Zdeněk Sobotka

O užití statistických a pravděpodobnostních metod v teorii stavebních konstrukcí

Aplikace matematiky, Vol. 4 (1959), No. 2, 145–152

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102655

UŽITÍ STATISTICKÝCH A PRAVDĚPODOBNOSTNÍCH METOD V TEORII STAVEBNÍCH KONSTRUKCÍ

Diskusní příspěvek

Zdeněk Sobotka

1. PEVNOST HMOT A ÚNOSNOST PRVKŮ KONSTRUKCÍ

Proměnlivost a různorodost vlivů, které se uplatňují při výrobě stavebních hmot, způsobuje, že při řadě zkoušek hmot téhož druhu jsou zjištěné hodnoty mechanických charakteristik proměnlivými statisticky náhodnými veličinami.

Celkový obraz o jejich statistické povaze a o stejnoměrnosti výroby hmot dává křivka četností.

Při stejnoměrné výrobě jsou křivky četností pevností souměrné a blíží se normální Laplace-Gaussově křivce rozložení. Takové jsou např. křivky četností pevnosti oceli. Naopak projevem méně pečlivé výroby betonu na některých stavbách jsou nesouměrné křivky četností s vrcholem posunutým směrem k nižším hodnotám pevností. To znamená, že vyšší pevnosti jsou výsledkem náhodného seskupení složitějších podmínek než hodnoty nízké.

Zvláštním zjevem je křivka četností pevností s několika výraznými vrcholy. Podrobným rozborem se v takovém případě dá zjistit, že jde o souhrn několika rozdílných souborů zkušebních těles z různých změněných stadií výroby, na příklad vlivem dodávky štěrku a písku jiné jakosti pro beton. V takovém případě je třeba pro statistické hodnocení rozdělit jednotlivé soubory zkušebních těles, protože proměnlivost jejich pevností není pro podstatnou změnu a ne statisticky náhodnou výchylku ve výrobě statisticky souměřitelná.

Jiným významným zjevem je změna pevnosti s dobou výroby. V průběhu výroby obvykle pevnost betonu s počátku vzrůstá a později stále méně kolísá kolem ustálené střední hodnoty. Též větší počáteční rozptyl se v průběhu výroby zmenší. Je to způsobeno ustalováním zavedené výroby. Ani v tomto případě není pevnost betonu přesně vzato statisticky náhodnou veličinou, ale statisticky náhodnou funkcí doby výroby.

Hlavním úkolem statistického hodnocení proměnlivosti pevnosti pro teorii stavebních konstrukcí je určení krajní statistické hodnoty pevností. Pravděpodobnost výskytu stejné nebo nižší hodnoty je $\frac{1}{k}$, kde k je zvolené velké číslo např. 1000, které je dáno stupněm požadované bezpečnosti. V podstatě to znamená určit hodnotu pevnosti, dané úsečkou v diagramu četností, jejíž svislice odděluje z plochy omezené křivkou četností jednu k-tinu.

Úloha je značně ztížena při malém výběru. Při normálním rozložení je možno v takovém případě použít metody tolerančních mezí. Při různých složitějších případech nesouměrného rozložení však nebyl tento problém při malém výběru dosud řešen. Má však velký praktický význam, protože často bývají k disposici výsledky zkoušek pouze menšího souboru zkušebních těles.

2. STATISTICKY NÁHODNÉ FUNKCE MECHANICKÝCH CHARAKTERISTIK PŘETVÁRNOSTI HMOTY

Složitějším úkolem než statistické hodnocení jednotlivých veličin je statistický rozbor funkcí.

Podle pracovních diagramů zkoušek velkého množství zkušebních těles je možno stanovit závislost mezi napětím σ a přetvořením ε jakožto statisticky náhodnou funkci. Danému přetvoření ε přísluší podle počtu zkušebních těles řada napětí σ, jejichž rozptyl D_σ se s rostoucím namáháním zvětšuje, neboť v hmotě nastávají zvláště za mezí pružnosti strukturální změny, které jsou závislé na stále větším počtu náhodných podmínek.

Vyjádříme funkci střední hodnoty napětí

$$\sigma_s = f(\varepsilon) \tag{1}$$

konečnou trigonometrickou řadou tvaru

$$\sigma_s = \sum_{n=0}^{N} \left(A_n \cos \frac{n\pi\varepsilon}{\varepsilon_m} + B_n \sin \frac{n\pi\varepsilon}{\varepsilon_m} \right) \tag{2}$$

nebo

$$\sigma_s = \sum_{n=0}^{N} C_n \sin \frac{(2n+1)\,\pi\varepsilon}{2\varepsilon_m}\,, \tag{3}$$

jejíž součinitele můžeme určit přibližně z konečného množství bodů funkční závislosti podle Rungeova schematu, a směrodatnou odchylku

$$\omega_\sigma = \varphi(\varepsilon) \tag{4}$$

je též možno vyjádřit takovým způsobem konečnými trigonometrickými řadami, např.

$$\omega_\sigma = \sum_{n=0}^{N} \left(a_n \cos \frac{n\pi\varepsilon}{\varepsilon_m} + b_n \sin \frac{n\pi\varepsilon}{\varepsilon_m} \right) . \tag{5}$$

Přísluší-li dané hodnotě ε souhrn funkčních hodnot σ, které tvoří normální křivku rozložení, můžeme utvořit funkci krajních hodnot σ_k dolní hranice funkčních hodnot σ se zvolenou pravděpodobností $\frac{1}{k}$ podle vztahu

$$\sigma_k(\varepsilon) = \sigma_s(\varepsilon) - \alpha\omega_\sigma(\varepsilon) , \tag{6}$$

kde hodnota charakteristiky bezpečnosti α vyplývá ze vztahu

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\alpha e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \, d\alpha \tag{7}$$

a dá se určit z tabulek Laplaceových integrálů. Protože při konstantní pravděpodobnosti $\frac{1}{k}$ je hodnota α ve vztahu (6) stálá, může být po úpravě vyjádřena funkce krajních hodnot přibližně též trigonometrickou řadou

$$\sigma_k = \sum_{n=0}^{N} \left(K_n \cos \frac{n\pi\varepsilon}{\varepsilon_m} + L_n \sin \frac{n\pi\varepsilon}{\varepsilon_m} \right) , \tag{8}$$

kde

$$K_n = A_n - \alpha a_n \; ; \quad L_n = B_n - \alpha b_n \tag{9}$$

v důsledku vztahů (2), (5) a (6).

3. PROMĚNLIVOST ZATÍŽENÍ A JEJÍ STATISTICKÉ HODNOCENÍ

Křivky četností zatížení stálého a zatížení nahodilého při ustáleném provozu jsou souměrné a blíží se svým průběhem normálnímu rozložení.

Naopak zatížení sněhem a větrem, u něhož závisí vysoké hodnoty na složitější kombinaci povětrnostních podmínek než hodnoty nízké, má nesouměrné křivky četností s vrcholem posunutým k dolním hodnotám. Určení pravděpodobné horní kritické hodnoty zatížení je formálně možno provést podle týchž zásad jako určení dolní kritické hodnoty pevnosti.

Ve skutečnosti je otázka poněkud složitější, protože velikost zatížení je obvykle výsledkem mnohem většího počtu různorodých náhodných činitelů, než pevnost hmot.

Významnou podmínku při určování pravděpodobného kritického zatížení představuje např. předpokládaná doba užívání konstrukce. U trvale významné konstrukce je pravděpodobné krajní zatížení, zvláště účinkem povětrnostních vlivů, značně větší než u dočasného provisoria.

4. STATICKÉ PŮSOBENÍ KONSTRUKCE

Protože statický výpočet je založen na zjednodušujících předpokladech, nemůže plně a přesně vystihnout podstatu skutečného statického působení konstrukce, které je výslednicí celé řady nejrůznějších vlivů.

Zatím co statistický výzkum pevnosti hmot i zatížení konstrukcí má již za sebou určitý vývoj, bylo statistickému rozboru odchylek výpočtu od skutečného působení konstrukce věnováno celkem málo pozornosti, ačkoliv jde o otázku neobyčejně významnou. Snad také proto, že je to problém velmi obtížný, kde se uplatňuje poměrně nejvíce vliv lidského činitele.

Celkem je možno říci, že poměr vypočteného a skutečného statického působení, udaný součinitelem m, který má při plné shodě výsledku výpočtu se skutečností hodnotu $m = 1$, se řídí obvykle Gaussovým zákonem chyb a přísluší mu tedy normální křivka rozložení.

5. MEZNÍ STAV KONSTRUKCE Z HLEDISKA PRAVDĚPODOBNOSTNÍHO

Maximalistické pojetí užívá pravděpodobnostních metod pouze k určení pravděpodobných nejnepříznivějších krajních hodnot pevností zatížení a součinitele statického působení. Za základ řešení se bere však pravděpodobnost současného výskytu nejnepříznivějších pravděpodobných hodnot. Takový postup je na prospěch bezpečnosti, ale ne hospodárnosti konstrukce.

Při důslednějším pravděpodobnostním řešení mezního stavu se posuzuje pravděpodobnost současného výskytu dolních hodnot pevností a součinitele statického působení a horních hodnot jednotlivých druhů zatížení.

V podstatě je třeba najít rozložení hodnot výsledné funkce ze známých křivek rozložení jejich argumentů. Přímé analytické řešení této úlohy je velmi obtížné, ne-li nemožné, a nebylo ještě celkem propracováno.

Jsou však možná i některá řešení přibližná.

Jedním z nich je výpočet rozložení výsledné funkce v konečném počtu bodů, přičemž se postupuje analogickým způsobem, jak bylo ukázáno v druhém odstavci pro staticky náhodnou funkci prvního druhu, vyjadřující závislost mezi napětím a přetvořením.

Poměrně obecnějšího vyjádření a přitom značného zjednodušení se dá dosáhnout rozvinutím funkce kolem střední hodnoty podle řady Taylorovy.

Za statisticky náhodnou funkci několika nezávisle proměnných můžeme pokládat nutnou plochu F_a výztuže železobetonového sloupu o průřezu F_b namáhaného účinkem zatížení stálého osovou silou P_g a účinkem zatížení nahodilého silou P_p. Velikost této plochy se počítá podle vzorce

$$F_a = \frac{P_g + P_p - mF_b\sigma_{mb}}{m\sigma_{ma}}, \tag{10}$$

kde σ_{mb} je mezní napětí betonu, σ_{ma} mezní napětí ve výztuži a m součinitel statického působení.

Rozvinutím podle Taylorovy řady kolem střední hodnoty F_{as}, dostáváme

$$\begin{aligned} F_a = F_{as} &+ \frac{1}{m_s\sigma_{mas}}(P_g - P_{gs}) + \frac{1}{m_s\sigma_{mas}}(P_p - P_{ps}) - \frac{P_{gs} + P_{ps}}{m_s^2\sigma_{mas}}(m - m_s) - \\ &- \frac{P_{gs} + P_{ps} - m_sF_b\sigma_{mbs}}{m_s\sigma_{mas}^2}(\sigma_{ma} - \sigma_{mas}) - \frac{F_b}{\sigma_{mas}}(\sigma_{mb} - \sigma_{mbs}) + \\ &+ \frac{P_{gs} + P_{ps}}{m_s^3\sigma_{mas}}(m - m_s)^2 + \frac{P_{gs} + P_{ps} - m_sF_b\sigma_{mbs}}{m_s\sigma_{mas}^3}(\sigma_{ma} - \sigma_{mas})^2 - \\ &- \frac{1}{m_s^2\sigma_{mas}}(P_g - P_{gs})(m - m_s) - \ldots \end{aligned} \tag{11}$$

Největší zjednodušení představuje linearisace problému, kdy se řešení omezí jen na lineární členy řady. V tomto případě je směrodatná odchylka dána výrazem

$$\begin{aligned} \omega_{F_a} &= \sqrt{\left(\frac{\partial F_a}{\partial P_g}\right)_s^2 \omega_g^2 + \left(\frac{\partial F_a}{\partial P_p}\right)_s^2 \omega_p^2 + \left(\frac{\partial F_a}{\partial m}\right)_s^2 \omega_m + \left(\frac{\partial F_a}{\partial \sigma_{ma}}\right)_s^2 \omega_{\sigma ma}^2 + \left(\frac{\partial F_a}{\partial \sigma_{mb}}\right)_s^2 \omega_{\sigma mb}^2} = \\ &= \sqrt{\frac{\omega_g^2 + \omega_p^2}{m_s^2\sigma_{mas}^2} + \frac{(P_{gs} + P_{ps})^2}{m_s^4\sigma_{mas}^2}\omega_m^2 + \frac{(P_{gs} + P_{ps} - m_sF_b\sigma_{mas})^2}{m_s^2\sigma_{mas}^4}\omega_{\sigma ma}^2 + \frac{F_b^2}{\sigma_{mas}^2}\omega_{\sigma mb}^2}, \end{aligned} \tag{12}$$

kde ω_g, ω_p, ω_m, $\omega_{\sigma ma}$, $\omega_{\sigma mb}$ jsou směrodatné odchylky jednotlivých složek.

Takový postup dává sice značné zjednodušení, ale je plně oprávněn jen v případě, mají-li všechny složky normální rozložení. Jinak vycházejí výsledky pouze přibližně a odchylky od přesného řešení jsou tím větší, čím více se liší křivky četností složek od křivek normálního rozložení.

Vztahy mezi momenty křivek rozložení dávají možnost určit rozložení výsledné funkce s větší přesností. Omezíme-li se v rozvoji funkce na členy do třetího řádu, můžeme určit vedle střední hodnoty a směrodatné odchylky též šikmost výsledné křivky a tím též vzít zřetel k nesouměrnosti rozložení.

V našem případě dostáváme střední hodnotu nutné výztuže

$$F_{as} = \frac{P_{gs} + P_{ps}}{m_s \sigma_{mas}} (1 + v_m^2 + v_{\sigma ma}^2 - v_m^3 s_m - v_{\sigma ma}^2 s_{\sigma ma}) -$$
$$- \frac{F_b \sigma_{mbs}}{\sigma_{mas}} (1 + v_{\sigma ma}^2 - v_{\sigma ma}^3 s_{\sigma ma}) , \tag{13}$$

směrodatnou odchylku

$$\omega_{F_a} = \sqrt{\frac{\omega_g^2 + \omega_p^2}{m_s^2 \sigma_{mas}^2} + \frac{(P_{gs} + P_{ps})^2}{m_s^4 \sigma_{mas}^2} \omega_m^2 + \frac{(P_{gs} + P_{ps} - m_s F_b \sigma_{mbs})^2}{m_s^2 \sigma_{mas}^4} \omega_{\sigma ma}^2 + \frac{F_b^2}{\sigma_{mas}^2} \omega_{\sigma mb}^2 - 2 \left[\frac{(P_{gs} + P_{ps})^2}{m_s^5 \sigma_{mas}^2} \omega_m^3 s_m + \frac{(P_{gs} + P_{ps} - m_s F_b \sigma_{mbs})^2}{m_s^2 \sigma_{mas}^5} \omega_{\sigma ma}^3 s_{\sigma ma} \right]} \tag{14}$$

a šikmost

$$s_{F_a} = \frac{\mathsf{E}(F_a - F_{as})^3}{\omega_{F_a}^3} = \frac{1}{\omega_{F_a}^3 m_s^3 \sigma_{mas}^3} \left[\omega_g^3 s_g + \omega_p^3 s_p - \frac{(P_{gs} + P_{ps})^3}{m_s^3} \omega_m^3 s_m - \right.$$
$$\left. - \frac{(P_{gs} + P_{ps} - m_s F_b \sigma_{mbs})^3}{\sigma_{mas}^3} \omega_{\sigma ma}^3 s_{\sigma ma} + m_s^3 F_b^3 \omega_{\sigma mb}^3 s_{\sigma mb} \right] , \tag{15}$$

kde $\omega_g, \omega_p, \ldots$ jsou směrodatné odchylky $v_g = \frac{\omega_g}{P_{gs}}, \ldots$ variační koeficienty $s_m, s_{\sigma ma}, \ldots$ šikmosti jednotlivých argumentů a E střední hodnota.

Při pravděpodobnostním řešení můžeme však jíti ještě dále, uvážíme-li, že výztuž sloupu se skládá ne z jednoho, ale z n prutů. Čím více je prutů, tím menší je pravděpodobnost současného výskytu kritické dolní hodnoty meze průtažnosti ve všech prutech. Je-li rozložení mechanických charakteristik ve všech prutech normální, pak při výztuži z n prutů se sníží směrodatná odchylka ω_1 únosnosti jednoho prutu na

$$\omega_n = \frac{\omega_1}{\sqrt{n}} . \tag{16}$$

Stejným způsobem se sníží směrodatná odchylka pro nahodilé zatížení sloupu, které je výslednicí nahodilých reakcí několika pater nad sebou, uvážíme-li menší pravděpodobnost současného výskytu kritického horního zatížení ve všech příslušných patrech.

Jestliže spolupůsobí v staticky neurčité konstrukci n prvků, snižuje se pravděpodobnost celkového porušení konstrukce zcela obdobným způsobem následkem možnosti roznesení namáhání.

Z toho je vidět velký význam řady paralelně spojených prvků pro zvýšení bezpečnosti konstrukce.

Naopak, při seriovém spojení prvků se pravděpodobnost porušení značně zvětšuje, protože v řadě prvků je větší pravděpodobnost výskytu oslabeného místa, které v tomto případě rozhoduje o únosnosti celku. Podobně výztuž sloupu o délce l bude mít zvětšenou směrodatnou odchylku podle vztahu

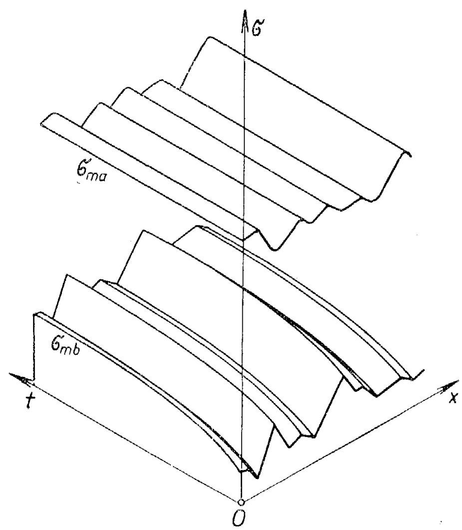
$$\omega = \omega_0 \sqrt{l}\,, \tag{17}$$

je-li ω_0 odchylka pro jednotkovou délku.

6. OBECNÉ PRAVDĚPODOBNOSTNÍ POSOUZENÍ BEZPEČNOSTI KONSTRUKCÍ A KONSTRUKČNÍCH PRVKŮ

V obecném případě můžeme pokládat složky pevnosti a zatížení za časově a místně proměnné veličiny, jejichž změny jsou představovány neperiodickými i periodickými plošnými vlnami v souřadnicové soustavě s osami udávajícími místo, čas a hodnotu příslušné veličiny, jak je naznačeno na obr. 1 a 2.

Na obr. 1 je znázorněna proměnlivost mezního napětí betonu σ_{mb} a mezního napětí ocelové výztuže σ_{ma}, železobetonové konstrukce s místem x a časem t. Mezní napětí betonu s časem celkem plynule vzrůstá a blíží se asymptoticky určitým konečným hodnotám. S místem se nepravidelně mění vlivem nestejnoměrnosti výroby. Mezní napětí ocelové výztuže σ_{ma} je v čase přibližně stálé a mění se pouze s místem podle neperiodické funkce.



Obr. 1.

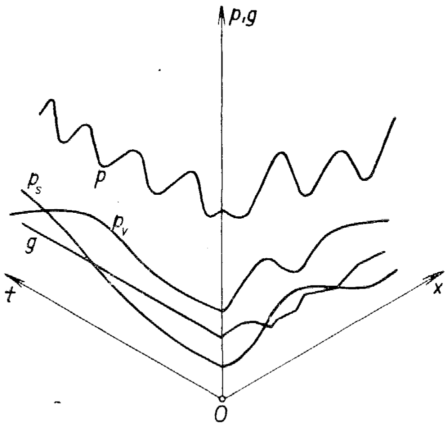
Podobný průběh má i plocha znázorňující proměnlivost stálého zatížení g na obr. 2.

Nahodilé zatížení p se mění s časem neperiodicky i periodicky podle provozních okolností a podobné jsou i jeho místní změny.

Částečně periodický charakter má zatížení sněhem p_s a větrem p_v, které závisí na změnách povětrnosti ovlivňovaných periodickými změnami ročních období.

Při důsledném pravděpodobnostním pojetí bezpečnosti stavebních konstrukcí je třeba rozlišovat proměnlivost statistiky náhodných veličin s místem a na druhé straně s časem.

Velký význam má délka intervalu vysokých a nízkých hodnot v čase i v místě. Docházíme k pojmu proměnné veličiny jakožto statisticky náhodné funkce času t a místa x, u které je nejen třeba statisticky zkoumat její prosté velikosti, ale i délky intervalů, ve kterých se střídají vysoké a nízké hodnoty. Tuto statisticky náhodnou funkci nazveme na rozdíl od jednoduché náhodné funkce prvního druhu, uvedené v odstavci 2, jejíž celkový průběh (poloha extrémů atd.) byl předem dán, statisticky náhodnou funkcí druhého druhu.



Obr. 2.

Příkladem místní periodicity takové funkce je zatížení mostu vozidly s určitými rozchody kol.

Srovnáme-li různé krátké intervaly maxim a minim některých druhů užitného zatížení s dlouhými intervaly zatížení závislého na povětrnostních podmínkách, vidíme význam vyjádření těchto veličin jako statisticky náhodných funkcí druhého druhu.

Pravděpodobnost zřícení konstrukce je v tomto nejobecnějším pojetí vyjádřena pravděpodobností dotyku plošné vlny $Z_k(x, t)$ představující kritickou funkci výsledného zatížení, s plošnou vlnou $R_k(x, t)$, představující kritickou funkci výsledné únosnosti konstrukce, redukovanou kritickou hodnotou součinitele mechanického působení m_k, tedy pravděpodobností rovnosti

$$Z_k(x, t) = m_k R_k(x, t) . \qquad (18)$$

7. ZÁVĚR

Tento příspěvek navazuje na úvodní redakční článek časopisu Aplikace matematiky a chce ukázat některé zvláštní podmínky spolupůsobení statisticky náhodných veličin a funkcí. Zavedení statisticky náhodných funkcí druhého druhu má umožnit obecné pravděpodobnostní vyjádření bezpečnosti konstrukce se zřetelem k podmínkám střídání vysokých a nízkých hodnot některých veličin v časových a místních intervalech, jejichž délka je též statisticky náhodnou veličinou.