,05794591\Delta_1 - 0,68055556\Delta_2 &= 0, \\ 0,00011210 + 14,34948979\Delta_1 - 6,50051589\Delta_2 &= 0.\end{aligned}$$

Korekce hodnot z jsou

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= 0,00000132, \\ \Delta_2 &= 0,00002016.\end{aligned}$$

Nyní můžeme stanovit tvar korekce. Platí

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{\Delta_1\xi_2^3 - \Delta_2\xi_1^3}{\xi_1^2\xi_2^3 - \xi_1^3\xi_2^2} = -0,00001741, \\ a_2 &= \frac{\Delta_2\xi_1^2 - \Delta_1\xi_2^2}{\xi_1^2\xi_2^3 - \xi_1^3\xi_2^2} = -0,00012235.\end{aligned}$$

Na základě rovnice (16) stanovíme korekce ještě pro $v = 64,137$ a $v = 63,817$. Tak získáme 4 dvojice hodnot v, z , ze kterých vypočteme příslušné hodnoty kartézských souřadnic x, y bodů opravené meridiánové křivky 1. zrcadla (počátek ve vrcholu 1. zrcadla). K výpočtu použijeme vztahů (11), (12), které sice platí pro přesně aplanačnickou soustavu, ale dají se s jistým přiblížením předpokládat také pro korigovanou soustavu. Ze Schwarzschildových vzorců (kde p'_{02} je vzdálenost obrazu od vrcholu 2. zrcadla)

$$\begin{aligned}\sin \alpha'_2 &= \frac{y}{f}, \\ x &= -\frac{f^2 \sin^2 \alpha'_2}{4d} + p'_{02} \left[1 - \left(1 - \frac{f}{d} \sin^2 \frac{\alpha'_2}{2} \right)^{\frac{2d-f}{d-f}} \cdot \left(\cos^2 \frac{\alpha'_2}{2} \right)^{-\frac{f}{d-f}} \right]\end{aligned}$$

je možné vypočíst k daným hodnotám y hodnoty x pro body meridiánové křivky přesně aplanatické soustavy. Rozdíl souřadnic x charakterizuje stav aproximace.

Tabulka

y	x kulová plocha	x korigovaná plocha	x přesná plocha	Chyba aproximace
1,05836	0,11923	0,11922	0,11923	0,00001
1,59119	0,27402	0,27410	0,27412	2
1,96219	0,42354	0,42399	0,42406	7
2,25266	0,56718	0,56846	0,56856	10

Jsou-li hodnoty x , y v milimetrech, je možné se spokojit dosaženým stavem aproximace. Tvar druhého zrcadla určíme na základě podmínky přesné stigmatičnosti soustavy.

3. ZÁVĚR

Příklad, podaný v předchozí kapitole, nám ukazuje, v jakých případech je vhodné aplikovat naši metodu. Bude to především tehdy, známe-li řešení diferenciální rovnice s přesností, která je sice značná, ale přece ne dostačující. Sem patří zejména případy, časté ve fyzice i v technice, kdy neznáme obecné řešení dané diferenciální rovnice, ale dovedeme exaktně řešit diferenciální rovnici pro příbuzný problém. V asférické optice je celá řada takových problémů. Donedávna bylo výhodné řešit naší metodou diferenciální rovnici, určující tvar zrcadel aplanatické soustavy s předmětem ve velké vzdálenosti na základě znalosti tvaru ploch aplanatické soustavy s předmětem v nekonečnu. Podobně diferenciální rovnici, určující tvar zrcadel aplanatické soustavy, složené ze dvou zrcadel a z rovinné desky, je možné počítat naší metodou na základě znalosti tvaru ploch aplanatické soustavy bez desky.

Popsanou metodu nebudeme používat, je-li známá aproximace málo přesná. K potřebnému zpřesnění by bylo třeba zavést mnohoparametrovou korekci, jejíž výpočet by byl složitý a neposkytoval by žádné výhody ve srovnání s běžnými metodami numerické integrace. K naší metodě nesáhneme ani tehdy, jsou-li funkce $f(x, y)$ a přibližný integrál dány jednoduchými výrazy. Chceme-li v takovém případě zlepšit aproximaci řešení, použijeme známé Picardovy metody: dosadíme přibližný integrál do rovnice (I) a provedeme kvadraturu. Tento postup, po případě několikrát opakovaný, nám poskytne přesnější řešení dané rovnice. Je však patrné, že ve fyzice a v technických oborech bude zpravidla výhodnější aplikovat naši metodu.

Nevýhodou metody, popsané v tomto článku, je ta okolnost, že neznáme podmínky, za kterých metoda vede k cíli, ani způsob, kterým by bylo možno odhadnout odchylku od přesného řešení. Není ani snadné určit tyto podmínky a vypracovat způsob odhadu chyby. Tato nevýhoda se neprojevuje při řešení problémů, u nichž je možná kontrola výsledku, nezávislá na postupu řešení. Tak na příklad u optických soustav se můžeme přesvědčit trigonometrickým výpočtem, jak jsou splněny podmínky, kladené na kvalitu zobrazení. Vcelku můžeme říci, že metoda, již je věnován tento článek, je aplikovatelná v řadě případů a má mnohdy výhody před jinými metodami.

Literatura

- [1] B. Jurek: Rozpravy čs. akademie věd, řada MPV, 67 (1957), č. 12, 9—14.
 [2] B. Jurek: Rozpravy čs. akademie věd, řada MPV, 65 (1955), č. 10, 1—21.
 [3] K. Schwarzschild: Untersuchungen zur geometrischen Optik, 1905.

Резюме

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1-ОГО ПОРЯДКА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКЕ

БОГУМИЛ ЮРЕК (Bohumil Jurek)

(Поступило в редакцию 13/VI 1957 г.)

Описывается метод перехода от известного приближенного решения к более точному решению.

Предполагается, что дифференциальное уравнение (1) имеет для исходной точки x_0, y_0 в определенном интервале приближенное решение $F(x)$, для которого $F(x_0) = y_0$. К более точному решению перейдем при помощи функции, которая зависит от x и от n параметров и совпадает с $F(x)$ для определенной группы значений параметров. Такую функцию можно получить прибавлением к функции $F(x)$ полинома с n ненулевыми членами и с нулевыми членами простым и первой степени. В качестве параметров выгодно взять значения y_k этой новой функции в n точках x_k . Новую функцию можно обозначить через $\tilde{F}(x; y_1, y_2, \dots, y_n)$, ее производную по x через $\tilde{F}'(x; y_1, y_2, \dots, y_n)$ или короче \tilde{F}' . Производная $F'(x)$ функции $F(x)$ отличается от $f(x, F)$. Форму функции $\tilde{F}'(x; y_1, y_2, \dots, y_n)$ выберем таким образом, чтобы разность $\tilde{F}' - f(x, \tilde{F})$ стала в точках x_k как можно наименьшей. Приведенное условие приводит к системе n линейных уравнений (3) для

Δy_k , где скобки и индекс m указывают, что частные производные в скобках нужно вычислять для точки $[x_m, F(x_m)]$. Если предположить коррекцию в виде полинома, то можно пользоваться отношениями (4), (5) и (6).

Автор приводит численный пример, касающийся асферической оптики.

Résumé

UNE MÉTHODE DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU 1^{er} ORDRE ET SON APPLICATION À L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

BOHUMIL JUREK

(Reçu le 13 juillet 1957.)

On décrit une manière de passer d'une solution approximative connue à une solution plus précise.

Supposons que l'équation différentielle (1) ait dans un certain intervalle une solution approximative $F(x)$ telle que pour un point initial $[x_0, y_0]$ donné $F(x_0) = y_0$. Nous obtenons une solution plus précise à l'aide d'une fonction dépendant de x et de n paramètres, et qui s'identifie à $F(x)$ pour un certain groupe de ces paramètres. Nous pouvons obtenir une telle fonction en ajoutant à la fonction $F(x)$ un polynôme qui a n termes non nuls et les termes des degrés zéro et un égaux à zéro. Il est avantageux de prendre pour paramètres les valeurs y_k de cette nouvelle fonction en n points $x_k, k = 1, 2, \dots, n$. La nouvelle fonction peut être désignée par le symbole $\tilde{F}(x; y_1, \dots, y_n)$, sa dérivée par rapport à x par $\tilde{F}'(x; y_1, \dots, y_n)$, soit bref \tilde{F}' . La dérivée $F'(x)$ de $F(x)$ diffère de $f(x, F)$; nous voulons choisir la forme de $\tilde{F}'(x; y_1, \dots, y_n)$ d'une telle manière que la différence $\tilde{F}' - f(x, \tilde{F})$ soit aussi petite que possible aux points x_k . La condition énoncée conduit à un système de n équations linéaires (3) en Δy_k , où les parenthèses et l'indice m signifient que les dérivées partielles doivent être prises au point $[x_m, F(x_m)]$. Lorsqu'on suppose la correction sous forme d'un polynôme, on peut utiliser les relations (4), (5) et (6).

L'auteur donne un exemple d'application concernant l'optique asphérique.