

Aplikace matematiky

Vladimír Matoušek

Statistika detekce radioaktivního rozpadu

Aplikace matematiky, Vol. 4 (1959), No. 1, 53–74

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102645>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1959

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

STATISTIKA DETEKCE RADIOAKTIVNÍHO ROZPADU

VLADIMÍR MATOUŠEK

DT: 539.162:519.2.004:539.16.08

(Došlo dne 21. dubna 1958.)

Článek pojednává o statistice detekce jednoduchého radioaktivního rozpadu. Je probrán pojem účinnosti detekce a podána jeho přesná definice v souvislosti s Poissonovým a normálním rozdělením. Normálního rozdělení je užito jako rozdělení asymptotického ve všech hlavních případech detekce radioaktivity.

ÚVOD

Metody měření radioaktivity, které záleží na detekci a registraci jednotlivých jaderných rozpadů, patří dnes mezi nejrozšířenější a nejcitlivější fyzikální metody měření. Poněvadž jsou založeny na sledování procesu desintegrace jádra a interakce emitovaných částic nebo fotonů s atomy, tedy na procesech čistě statistických, jsou hodnoty získané sledováním těchto procesů vlastně výsledky pokusů sdružených s určitými náhodovými proměnnými a jejich zpracování, resp. interpretace přináší s sebou některé statistické problémy. Cílem měření radioaktivity je získání odhadů pro některé důležité neznámé parametry zářiče. Těmi může být buď počet radioaktivních atomů v určitém časovém okamžiku, nebo rozpadová konstanta, anebo jejich součin známý jako aktivita zářiče a představující intenzitu přechodu zářiče jako stochastického systému. V podstatě tu jde o tyto klasické problémy:

1. nalézt distribuční zákony přímo sledovaných náhodových proměnných,
2. získat odhady pro neznámé parametry,
3. stanovit vhodné testy pro kontrolu funkce registračních aparatur.

Literatura pojednávající o statistice detekce radioaktivního rozpadu je značně obsáhlá a má různé zaměření. Zatím co první práce vůbec se zabývaly pouze primárním procesem radioaktivního rozpadu (BATEMAN [2], BORTKIEWICZ [3]), jsou pozdější práce více zaměřeny na detekci rozpadu z hlediska detektoru a registrátoru a na otázku účinnosti detekce. Z hlavních prací zabývajících se tímto thematem soustavně je třeba uvést práce A. RUARKA a L. DEVOLA [13] a A. RUARKA a F. BRAMMERA [12]. Tito autoři odvozují za různých předpokladů zákony rozdělení některých náhodových proměnných, a to

z hlediska účinnosti detekce stejné pro všechna radioaktivní jádra a pro jednoduché modely funkce registrátoru. Obsáhle vypracovanou teorii registrace rekurentního procesu obsahuje práce R. JOSTA [11] a teorii detekce hlavně Poissonova procesu práce C. DOMBA [6]; obě jsou založeny na důsledném použití Laplaceovy transformace. K nim se druží článek L. CAMPBELLA [4]. Vlastní statistika detekce radioaktivity tvoří thema několika prací N. HOLA [10], které se neomezuji jenom na stacionární případ detekce rozpadu (primární Poissonův proces). Účinnost detekce se předpokládá stejná pro všechna radioaktivní jádra. Z novějších publikací je třeba jmenovat práci G. E. ALBERTA a L. NELSONA [1] a řadu prací L. TAKÁCSÉ [14], [15], který v nich věnuje pozornost především mechanismu filtrace primárního procesu a podrobně rozbirá některé matematické problémy s tím spojené.

V následujících odstavcích systematicky pojednáme o zákonech rozdělení náhodových proměnných vyskytujících se při registraci jednoduchého rozpadu, přičemž se budeme snažit přiblížit co nejvíce skutečným podmínkám měření. To znamená, že přijímáme tato hlediska:

1. Ve většině případů není účinnost detekce rozpadů stejná pro všechna radioaktivní jádra zářiče. Proti citovaným pracím vypouštíme tento předpoklad a v 3. odstavci definujeme přesně pojem účinnosti detekce rozpadu v daném experimentálním uspořádání v souvislosti s obecným asymptotickým zákonem, a to za předpokladu zanedbatelnosti koincidenčních ztrát.

2. Při skutečném měření sledujeme dva druhy náhodových proměnných, buď počet registrací v pevném časovém intervalu, nebo čekací dobu pro předem daný počet registrací. Odvozujeme proto přímo distribuční zákony těchto náhodových proměnných a používáme normálního rozdělení jako asymptotického. V 3. odstavci uvádíme normálně rozdělenou transformaci čekací doby pro případ, kdy nelze zanedbat úbytek radioaktivních jader vzniklý rozpadem během měření.

3. Při výkladu registrační účinnosti rozlišujeme mezi schématem daným mrtvou prodlevou prvního nebo druhého druhu.

V označování se přidržujeme obvyklých konvencí. Pravděpodobnost jevu A značíme $P\{A\}$. Distribuční funkci náhodové proměnné ξ definujeme pravděpodobností vztahu $\xi < x$, tedy $F(x) = P\{\xi < x\}$. Dále užíváme těchto charakteristik náhodové proměnné ξ :

$$\begin{aligned} \text{střední hodnoty } \mu &= \mathbf{E}(\xi) = \int x \, dF(x), \\ \text{disperse } \sigma^2 &= \mathbf{D}^2(\xi) = \int (x - \mu)^2 \, dF(x), \\ \text{charakteristické funkce } \varphi_\xi(u) &= \int e^{iux} \, dF(x). \end{aligned}$$

Náhodovou proměnnou rozdělenou normálně se střední hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ označujeme krátce jako „normální (μ, σ) “.

1. RADIOAKTIVNÍ ROZPAD JEDNOTLIVÉHO ATOMU

Radioaktivní rozpad atomového jádra je diskrétní nevratný stochastický proces záležející ve spontánním a náhodném přechodu jádra jednoho prvku v jádro jiného prvku. Je-li výsledný stav atomového jádra konečný, to znamená, že produkt rozpadu je stabilní, nazýváme proces *jednoduchým* rozpadem. Je charakteristický tím, že pravděpodobnost rozpadu v časovém intervalu $(t, t + \Delta t)$ je dána výrazem

$$\lambda \Delta t + o(\Delta t),$$

v němž rozpadová konstanta λ je nezávislá na t a je dána pouze stavem jádra, resp. celého atomu. O funkci $o(\Delta t)$ platí

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0.$$

Za náhodovou proměnnou můžeme volit buď

a) počet rozpadů ν_T v určitém intervalu $(t, t + T)$, nebo

b) čekací dobu ξ_n od zvoleného okamžiku $t = 0$ do okamžiku n -tého rozpadu. Pro jednotlivé jádro může proměnná ν_T nabýt během intervalu $(t, t + T)$ pouze hodnot 0 nebo 1. Pravděpodobnost setrvání jádra v původním stavu ($\nu_T = 0$) je (viz např. [9], str. 298)

$$P\{\nu_T = 0\} = e^{-\lambda T},$$

a tedy pravděpodobnost desintegrace v témže intervalu je rovna

$$P\{\nu_T = 1\} = 1 - e^{-\lambda T}. \quad (1)$$

Proces rozpadu je stejnorodý v čase, neboť pravděpodobnost rozpadu závisí jenom na délce intervalu, v němž atomové jádro sledujeme. Volíme-li za náhodovou proměnnou čekací dobu ξ_1 pro rozpad jádra, počítanou od libovolného počátku $t = 0$, pak nerovnost $\xi_1 < t$ značí rozpad v intervalu $[0, t)$, a tedy distribuční funkce proměnné ξ_1 je podle (1) pro $t \geq 0$

$$F(t) = P\{\xi_1 < t\} = 1 - e^{-\lambda t}.$$

2. ZÁŘIČ

Máme-li v okamžiku $t = 0$ v určitém omezeném prostoru Ω soubor N radioaktivních jader ($N > 1$), mluvíme o zářiči. Počet stavů, jichž zářič jako systém může nabýt, závisí na stavu jader. Při jednoduchém rozpadu všech jader je tento počet roven N . Jsou-li všechna radioaktivní jádra v zářiči obsažená charakterisována touž rozpadovou konstantou λ , mluvíme o *homogenním* zářiči. Je tedy homogenní zářič určen parametry N a λ . Máme-li v okamžiku $t = 0$ homogenní zářič s N radioaktivními jádry o rozpadové konstantě λ , je

pravděpodobnost počtu $v_T = n$ rozpadů v intervalu $(0, T)$ dána — následkem vzájemné stochastické nezávislosti stavů jednotlivých jader — známým vzorcem

$$P\{v_T = n\} = \binom{N}{n} (1 - e^{-\lambda T})^n \cdot e^{-\lambda T(N-n)}. \quad (2)$$

Odvození z hlediska teorie stochastických procesů uvádí např. L. TRUKSA (viz [16], str. 174) a B. V. GNĚDĚNKO (viz [9], str. 299). Vzorec (2) je zákonem rozdělení proměnné v_T . Volíme-li za náhodovou proměnnou čekací dobu ξ_n pro n -tý rozpad od okamžiku $t = 0$, kdy zářič obsahoval N radioaktivních jader, pak

$$\begin{aligned} F_n(t) = P\{\xi_n < t\} &= \sum_{r=n}^N \binom{N}{r} (1 - e^{-\lambda t})^r e^{-\lambda t(N-r)} = \\ &= \int_0^{1 - e^{-\lambda t}} \frac{N!}{(n-1)!(N-n)!} x^{n-1} (1-x)^{N-n} dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Vztah $\xi_n < t$ totiž znamená, že v intervalu $[0, t]$ došlo alespoň k n rozpadům. Platnost integrálního vyjádření vyplyne postupnou integrací per partes.

Kdyby použitý detektor a registrátor byly dokonalé, tj. kdyby zaznamenávaly každý rozpad, ke kterému v zářiči dojde, pak by se proces rozpadu shodoval s procesem registrace a bylo by možno přímo užít distribučních zákonů (2) nebo (3). Ve skutečnosti jsou jednotlivé rozpady registrovány s pravděpodobností menší než 1; proces registrace je pak *filtrovaným* procesem rozpadu, přičemž jako filtry se uplatňuje detektor spolu se všemi stupni aparatury (zesilovači, reduktory a mechanickými nebo elektronickými počítadly).

3. DETEKČNÍ ÚČINNOST

Vlastní detektor vymezuje určitý citlivý prostor, v němž absorpce energie částice nebo fotonu může vyvolat detekční děj, pokud ovšem je detektor právě ve stavu schopném detekce. Aby pak nastalý rozpad mohl být detektorem zaznamenán, musí nastat tyto základní jevy:

- a) emise částice nebo fotonu, na které je detektor schopen reagovat;
- b) průchod částice nebo fotonu citlivým prostorem detektoru;
- c) interakce s náplní detektoru za současné ztráty dostatečného množství energie.

Pro každý z těchto dějů existuje určitá pravděpodobnost. Budeme je po řadě značit g_a , g_b a g_c . Tyto pravděpodobnosti jsou pro každé radioaktivní jádro různé a závisí na mnoha činitelích, jako např. na vzájemné poloze jádra, detektoru a okolních hmot, na velikosti citlivého objemu, na druhu detektoru, na povaze emitovaného záření a na rozpadovém schématu jádra. Součin

$$g = g_a g_b g_c$$

udává pro dané jádro pravděpodobnost detekce jeho rozpadu za předpokladu, že detektor je ve stavu detekce schopném. Tento součín nazýváme proto *detekční účinností* pro dané radioaktivní jádro. U homogenního zářiče bude detekční účinnost radioaktivního jádra funkcí jeho polohy v prostoru. r -tému radioaktivnímu jádru (homogenního zářiče) o souřadnicích (x_r, y_r, z_r) bude příslušet detekční účinnost rozpadu

$$g_r = g(x_r, y_r, z_r).$$

Do konce tohoto odstavce budeme předpokládat, že proces rozpadu je filtrován pouze detekční účinností. Jinými slovy to znamená, že splnění podmínek a), b) a c) tohoto odstavce má za následek i registraci rozpadu a že tedy detektor a registrátor má dokonalou rozlišovací schopnost.

Nechť náhodová proměnná v_{rT} značí počet registrací způsobených r -tým radioaktivním jádrem v intervalu $(0, T)$. v_{rT} může zřejmě nabýt jen hodnot 0 nebo 1. Rozdělení pravděpodobnosti proměnné v_{rT} je dáno výrazy

$$P\{v_{rT} = 1\} = g_r(1 - e^{-\lambda T}), \quad (4)$$

$$P\{v_{rT} = 0\} = 1 - g_r(1 - e^{-\lambda T}). \quad (5)$$

Zavedeme-li zkrácené značení $p_r = g_r(1 - e^{-\lambda T})$, $q_r = 1 - p_r$, můžeme charakteristickou funkci tohoto rozdělení psát

$$q_r(u) = p_r e^{iu} + q_r.$$

Počet registrovaných rozpadů ze zářiče obsahujícího N radioaktivních jader v okamžiku $t = 0$ je roven součtu hodnot všech náhodových proměnných v_{rT} ($r = 1, 2, \dots, N$), kterých nabyly během intervalu $(0, T)$. Charakteristická funkce náhodové proměnné

$$v_T = \sum_{r=1}^N v_{rT}$$

bude následkem stochastické nezávislosti proměnných v_{rT} rovna

$$q_N(u) = \prod_{r=1}^N q_r(u) = \prod_{r=1}^N (p_r e^{iu} + q_r), \quad (6)$$

což je charakteristická funkce *obecného binomického Poissonova* rozdělení. Pravděpodobnost, že zářič přivodí v registrátoru n registrací rozpadů, je pak dána koeficientem u členu e^{iun} v rozvoji funkce $q_N(u)$ podle mocnin e^{iu} . Poněvadž počet radioaktivních jader je v zářiči obvykle veliký, mají význam především asymptotická rozdělení náhodové proměnné v_T při $N \rightarrow \infty$. Jde tu o dva distribuční zákony, jejichž pomocí dospějeme přirozeně k pojmu úhrnné účinnosti detekce platné pro zářič jako celek.

I. Jestliže při pevném T platí současně $N \rightarrow \infty$ a $\lambda \rightarrow 0$ tak, že $\lambda \sum_{r=1}^N g_r \rightarrow x$,

potom konverguje obecný zákon rozdělení proměnné v_T daný charakteristickou funkcí $\varphi_N(u)$ k Poissonovu zákonu

$$P\{v_T = n\} = \frac{(\alpha T)^n}{n!} e^{-\alpha T}. \quad (7)$$

Na základě uvedených předpokladů totiž platí

$$\sum_{r=1}^N p_r \rightarrow \alpha T, \quad \sum_{r=1}^N p_r^2 \rightarrow 0. \quad (8)$$

Rozvinutím $\log \varphi_N(u)$ dostaneme vyjádření

$$\begin{aligned} \log \varphi_N(u) &= \sum_{r=1}^N \log [1 + p_r(e^{iu} - 1)] \\ &= (e^{iu} - 1) \sum_{r=1}^N p_r + R. \end{aligned}$$

Snadno zjistíme odhadem zbytku R , že $|R| \rightarrow 0$, takže vzhledem k (8) platí $\log \varphi_N(u) \rightarrow \alpha T(e^{iu} - 1)$, a tedy také

$$\varphi_N(u) \rightarrow \exp [\alpha T(e^{iu} - 1)],$$

což je charakteristická funkce zákona (7).

Pro velká N a velmi malá λ můžeme tedy očekávat, že zákon rozdělení počtu registrovaných rozpadů v_T v intervalu $(0, T)$ je při dokonalé rozlišovací schopnosti aparatury velmi přibližně dán vzorcem (7).

Značí-li funkce $\varrho(\omega)$ množství radioaktivních jader v prostorovém oboru ω , je potom

$$\alpha \cong \lambda \sum_{r=1}^N g_r = \lambda \int_{\Omega} g \, d\varrho(\omega); \quad (9)$$

přítom Ω je prostorový obor zaujímaný zářičem a $g = g(x, y, z)$ je dříve zmíněná detekční účinnost rozpadu jádra nacházejícího se v bodě (x, y, z) oboru Ω . Musí zřejmě platit

$$\int_{\Omega} d\varrho(\omega) = N.$$

Veličinu G danou vzorcem

$$G_N = \frac{1}{N} \int_{\Omega} g \, d\varrho(\omega) \quad (10)$$

budeme nazývat *úhrnnou účinností* detekce platnou pro dané experimentální uspořádání. Určení této veličiny je hlavní úlohou absolutní dosimetrie. Jak pro účinnost g , tak i pro ni platí $0 \leq G \leq 1$. Máme tedy $\alpha = \lambda N G$ a ve zvláštním případě, kdy g je konstantní v oboru Ω , je $G = g$ a $\alpha = N \lambda g$. Konvergenci rozdělení proměnné v_T k Poissonovu zákonu lze dokázat za obecnějších předpokladů, ale pro náš účel nemá takové zobecnění přímý význam.

II. Jestliže při $N \rightarrow \infty$ řada $\sum_{r=1}^N g_r(1 - g_r)$ diverguje, pak je náhodová proměnná

$$\bar{v}_T = \frac{v_T - (1 - e^{-\lambda T}) NG_N}{\sqrt{N(1 - e^{-\lambda T})(G_N - (1 - e^{-\lambda T}) H_N)}} \quad (11)$$

asymptoticky normální (0, 1). Přitom

$$\left. \begin{aligned} G_N &= \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N g_r = \frac{1}{N} \int_{\Omega} g \, d\varrho(\omega), \\ H_N &= \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N g_r^2 = \frac{1}{N} \int_{\Omega} g^2 \, d\varrho(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Nebudeme dokazovat přímo tuto větu, ale dokážeme následující větu o něco obecnější, která sice nemá přímý význam pro aplikace, ale pomůže nám v důkaze věty IV.

IIIa. Jestliže při $N \rightarrow \infty$ řada $\sum_{r=1}^N g_r(1 - g_r)$ diverguje a posloupnost kladných čísel $\{T(N)\}$ konverguje k nenulové hodnotě T , potom je náhodová proměnná

$$\bar{v}_{T(N)} = \frac{v_{T(N)} - (1 - e^{-\lambda T(N)}) NG_N}{\sqrt{N(1 - e^{-\lambda T(N)})(G_N - (1 - e^{-\lambda T(N)}) H_N)}} \quad (13)$$

asymptoticky normální (0, 1).

Kvůli úspoře symbolů zavedeme toto zkrácené značení, které nadále po-
držíme

$$\begin{aligned} p_{r,N} &= g_r(1 - e^{-\lambda T(N)}), \quad q_{r,N} = 1 - p_{r,N}, \quad v_N = G_N(1 - e^{-\lambda T(N)}), \\ \mu_N &= \sum_{r=1}^N p_{r,N} = Nv_N, \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\sigma_N^2 = \sum_{r=1}^N p_{r,N} q_{r,N} = Nv_N \left(1 - \frac{v_N H_N}{G_N^2} \right). \quad (13b)$$

Charakteristická funkce proměnné $\bar{v}_{T(N)}$ je podle (6)

$$\varphi(u) = \varphi_N \left(\frac{u}{\sigma_N} \right) \cdot \exp \left(- \frac{i u \mu_N}{\sigma_N} \right)$$

a pro její logaritmus dostáváme

$$\log \varphi(u) = - \frac{i u \mu_N}{\sigma_N} + \sum_{r=1}^N \log \left[1 + p_{r,N} \left(\exp \left(\frac{i u}{\sigma_N} \right) - 1 \right) \right].$$

Z divergence řady $\sum_{r=1}^N g_r(1 - g_r)$ plyne i divergence disperse σ_N^2 a tedy pro dostatečně velká N lze $\log \varphi(u)$ rozvinout podle $\frac{i u}{\sigma_N}$, takže po úpravě dostaneme

$$\log \varphi(u) = -\frac{1}{2} u^2 - \frac{i u^3}{6 \sigma_N^3} \sum_{r=1}^N \frac{p_{r,N} q_{r,N} (1 - 2 p_{r,N} e^{\theta_r}) e^{\theta_r}}{(p_{r,N} e^{\theta_r} + q_{r,N})^3},$$

přičemž $\theta_r = \frac{i u \Theta_r}{\sigma_N}$, $0 < \Theta_r < 1$. Druhý člen na pravé straně představuje zbytek rozvoje a lze snadno zjistit, že pro všechna N větší než jisté N_0 je jeho absolutní hodnota menší než

$$\frac{1}{6} |u|^3 \sigma_N^{-1} C.$$

Přitom C je konstanta. Poněvadž při $N \rightarrow \infty$ je $\sigma_N \rightarrow \infty$, platí

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \log \varphi(u) = -\frac{1}{2} u^2,$$

což je logaritmus charakteristické funkce standardního normálního rozdělení, jak se mělo dokázat. Pro zvláštní volbu $T_{(N)} = T$ dostáváme větu II., podle níž je náhodová proměnná v_T pro velká N přibližně normálně rozdělená se střední hodnotou

$$\left. \begin{aligned} \mu_N &= (1 - e^{-\lambda T}) N G_N \\ \sigma_N^2 &= N(1 - e^{-\lambda T})(G_N - (1 - e^{-\lambda T}) H_N). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

a dispersí

Je-li známo rozdělení pravděpodobnosti počtu detekcí v_T v určitém pevném intervalu, můžeme také snadno najít rozdělení čekacích dob ξ_n pro pevně stanovený počet detekcí n počínaje okamžikem $t = 0$, v němž případnou detekci počítáme za nultou. Přitom je třeba uvážit, že k n -té detekci nemusí vůbec dojít během doby h počítané od okamžiku $t = 0$, kterou hodláme na měření vynaložit. Podmíněná distribuční funkce $F_{n,h}(t)$ proměnné ξ_n při podmínce $\xi_n < h$ je dána vztahem

$$F_{n,h}(t) = P\{\xi_n < t | \xi_n < h\} = \frac{P\{\xi_n < t\}}{P\{\xi_n < h\}}. \quad (15)$$

Avšak

$$P\{\xi_n < t\} = P\{v_t \geq n \text{ v intervalu } (0, t)\} = 1 - F_t(n), \quad (16)$$

je-li $F_t(n)$ distribuční funkce proměnné v_t v intervalu $(0, t)$, takže

$$F_{n,h}(t) = \frac{1 - F_t(n)}{1 - F_h(n)}. \quad (17)$$

III. Za stejných předpokladů jako ve větě I. konverguje distribuční funkce čekací doby ξ_n k funkci gamma

$$F_n(t) = \int_0^t \frac{\alpha^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha x} dx, \quad (18)$$

jak plyne jednoduše z Poissonova zákona a z rozvoje neúplné funkce gamma

$$\sum_{r=n}^{\infty} \frac{(\alpha t)^r}{r!} e^{-\alpha t} = \int_0^{\alpha t} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} dx.$$

Pro velká N a velmi malá λ bude tedy náhodová proměnná ξ_n velmi přibližně rozdělena podle funkce gamma s parametry n a

$$\alpha = \lambda N G_N, \quad (19)$$

při čemž G_N je úhrnná detekční účinnost definovaná vzorcem (10).

IV. Necht h je doba zvolená ke sledování náhodové proměnné ξ_n . Jestliže při $N \rightarrow \infty$ řada $\sum_{r=1}^N g_r(1 - g_r)$ diverguje a zároveň $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N} = l$ a $(1 - e^{-\lambda h}) \lim_{N \rightarrow \infty} G_N = (1 - e^{-\lambda h}) G > l$, ($0 < l < 1$), potom konverguje podmíněná distribuční funkce náhodové proměnné

$$\eta = \frac{N G_N (1 - e^{-\lambda \xi_n}) - n}{\sqrt{n \left(1 - \frac{n H_N}{N G_N^2}\right)}} \quad (20)$$

při podmínce $\xi_n < h$ k distribuční funkci standardního normálního rozdělení (0, 1).

K důkazu použijeme věty IIa. a přitom použijeme všech označení tam zavedených. Podle vzorce (17) máme

$$P\{\eta < z | \xi_n < h\} = \frac{P\{v_T \geq n\}}{P\{v_h \geq n\}},$$

při čemž T je dáno výrazem

$$T = T(N) = -\frac{1}{\lambda} \log \left[1 - \frac{n}{N G_N} - \frac{z}{G_N} \sqrt{\frac{n}{N^2} \left(1 - \frac{n H_N}{N G_N^2}\right)} \right]. \quad (20')$$

Tyto čtyři nerovnosti jsou zřejmě navzájem ekvivalentní

$$\xi_n < T(N), \quad v_{T(N)} \geq n, \quad \eta < z, \quad \frac{v_{T(N)} - \mu_N}{\sigma_N} \geq \frac{n - \mu_N}{\sigma_N};$$

výrazy pro μ_N a σ_N^2 jsou přitom formálně shodné s výrazy (13a) a (13b). Pro standardisovanou proměnnou $\bar{v}_{T(N)}$ proměnné $v_{T(N)}$ dostaneme výraz

$$\bar{v}_{T(N)} = \frac{v_{T(N)} - N v_N}{\sqrt{N v_N \left(1 - \frac{v_N H_N}{G_N^2}\right)}}.$$

Vztah $\eta < z$ je tedy ekvivalentní se vztahem

$$\bar{v}_{T(N)} \geq \frac{n - Nv_N}{\sqrt{Nv_N \left(1 - \frac{v_N H_N}{G_N^2}\right)}}.$$

Po delší úpravě je možno pravou stranu právě napsané nerovnosti vyjádřit jednoduše ve tvaru

$$-\frac{z}{\sqrt{1 + O(N^{-\frac{1}{2}})}} = -z(1 + \delta_N),$$

při čemž $\lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N = 0$. Je možno proto psát

$$P\{\eta < z\} = P\{\bar{v}_{T(N)} \geq -z(1 + \delta_N)\}.$$

Poněvadž podle učiněných předpokladů diverguje řada $\sum g_r(1 - g_r)$ při $N \rightarrow \infty$ a zároveň z výrazu (20') plyne, že

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T(N) = -\frac{1}{\lambda} \log\left(1 - \frac{l}{G}\right) > 0,$$

jsou tedy splněny předpoklady věty **IIa.** a platí

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{\bar{v}_{T(N)} \geq -z\} = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(z). \quad (21)$$

Z této konvergence a ze spojitosti funkce $\Phi(z)$ potom plyne, že i

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{\eta < z\} = \lim_{N \rightarrow \infty} P\{\bar{v}_{T(N)} \geq -z(1 + \delta_N)\} = \Phi(z).$$

Analogicky vztah $v_h \geq n$ je ekvivalentní se vztahem

$$\frac{v_h - \mu_h}{\sigma_h} \geq \frac{\frac{n}{N} - G_N(1 - e^{-\lambda h})}{\frac{\sigma_h}{N}},$$

v němž μ_h a σ_h^2 jsou opět dány vzorci (13a) a (13b) při $T(N) = h$. Na základě předpokladů věty klesá při $N \rightarrow \infty$ pravá strana napsané nerovnosti k $-\infty$, takže

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{v_h \geq n\} = 1.$$

Platí tedy

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{\eta < z | \xi_n < h\} = \Phi(z).$$

Jestliže pro všechna $r = 1, 2, \dots, N$ je $g_r = g$, takže účinnost detekce rozpadu je stejná pro všechna radioaktivní jádra zářiče, pak lze získat nejen asymptotické, ale i exaktní zákony rozdělení v poměrně jednoduchých tvarech. V praxi takový případ stejné detekční účinnosti nastává na příklad u bodového zářiče nebo u zářiče, který je vzhledem k pronikavosti vysílaného záření rozestřen v téměř nehmotné vrstvě uvnitř citlivého prostoru detektoru. V tomto případě

$$p_r = p = g(1 - e^{-\lambda T}).$$

Uvedeme krátce tyto speciální zákony.

Charakteristická funkce proměnné v_T daná výrazem (6) přejde ve funkci

$$\varphi_N(u) = (pe^{iu} + q)^N;$$

ta je charakteristickou funkcí *binomického zákona*

$$P\{v_T = n\} = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n},$$

jenž je tedy zákonem rozdělení proměnné v_T . Podle věty **II.** je v tomto případě $\mu_N = Np$ a $\sigma_N^2 = Npq$ a poněvadž při konstantním p a $N \rightarrow \infty$ platí $\sigma_N^2 \rightarrow \infty$, je proměnná

$$\bar{v}_T = \frac{v_T - Np}{\sqrt{Npq}} \quad (22)$$

asymptoticky normální $(0, 1)$, což je ostatně dobře známé.

Podle výrazu (17) je podmíněná distribuční funkce proměnné ξ_n dána pro $t_{\max} = h$ výrazem

$$F_{n,h}(t) = \int_0^{g(1-e^{-\lambda t})} x^{n-1}(1-x)^{N-n} dx \Big| \int_0^{g(1-e^{-\lambda h})} x^{n-1}(1-x)^{N-n} dx.$$

Na základě věty **IV.** je pro $N = \infty$ $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N} = l$, $(1 - e^{-\lambda h})g > l$ náhodová proměnná

$$g(1 - e^{-\lambda \xi_n}). \quad (23)$$

asymptoticky normální

$$\left(\frac{n}{N}, \frac{1}{N} \sqrt{\frac{n(N-n)}{N}} \right). \quad (24)$$

Pro velká N a velmi malá λ lze zákony rozdělení náhodové proměnné v_T , resp. ξ_n velmi přibližně vyjádřit rozdělením Poissonovým podle věty **I.**, resp. rozdělením gamma podle věty **III.**, neboť v tomto případě lze proces detekce a registrace považovat za poissonovský s intenzitou přechodu $\alpha = N\lambda G$.

Jestliže v zákoně rozdělení (7) platí $\alpha T \rightarrow \infty$, potom je proměnná

$$\bar{v}_T = \frac{v_T - \alpha T}{\sqrt{\alpha T}} \quad (25)$$

asymptoticky normální $(0,1)$. Při velkých αT lze tedy považovat proměnnou ν_T za přibližně normální $(\alpha T, \sqrt{\alpha T})$.

Jestliže v zákoně rozdělení (18) platí $n \rightarrow \infty$, pak je proměnná

$$\bar{\xi}_n = \frac{\alpha \xi_n - n}{\sqrt{n}} \quad (26)$$

asymptoticky normální $(0,1)$. Při velkých n lze tedy považovat proměnnou ξ_n za přibližně normální $\left(\frac{n}{\alpha}, \sqrt{\frac{n}{\alpha^2}}\right)$. Oba právě uvedené případy jsou známé konvergenční věty.

4. ROZLIŠOVACÍ ÚČINNOST

Distribuční zákony uvedené v předchozím odstavci se vztahují na registrované rozpady v tom případě, kdy lze rozlišovací schopnost aparatury pokládat za dokonalou. Není-li tomu tak, potom je třeba odvodit distribuční zákony za předpokladu nedokonalé rozlišovací schopnosti. K tomu cíli zavedeme dva předpoklady.

1. Rozpadový proces budeme považovat vzhledem k délce intervalu registrace za poissonovský. To znamená, že v zákoně (6) zanedbáváme $(\lambda T)^2$ proti (λT) .

2. Budeme všude nadále předpokládat, že v okamžiku $t = 0$ došlo k registraci. Tento předpoklad umožní vyhnout se zbytečným komplikacím při odvozování distribučních zákonů. Na asymptotické zákony, o které nám hlavně jde a které jediné mají význam pro praxi, nemá toto omezení obecnosti vliv. Obecná řešení uvádí Jost [11] a Takács [14], [15].

Nedokonalá rozlišovací schopnost aparatury přetváří původně poissonovský proces rozpadu a průchodu částice detektorem na proces filtrovaný, který již není obecně poissonovský, neboť vznikne několikanásobnou filtračí primárního rozpadového procesu, přičemž každý stupeň aparatury představuje jistý filtrační člen. Avšak vzhledem k předpokládané stacionárnosti primárního procesu budou procesy odehrávající se v jednotlivých filtračních článcích patřit do kategorie jednoduchých *rekurentních* procesů, které byly dosti podrobně studovány. Z hlediska teorie pravděpodobnosti je rekurentní proces vyšetřován např. DOOBEM v práci [7]. Přehled výsledků důležitých pro naše thema uvádí také Takács [15].

Rekurentní proces vstupující do filtračního článku budeme nazývat *primárním*, proces z článku vystupující *filtrovaným*. Z důvodů obecné platnosti vývodů se neomezujeme ihned na primární proces poissonovský.

Rekurentní proces je popsán, je-li dána distribuční funkce $F(x)$ pro čekací dobu ξ mezi dvěma bezprostředně následujícími ději. Tyto čekací doby ξ pokládáme za kladné, nezávislé a identicky rozdělené náhodové proměnné.

Zároveň ještě předpokládáme, že existují oba první centrální momenty proměnné ξ ,

$$\mu = \int_0^{\infty} x \, dF(x), \quad \sigma^2 = \int_0^{\infty} (x - \mu)^2 \, dF(x).$$

Distribuční funkce pro čekací dobu ξ_n n -tého děje od okamžiku $t = 0$ je dána rekurentním vzorcem

$$F_n(x) = \int_0^x F(x - u) \, dF_{n-1}(u).$$

Poněvadž proměnná ξ_n je součtem n čekacích dob $\xi \equiv \xi_1$ s tímž rozdělením, bude podle centrální limitní věty (viz [5], str. 215) standardisována náhodová proměnná

$$\bar{\xi}_n = \frac{\xi_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \quad (27)$$

asymptoticky normální $(0, 1)$ pro $n \rightarrow \infty$.

Nechť naopak je náhodovou proměnnou počet dějů ν_T v intervalu $(0, T)$. Potom je zřejmě distribuční funkce náhodové proměnné ν_T dána vztahy

$$F_T(n) = P\{\nu_T < n\} = P\{\xi_n \geq T\} = 1 - F_n(T). \quad (28)$$

Distribuční zákon proměnné ν_T můžeme zapsat ve tvaru

$$P\{\nu_T = n\} = F_n(T) - F_{n+1}(T), \quad (29)$$

odkud snadno nalezneme první dva centrální momenty

$$E(\nu_T) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(T), \quad D^2(\nu_T) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n - 1) F_n(T) - [E(\nu_T)]^2, \quad (30)$$

pokud tyto veličiny existují.

Pro náhodovou proměnnou ν_T lze udat jednoduché asymptotické rozdělení. Standardisovaná proměnná

$$\bar{\nu}_T = \frac{\nu_T - \frac{T}{\mu}}{\frac{\sigma}{\mu} \sqrt{\frac{T}{\mu}}} \quad (31)$$

je totiž pro $T \rightarrow \infty$ asymptoticky normální $(0, 1)$. Postup důkazu je podobný jako u důkazu věty IV. Uvádí jej FELLER [8] a přebírá Takács [15].

Vzorce (27) až (31) platí za uvedených předpokladů pro jakýkoliv rekurentní proces. Předpokládejme nyní, že primární proces daný distribuční funkcí $F(x)$ čekací doby ξ je znám a že hledáme distribuční funkci $G(x)$ čekací doby η mezi dvěma bezprostředně následujícími ději filtrovaného procesu. Přitom použijeme dvou filtračních schémat, a to schématu mrtvé prodlevy prvního a druhého typu. Jiné schéma je uvedeno v pracích [1] a [15].

Schéma mrtvé prodlevy 1. typu. Předpokládejme, že za *každým* dějem, jenž *prošel filtrem*, nastane mrtvá prodleva délky τ , během níž je filtrační článek ueschopen zaznamenat další primární děje. Mrtvá prodleva τ nechť je kladná náhodová proměnná nezávislá na ξ a mající distribuční funkci $H(x)$. V okamžiku $t = 0$ nechť dojde k průchodu primárního děje filtrem a nechť η je čekací doba pro první následující průchod. Jev $\eta < x$ za předpokladu $\tau = u$ se může uskutečnit jedním z nekonečně mnoha navzájem se vylučujících způsobů daných vztahy

$$\xi_{k-1} < u \leq \xi_k < x \quad (k = 1, 2, \dots)$$

za předpokladu $\tau = u$ a konvence $\xi_0 = 0$. Přitom ξ_k značí čekací dobu pro k -tý primární děj následující po okamžiku $t = 0$. Platí tedy

$$P\{\eta < x | \tau = u\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\xi_{k-1} < u \leq \xi_k < x | \tau = u\}. \quad (32)$$

Snadno nalezneme, že

$$P\{\xi_{k-1} < u \leq \xi_k < x | \tau = u\} = \int_0^u F(x-y) dF_{k-1}(y) - F_k(u) \quad (33)$$

pro $k = 1, 2, \dots$, jestliže definujeme $F_0(x) = 0$ pro $x < 0$ a $F_0(x) = 1$ pro $x \geq 0$. Z posledních dvou výrazů, (32) a (33), dostaneme

$$P\{\eta < x | \tau = u\} = F(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^u [F(x-y) dF_k(y) - F_k(u)],$$

takže konečně

$$G(x) = P\{\eta < x\} = F(x)H(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x \int_0^u [F(x-y) dF_k(y) - F_k(u)] dH(u). \quad (34)$$

Nechť primární proces je poissonovský s intenzitou α . Podle (18) je tedy $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$. Distribuční funkce čekací doby η mezi dvěma bezprostředně následujícími filtrovanými ději je dána výrazem plynoucím z (34),

$$G(x) = \int_0^x [1 - e^{-\alpha(x-u)}] dH(u). \quad (35)$$

Jestliže existují první dva centrální momenty $E(\tau)$ a $D^2(\tau)$ mrtvé prodlevy τ , pak dostáváme pro aplikaci důležité výrazy pro střední hodnotu a dispersi čekací doby η ,

$$E(\eta) = \frac{1}{\alpha} + E(\tau), \quad D^2(\eta) = \frac{1}{\alpha^2} + D^2(\tau). \quad (36)$$

Ze vzorců (27), resp. (31) plyne, že náhodová proměnná

$$\bar{\eta}_n = \frac{\alpha \eta_n - n[1 + \alpha E(\tau)]}{\sqrt{n[1 + \alpha^2 D^2(\tau)]}} \quad (37)$$

je asymptoticky normální (0, 1) pro $n \rightarrow \infty$, resp. náhodová proměnná

$$\bar{v}_T = \frac{n[1 + \alpha E(\tau)] v_T - \alpha T}{\sqrt{\frac{\alpha T[1 + \alpha^2 D^2(\tau)]}{1 + \alpha\tau}}} \quad (38)$$

je asymptoticky normální (0, 1) pro $T \rightarrow \infty$. Jestliže kromě toho je distribuční funkce mrtvé prodlevy τ definována pomocí jednoduché stupňové funkce $H(u) = 0$ pro $u < b$ a $H(u) = 1$ pro $u \geq b$ ($b > 0$), pak

$$G(x) = 1 - e^{-\alpha(x-b)} \text{ pro } x \geq b \text{ a } G(x) = 0 \text{ pro } x < b. \quad (39)$$

Exaktní rozdělení čekací doby η_n pro n -tý filtrovaný děj je dáno neúplnou funkcí gamma,

$$G_n(x) = \int_{nb}^x \frac{\alpha^n (y - nb)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha(y-nb)} dy \quad \text{pro } x \geq nb, \quad (40)$$

$$G_n(x) = 0 \quad \text{pro } x < nb.$$

V tomto případě speciální volby $H(x)$ (viz [10] a [13]) platí zřejmě $E(\tau) = b$ a $D^2(\tau) = 0$, takže z výrazů (37) a (38) plyne, že standardisované náhodové proměnné

$$\bar{\eta}_n = \frac{\alpha\eta_n - n(1 + \alpha\tau)}{\sqrt{n}} \quad \text{resp.} \quad \bar{v}_T = \frac{v_T(1 + \alpha\tau) - \alpha T}{\sqrt{\frac{\alpha T}{1 + \alpha\tau}}} \quad (41)$$

jsou pro $n \rightarrow \infty$ resp. $T \rightarrow \infty$ asymptoticky normální (0, 1).

Schema mrtvé prodlevy 1. typu lze použít u takových detektorů, respektive filtračních článků, u nichž vstup primárního děje při otevření článku dá vznik pochodu, na jehož trvání příchod dalších primárních dějů nemá vliv. Mezi takové články patří jako nejdůležitější Geigerův-Müllerův počítač. V tomto případě je primárním dějem vstup ionizující částice do citlivého prostoru počítače, což má za následek zapálení výboje, jenž samovolně probíhá bez ohledu na vstup dalších částic a je uhašen teprve snížením intenzity pole mezi elektrodami. Do této skupiny článků patří také thyatronové relé. U některých aparatur se s výhodou používá elektronického obvodu, který pro celou aparaturu vynucuje mrtvou prodlevu předem zvolené délky, takže lze pak použít jednoduchých vzorců (39) a (40).

Schema mrtvé prodlevy 2. typu. Předpokládejme, že za každým primárním dějem nastane mrtvá prodleva délky τ , během níž je filtrační článek neschopen propustit další primární děj (bez ohledu na to, zdali předechozí primární děj prošel nebo ne). Mrtvá prodleva τ nechť je kladná náhodová proměnná nezávislá na ξ a mající distribuční funkci $R(x)$. Nechť opět je $G(x)$ distribuční funkce čekací doby η mezi dvěma bezprostředně následujícími

průchody článkem a necht' nultý průchod nastal v okamžiku $t = 0$. Jev $\eta < x$ může nastat nekonečně mnoha navzájem se vylučujícími způsoby tak, že mezi nultým a prvním průchodem dojde ke k ($k = 0, 1, 2, \dots$) primárním dějům, které článek nepropustil. Necht'

$$F_R(x/y, k)$$

je distribuční funkce prvního průchodu za předpokladu, že mezi ním a nultým průchodem došlo ke k nepropuštěným primárním dějům a že poslední z nich (k -tý) nastal v okamžiku $t = y$ ($0 < y < x$). Pak máme

$$F_R(x/y, k) = \int_0^{x-y} R(u) dF(u).$$

Značí-li $B_k(y)$ distribuční funkci k -tého nepropuštěného děje, pak

$$B_1(y) = \int_0^y [1 - R(u)] dF(u),$$

$$B_k(y) = \int_0^y B_{k-1}(y-u) dB_1(u)$$

pro $k = 1, 2, \dots$. Definujeme-li $B_0(y)$ formálně vztahy $B_0(y) = 0$ pro $y < 0$ a $B_0(y) = 1$ pro $y \geq 0$, obdržíme distribuční funkci proměnné η ve tvaru

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x \int_0^{x-y} R(u) dF(u) dB_k(y). \quad (42)$$

K výpočtu centrálních momentů je výhodné použít charakteristických funkcí. Zavedme označení

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{izu} dF(u),$$

$$\beta_k(z) = \int_0^{\infty} e^{izu} dB_k(u),$$

$$\gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{izu} dG(u).$$

Podle známé věty o involuci přechází vztah (42) ve vzorec

$$\beta_k(z) = \beta_1^k(z),$$

s jehož pomocí po krátké úpravě obdržíme

$$\gamma(z) = [\varphi(z) - \beta_1(z)] \sum_{k=0}^{\infty} \beta_1^k(z) = \frac{\varphi(z) - \beta_1(z)}{1 - \beta_1(z)}. \quad (43)$$

Distribuční funkce $G(x)$ proměnné η plyne z (43) inverzí. Pokud nám jde jen o asymptotické vzorce, není třeba znát $G(x)$ explicitně. Jestliže existují první dva centrální momenty proměnné η , pak je získáme ze známých vztahů

$$E(\eta) = \frac{1}{i} \left(\frac{d \log \gamma(z)}{dz} \right)_{z=0}, \quad D^2(\eta) = - \left(\frac{d^2 \log \gamma(z)}{dz^2} \right)_{z=0}. \quad (44)$$

Pro primární proces poissonovský s distribuční funkcí čekacích dob $\xi F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ a s distribuční funkcí mrtvé prodlevy $R(x)$ obdržíme

$$\gamma(z) = \frac{\int_0^{\infty} R(u) \alpha e^{-(\alpha - iz)u} du}{\int_0^{\infty} R(u) \alpha e^{-(\alpha - iz)u} du - \frac{iz}{\alpha - iz}},$$

odkud pomocí vzorců (44) najdeme

$$\mathbf{E}(\eta) = \frac{1}{\alpha \int_0^{\infty} R(u) \alpha e^{-\alpha u} du} \quad (45)$$

$$\mathbf{D}^2(\eta) = \frac{1 + 2 \int_0^{\infty} (1 - \alpha u) R(u) \alpha e^{-\alpha u} du}{(\alpha \int_0^{\infty} R(u) \alpha e^{-\alpha u} du)^2}. \quad (46)$$

Volíme-li kromě toho za distribuční funkci mrtvé prodlevy $R(x)$ jednoduchou jednostupňovou funkci danou vztahy

$$R(x) = 0 \quad \text{pro } x < c \quad \text{a} \quad R(x) = 1 \quad \text{pro } x \geq c,$$

přecházejí vzorce (45) a (46) v jednoduché a často citované vzorce (viz na př. [10] a [11])

$$\mathbf{E}(\eta) = \frac{1}{\alpha e^{-\alpha c}}, \quad \mathbf{D}^2(\eta) = \frac{1 - 2\alpha c e^{-\alpha c}}{(\alpha e^{-\alpha c})^2}. \quad (47)$$

Podle (27) je náhodová proměnná

$$\bar{\eta}_n = \frac{\alpha e^{-\alpha c} \cdot \eta_n - n}{\sqrt{n(1 - 2\alpha c e^{-\alpha c})}} \quad (48)$$

asymptoticky normální (0, 1) pro $n \rightarrow \infty$ a podle (31) je náhodová proměnná

$$\bar{v}_T = \frac{v_T - \alpha T e^{-\alpha c}}{\sqrt{\alpha T e^{-\alpha c} (1 - 2\alpha c e^{-\alpha c})}} \quad (49)$$

asymptoticky normální (0, 1) pro $n \rightarrow \infty$. Exaktní rozložení pro tyto jednoduché případy je uvedeno v práci [11].

Nejdůležitější rozdíl mezi filtračním článkem pracujícím podle schématu mrtvé prodlevy 1. typu a článkem pracujícím podle schématu mrtvé prodlevy 2. typu spočívá v jejich různém chování při zvětšující se intenzitě primárního procesu. Předpokládejme opět, že primární proces je poissonovský s intenzitou přechodu α . Pak ze vzorců (36) plyne, že pro schéma mrtvé prodlevy 1. typu při neomezeně rostoucím α platí

$$\mathbf{E}(\eta) \rightarrow \mathbf{E}(\tau), \quad \mathbf{D}^2(\eta) \rightarrow \mathbf{D}^2(\tau).$$

To znamená, že zvyšováním intenzity primárního procesu není možno přesáhnout určitou mez v intenzitě filtrovaných dějů a tato mez závisí na rozdělení mrtvé prodlevy. Článek je *nasyčen*. Jinak je tomu u schematu mrtvé prodlevy 2. typu. Předpokládáme-li, že funkce $R(x)$ je spojitá v bodě $x = 0$, což jedině má praktický význam, a protože pro $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\varepsilon} \alpha e^{-\alpha u} du = 1,$$

nahlédneme odtud snadno, že integrály ve výrazech (45) a (46) pro $\alpha \rightarrow \infty$ konvergují k nule, takže pro vzorce (45) a (46) máme

$$\mathbf{E}(\eta) \rightarrow +\infty, \quad \mathbf{D}^2(\eta) \rightarrow +\infty,$$

při čemž variační koeficient $\frac{\mathbf{D}(\eta)}{\mathbf{E}(\eta)}$ konverguje k jedné. Se stoupajícím α klesá tedy intenzita filtrovaných dějů a článek se počíná *zahlcovat*.

Schema mrtvé prodlevy 2. typu lze použít u takových detektorů resp. filtračních článků, které jsou schopny propustit primární děj jen tehdy, jestliže před příchodem primárního děje je článek v základním stavu. Tak na př. u některých detektorů (impulsní ionizační komora, proporcionální počítač) příchod ionizující částice do citlivého prostoru způsobí okamžité zvýšení potenciálu sběrné elektrody následkem sběru vytvořených iontů. Potenciál této elektrody klesá odváděním náboje přes pracovní odpor až na základní stav, nepříjde-li ovšem mezitím další částice. Jestliže je elektronická aparatura schopna zaznamenat primární děj jen tehdy, je-li potenciál sběrné elektrody na základní hodnotě během libovolně krátkého časového intervalu před tímto dějem, pak funkce aparatury může být popsána pomocí schematu mrtvé prodlevy 2. typu. Do této skupiny článků patří také elektromagnetické relé, jež zaregistruje primární děj představovaný proudovým impulsem jen tehdy, klesne-li proud ve vinutí na hodnotu, kdy kotva je v takové poloze, že může zachytit za ozubené kolečko.

Pomocí vzorců (34) a (42) je možno principiálně řešit filtraci primárního rozpadového procesu skrze několik článků, které pracují podle jednoho nebo druhého schematu, ovšem za předpokladu, že rozpadový proces je stacionární. Za primární proces pro každý článek se bere filtrovaný proces z předcházejícího článku. Ve skutečnosti se však dochází k tak komplikovaným výrazům, že výpočet je prakticky neproveditelný, nehledě na to, že parametry jednotlivých článků nebývají známy. Proto se obvykle předpokládá, že celá detekční a registrační aparatura může být nahrazena jedním nebo nanejvýše dvěma články pracujícími podle některého z uvedených schemat. Poněvadž v případě jednoduchého záříče je stacionární rozpadový proces procesem poissonovským, je možno použít jednoduchých vzorců (35) resp. (45), (46) jako vhodné

aproximace. Pak ovšem je třeba experimentálně zjistit nejvhodnější schéma filtrace. Rozhodnutí mezi schematem s mrtvou prodlevou 1. typu a schématem s mrtvou prodlevou 2. typu lze provést poměrně snadno; zvyšováním intenzity primárního procesu (tj. zvětšováním účinnosti registrace G_N nebo aktivity použitého zářiče) a sledováním čekacích dob je možno jedno z obou schémat *vyločit* jako nepřijatelné. Pro přesná měření je výhodné, má-li aparatura vestavěn speciální článek, jenž ji celou ovládá a vynucuje si předem určené jednoduché schéma funkce. Pak bývá možno použít vzorečů (41) nebo (48), (49).

5. POZADÍ DETEKTORU

V dosud probíraných zákonech rozdělení se předpokládalo, že primární děje jsou podmíněny pouze rozpady jader homogenního zářiče. Ve skutečnosti každý detektor v menší nebo větší míře zaznamenává děje pocházející i z jiných zdrojů (kosmické záření, radioaktivita okolí a samého detektoru, poruchy v jeho funkci atp.), které se k registrovaným dějům přičítají jako tzv. *pozadí*. Zkušenost ukazuje, že pozadí samo je možno považovat za Poissonův proces, pokud detektor správně pracuje a časové intervaly měření nejsou příliš dlouhé. Při proměrování zářiče je tedy proces detekce dán superposicí procesu vztahujícího se na zářič a procesu vztahujícího se na pozadí. Jestliže lze zanedbat relativní úbytek radioaktivních jader vzniklý rozpadem během měření, to znamená, že proces rozpadu je možno pokládat za poissonovský, pak při poissonovském pozadí je výsledný proces podle známých vět o součtu Poissonových náhodových proměnných rovněž poissonovský, a to zřejmě s intenzitou přechodu $\alpha' = N\lambda G + \alpha_P$, je-li α_P intenzita samotného pozadí. Formálně to znamená, že v předchozích vzorečích se parametr α nahradí parametrem $\alpha' = N\lambda G + \alpha_P$.

Jestliže během měření nelze zanedbat relativní úbytek aktivity zářiče, potom je úloha najít distribuční zákony proměnných v_T , resp. ξ_n složitější, neboť tu jde o superposici procesu *homogenního a nehomogenního*. Poměrně jednoduché řešení dostaneme, volíme-li za náhodovou proměnnou počet detekcí v_T v intervalu $(0, T)$ a můžeme-li zanedbat ztráty vzniklé nedokonalou rozlišovací schopností aparatury. V tomto případě je pak v_T součtem počtu detekcí pocházejících od zářiče a počtu detekcí pocházejících od pozadí, tedy

$$v_T = v_{TZ} + v_{TP},$$

příčemž index „Z“ se vztahuje na zářič a index „P“ na pozadí. Je-li počet detekcí jak od pozadí, tak i od zářiče dosti velký, jsou obě proměnné v_{TZ} a v_{TP} rozděleny asymptoticky normálně. Podle věty II. je v_{TZ} asymptoticky normální (μ, σ) , příčemž μ a σ^2 jsou dány vzoreci (14), a podle vzorece (25) je i proměnná v_{TP} asymptoticky normální, a to $(\alpha_P T, \sqrt{\alpha_P T})$. Poněvadž jsou pro-

měnné v_{TZ} a v_{TP} vzájemně nezávislé, je proměnná v_T asymptoticky normální, a to

$$(\mu + \alpha_P T, \sqrt{\sigma^2 + \alpha_P T}).$$

Distribuční funkce náhodové proměnné ξ_n je obecně dána vztahem

$$P\{v_t \geq n\} = P\{\xi_n < t\} = F_n(t),$$

který však vede k méně vhodnému řešení.

V tomto článku se předpokládalo, že parametry vyskytující se v distribučních zákonech jsou veličiny známé. Při skutečném měření jsou však neznámými, které je nutno odhadnout na základě hodnot, jichž v pokuse nabyly sledované náhodové proměnné.

Za cenné připomínky jsem zavázán dr. M. JIŘINOVÍ z Matematického ústavu ČSAV.

Literatura

- [1] *Albert G. E., Nelson L.*: Annals of Math. Statistics 24 (1953), 9.
- [2] *Bateman H.*: Phil. Mag. 20 (1910), 698.
- [3] *Bortkiewicz L.*: Die radioaktive Strahlung als Gegenstand wahrscheinlichkeitstheoretischer Untersuchungen, Berlin 1913.
- [4] *Campbell L. L.*: Canad. J. Phys. 34 (1956), 929.
- [5] *Cramér H.*: Mathematical Methods of Statistics, Princeton Mathematical Series, 1946.
- [6] *Domb C.*: Proc. Camb. Phil. Soc. 44 (1948), 335; 46 (1950), 429.
- [7] *Doob J. L.*: Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948), 422.
- [8] *Feller W.*: Trans. Amer. Math. Soc. 67 (1949), 98.
- [9] *Гнеденко Б. В.*: Курс теории вероятностей, Москва 1954 (2. vyd.).
- [10] *Hole N.*: Ark. mat. astron. fys. 33 A (1946), No. 11; 33 B (1947), No. 3; 34 B (1948), No. 20.
- [11] *Jost R.*: Helv. Phys. Acta 20 (1947), 173.
- [12] *Ruark A., Brammer F.*: Phys. Rev. 52 (1937), 322.
- [13] *Ruark J., Devol L.*: Phys. Rev. 49 (1935), 355.
- [14] *Takács L.*: Теория вероятностей и ее применения 1 (1956), 90.
- [15] *Takács L.*: Acta Math. Acad. Sci. Hung. VIII (1957), 127.
- [16] *Truksa L.*: Statistická dynamika, Praha 1956.

Резюме

СТАТИСТИКА СЧЕТА РАДИОАКТИВНОГО РАСПАДА

ВЛАДИМИР МАТОУШЕК (Vladimír Maťoušek)

(Поступило в редакцию 21/IV 1958 г.)

Методы измерения радиоактивности, основанные на регистрации отдельных ядерных превращений, — это, в сущности, опыты, тесно связан-

ные с некоторыми случайными переменными. По значениям, которые эти переменные принимают, можно получить оценку параметров, характеризующих данный излучатель. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы вывести законы распределения наиболее часто наблюдаемых случайных переменных — числа наблюдаемых импульсов в данном промежутке времени или времени, необходимого для осуществления заданного числа импульсов, т. е. времени ожидания — при условиях, которые по возможности близки настоящим условиям измерений.

После короткой заметки о законах распределения, имеющих место в случае распада отдельного радиоактивного ядра (отдел 1) и в случае однородного излучателя (отдел 2) разбирается в отделе 3 понятие эффективности счета. Условие одинаковой эффективности счета для каждого ядра, которое обычно ставится, в настоящей статье опускается как слишком ограничивающее. Оказывается, что самым удобным основанием, на которое можно опираться при выводе простых асимптотических распределений (теоремы I., II., III. и IV.), является общий биномический закон Пуассона, данный характеристической функцией (6). В этих распределениях выступает суммарная эффективность счета, определенная формулами (10) или же (12). В теоремах I. и III. исследуется стационарный случай распада, в то время как в теоремах II. и IV. учитывается понижение активности. Доказывается асимптотическая нормальность переменных (11), (13) и (20); для последней при условии ограниченного времени ожидания. Асимптотически нормальные переменные (22), (25) и (26) относятся к более простым случаям. Влияние несовершенства разрешающей способности устройства исследуется в отделе 4 для общего рекуррентного процесса. Рассматриваются две модели: схема случайного мертвого времени первого рода (мертвое время следует за каждой регистрацией) и схема случайного мертвого времени второго рода (мертвое время следует за каждым первичным процессом). Для обеих схем выведена общая функция распределения [(34) и (42)] времени ожидания между двумя следующими непосредственно друг за другом регистрациями. Для важного с практической точки зрения случая первичного пуассоновского процесса и постоянного мертвого времени подробно выведены соответствующие формулы как для числа наблюдаемых импульсов, так и для времени ожидания. В конце этого отдела отмечена разница между обеими схемами. Наконец, в отделе 5 имеется краткая заметка о фоне детектора.

Summary

THE STATISTICAL THEORY OF DETECTION OF RADIOACTIVE DISINTEGRATION

VLADIMÍR MATOUŠEK

(Received April 21st, 1958.)

The methods of measurement of radioactivity based on the counting of single nuclear disintegrations are essentially experiments connected with certain random variables; from their observed values parameters characterizing the given emitter are to be estimated. The purpose of this paper is to give the distribution laws of the most frequently used random variables — the number of counts in a given time interval or the waiting time for a given number of counts — under assumptions as close as possible to the real conditions of measurement.

After a brief account of the distribution laws concerning the decay of a single radioactive nucleus (section 1) and that of the homogeneous emitter (section 2), the concept of counting efficiency is discussed in section 3. The usual assumption of equal counting probability of each nucleus is dropped as unduly restrictive. It is shown that the generalized binomial distribution of Poisson as given by the characteristic function (6) provides a suitable basis for the derivation of simple asymptotic distributions (theorems **I.**, **II.**, **III.** and **IV.**) in which the total counting efficiency defined by the formulae (10) or (12) appears. In theorems **I.** and **III.** the stationary case is considered, and in **II.** and **IV.** the decrease of activity is taken into account. The variables (11), (13) and (20) are proved to be asymptotically normal; the last one under the assumption of bounded waiting time. The asymptotically normal variables (22), (25) and (26) correspond to simpler cases. The influence of imperfect resolving efficiency of the apparatus is treated in section 4 for the case of recurrent processes. Two models are considered: the model of random dead time of the first type (the dead period following after each registration) and of the second type (the dead period following after each primary event). For both models the general distribution function (34) and (42) of the waiting time between two subsequent registrations is derived. For the practically important case of the primary process of Poisson as well as for the case of the constant dead time, the corresponding formulae are given in full, both for the number of counts and for the waiting time. At the end of this section the chief difference between both models is pointed out. Finally in section 5, the background of the detector is briefly considered.