Aplikace matematiky

Otto Vejvoda

Заметка по поводу статьи Ладислава Пуста: Влияние свойств источника переменной силы на колебании механической системы

Aplikace matematiky, Vol. 3 (1958), No. 6, 451–460

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102637

ЗАМЕТКА ПО ПОВОДУ СТАТЬИ ЛАДИСЛАВА ПУСТА: ВЛИЯНИЕ СВОЙСТВ ИСТОЧНИКА ПЕРЕМЕННОЙ СИЛЫ НА КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

ОТТО ВЕЙВОДА (Otto Vejvoda)

DT: 621.8-752 : 531.391 : 517.933

(Поступило в редакцию 26/III 1958 г.)

В заметке исследуется существование и устойчивость установившегося решения (в виде периодического решения 2-го рода) системы (1).

В предыдущей статье Л. Пуст, решая систему

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x &= -\varepsilon\delta\dot{x} + \varepsilon\varkappa\cos\varphi\,, \\ \ddot{\varphi} &= \varepsilon(\mu_0 - \mu_1\dot{\varphi}) + \varepsilon^2\varkappa\varrho\sin\varphi\,(\cos\varphi - x) \end{aligned} \tag{1}$$

[т. е. систему (6) его работы с немного иными обозначениями и с введенной там же специализацией (7)], в которую он вводит еще новую переменную ϑ подстановкой $\vartheta = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$, применяет метод асимптотических разложений. Однако, ни в случае образованной таким способом системы дифференциальных уравнений (т. е. системы (9) по обозначению Л. Пуста), ни в случае системы (1) не доказано существование решения в виде асимптотического разложения, а также неизвестны точные методы исследования такого решения на устойчивость.

В подготовляемой работе, которая будет напечатана в другом журнале, я показываю, что все-таки можно доказать, что существует установившееся решение не только для системы (1), но и для более общих систем, и что это решение может быть даже представлено в виде сходящихся рядов в ε (для достаточно малых ε). Таким образом, приближенные решения, найденные как первые члены „асимптотических разложений" являются, по существу, первыми членами этих сходящихся разложений; этим обстоятельством в значительной мере объясняется их хорошее совпадение с экспериментальными данными.

В настоящей заметке я приведу только наиболее важные результаты и намечу, каким образом можно их получить.

Результаты, полученные методом „асимптотических рядов" и физическое значение величин x и φ наталкивают нас на мысль искать установившееся решение системы (1) в виде

$$x = x(t, \varepsilon)\,, \quad \varphi(t, \varepsilon) = \omega(\varepsilon)\, t + \varepsilon F(t, \varepsilon)\,, \quad F(0, \varepsilon) = 0\,, \tag{2}$$

где $x(t, \varepsilon)$ и $F(t, \varepsilon)$ — периодические по t функции с периодом

$$T(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\omega(\varepsilon)}\,.$$

Введем новое время подстановкой

$$\vartheta = \omega(\varepsilon)\, t$$

и положим

$$x\left(\frac{1}{\omega}\,\vartheta, \varepsilon\right) = \xi(\vartheta, \varepsilon)\,, \quad F\left(\frac{1}{\omega}\,\vartheta, \varepsilon\right) = \Phi(\vartheta, \varepsilon)\,, \tag{2'}$$

так что будет

$$\tilde{\varphi}(\vartheta) = \varphi\left(\frac{1}{\omega}\,\vartheta\right) = \vartheta + \varepsilon\Phi(\vartheta, \varepsilon)\,.$$

Функции ξ и Φ, а также функции η и Ψ, введенные подстановкой

$$\xi' = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\vartheta} = -\frac{1}{\omega}\,\eta\,, \quad \Phi' = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\vartheta} = \Psi\,, \tag{2}$$

являются периодическими по ϑ функциями с периодом 2π.

Теперь можем дать следующую формулировку нашей задачи. Требуется найти 2π-периодическое решение системы

$$\begin{aligned}
\xi' &= -\frac{1}{\omega}\,\eta\,,\\
\eta' &= \frac{1}{\omega}\,[\xi - \varepsilon\delta\eta - \varepsilon\varkappa\cos(\vartheta + \varepsilon\Phi)]\,,\\
\Psi' &= \frac{1}{\omega^2}\,\{\mu_0 - \mu_1\omega(1 + \varepsilon\Psi) + \varepsilon\varkappa\varrho\sin(\vartheta + \varepsilon\Phi)[\cos(\vartheta + \varepsilon\Phi) - \xi]\}\,,\\
\Phi' &= \Psi\,,
\end{aligned} \tag{3}$$

(правые части которой также, очевидно, являются 2π-периодическими функциями по ϑ), для которого $\Phi(0, \varepsilon) = 0$.

Естественно требовать, чтобы периодическое решение системы (3) при $\varepsilon = 0$ превратилось в периодическое решение системы

$$\begin{aligned}
\xi_0' &= -\frac{1}{\omega_0}\,\eta_0\,, & \eta_0' &= \frac{1}{\omega_0}\,\xi_0\,,\\
\Psi_0' &= \mu_0 - \mu_1\omega_0\,, & \Phi_0' &= \Psi_0\,,
\end{aligned} \tag{4}$$

где $\xi_0(\vartheta) = \xi(\vartheta, 0)$ и т. д., $\omega_0 = \omega(0)$. Система (4) имеет периодическое решение тогда и только тогда, если

$$\mu_0 - \mu_1\omega_0 = 0\,. \tag{5}$$

Предположим, что (5) имеет положительный корень $\omega_0 = \frac{\mu_0}{\mu_1} > 0$ и далее, что $\omega(\varepsilon)$ можно писать в виде

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\Omega(\varepsilon)\,. \tag{6}$$

Подставляя соотношение (6) в (3), получим систему

$$\begin{aligned}
\xi' &= -\frac{1}{\omega_0}\,\eta + \varepsilon\,\frac{\Omega}{\omega\omega_0}\,\eta\,,\\
\eta' &= \frac{1}{\omega_0}\,\xi - \frac{\varepsilon}{\omega}\left[\frac{\Omega}{\omega_0}\,\xi + \delta\eta + \varkappa\cos(\vartheta + \varepsilon\Phi)\right],\\
\Psi' &= \frac{\varepsilon}{\omega^2}\{-\mu_1[\omega_0\Psi + \Omega(1 + \varepsilon\Psi)] + \varkappa\varrho\sin(\vartheta + \varepsilon\Phi)[\cos(\vartheta + \varepsilon\Phi) - \xi]\}\,,\\
\Phi' &= \Psi\,,
\end{aligned} \tag{3'}$$

которая уже имеет обычный вид квазилинейной системы.

Обозначим возмущающие члены (т. е. члены, содержащие ε) в правых частях уравнений системы (3′), вынеся прежде ε за скобки, через f_j ($j = 1, 2, 3, 4$) и положим

$$\zeta = \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix},\quad Z = \begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix},\quad \chi = \begin{pmatrix}\Psi\\ \Phi\end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix}f_3\\ f_4\end{pmatrix},$$
$$S = \begin{pmatrix}0 & -\dfrac{1}{\omega_0}\\ \dfrac{1}{\omega_0} & 0\end{pmatrix},\quad T = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad E = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{*}$$

Имеют место соотношения

$$e^{\vartheta S} = \begin{pmatrix}\cos\dfrac{1}{\omega_0}\vartheta & -\sin\dfrac{1}{\omega_0}\vartheta\\ \sin\dfrac{1}{\omega_0}\vartheta & \cos\dfrac{1}{\omega_0}\vartheta\end{pmatrix},\quad e^{\vartheta T} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ \vartheta & 1\end{pmatrix}.$$

Тогда, как известно по мётоду вариации постоянного, каждое решение системы (3′), удовлетворяющее начальным условиям $\zeta(0, \varepsilon)$ и $\chi(0, \varepsilon)$, удовлетворяет системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned}
\zeta(\vartheta, \varepsilon) &= e^{\vartheta S}\zeta(0, \varepsilon) + \varepsilon\int_0^{\vartheta} e^{(\vartheta-\sigma)S}Z(\sigma, \zeta, \chi, \varepsilon)\,\mathrm{d}\sigma\,,\\
\chi(\vartheta, \varepsilon) &= e^{\vartheta T}\chi(0, \varepsilon) + \varepsilon\int_0^{\vartheta} e^{(\vartheta-\sigma)T}X(\sigma, \zeta, \chi, \varepsilon)\,\mathrm{d}\sigma\,,
\end{aligned} \tag{3''}$$

и наоборот, каждое решение системы (3″) удовлетворяет системе (3′) при начальных условиях $\zeta(0, \varepsilon)$ и $\chi(0, \varepsilon)$.

Для того, чтобы решение системы (3″) (следовательно, также и системы (3′)) было периодическим с периодом 2π, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned}
&(e^{2\pi S} - E)\,\zeta(0, \varepsilon) + \varepsilon\int_0^{2\pi} e^{(2\pi-\sigma)S} Z(\sigma, \zeta, \chi, \varepsilon)\,\mathrm{d}\sigma = 0\,,\\
&(e^{2\pi T} - E)\,\chi(0, \varepsilon) + \varepsilon\int_0^{2\pi} e^{(2\pi-\sigma)T} X(\sigma, \zeta, \chi, \varepsilon)\,\mathrm{d}\sigma = 0\,.
\end{aligned} \tag{7}$$

К удовлетворению этих уравнений имеем в распоряжении неизвестные $\xi(0, \varepsilon)$, $\eta(0, \varepsilon)$, $\Phi(0, \varepsilon)$ и $\Omega(\varepsilon)$.

При исследовании системы (7) мы должны различать два случая:

1. $\omega_0 \neq \dfrac{1}{n}$, n — натуральное (нерезонансный случай);

2. $\omega_0 = \dfrac{1}{n}$, n — натуральное (резонансный случай). По чисто практическим соображениям — чтобы найденные разложения достаточно быстро сходились — полезно не делать различия между этим случаем и случаем, когда ω_0 отличается от $\dfrac{1}{n}$ на величину порядка ε, так что $\omega_0 = \dfrac{1}{n} + \varepsilon a$. Конечно, в таком случае целесообразно в (3′) объединить член εa с Ω и положить $\tilde{\omega}_0 = \dfrac{1}{n}$ и $\tilde{\Omega} = \Omega + \varepsilon a$ (волнообразные пометки будем в дальнейшем опускать).

В нерезонансном случае $|e^{2\pi S} - E| \neq 0$. Напротив, $e^{2\pi T} - E = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 2\pi & 0\end{pmatrix}$. Отсюда следует, что третье уравнение системы (7) можем заменить уравнением

$$\int_0^{2\pi}\{-\mu_1[\omega_0\Psi + \Omega(1 + \varepsilon\Psi)] + \varkappa\varrho\sin(\sigma + \varepsilon\Phi)\,[\cos(\sigma + \varepsilon\Phi) - \xi]\}\,\mathrm{d}\sigma = 0\,. \tag{8}$$

Из этого уравнения и из остающихся трех уравнений системы (7), полагая в них $\varepsilon = 0$, получим (используя то обстоятельство, что на основании (3″) $\xi(\vartheta, 0) = \eta(\vartheta, 0) = \Psi(\vartheta, 0) \equiv 0$, как только $\xi(0, 0) = \eta(0, 0) = \psi(0, 0) = 0$),

$$\xi(\vartheta, 0) = \eta(\vartheta, 0) = \Psi(\vartheta, 0) = \Omega(0) = 0\,. \tag{9}$$

Так как функциональный определитель рассматриваемой системы в точке (9) равен $|e^{2\pi S} - E|\,.\,2\pi.\,(-2\pi\mu_1)$ и, следовательно, для $\mu_1 \neq 0$ (что предполагаем выполненным) отличен от нуля, система (7) имеет в силу известной теоремы о неявных функциях решение $\xi(0, \varepsilon)$, $\eta(0, \varepsilon)$, $\Psi(0, \varepsilon)$ и $\Omega(\varepsilon)$, представимое в виде степенных рядов от ε, сходящихся для достаточно малых ε.

В резонансном случае, конечно, будет

$$e^{2\pi S} - E = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Следовательно, два первых уравнения системы можем заменить уравнениями

$$\int_0^{2\pi} e^{-\sigma S} Z(\sigma, \zeta, \chi, \varepsilon)\,\mathrm{d}\sigma = 0\,. \tag{10}$$

Подставляя в 4-ое уравнение системы (7) и в уравнения (8) и (10) $\varepsilon = 0$ и [с учетом (3″)]

$$\xi(\vartheta, 0) = \xi(0, 0)\cos n\vartheta - \eta(0, 0)\sin n\vartheta\,,$$

$$\eta(\vartheta, 0) = \xi(0, 0)\sin n\vartheta + \eta(0, 0)\cos n\vartheta\,,$$

получим после преобразования ($\Omega_0 = \Omega(0)$)

$$\Psi(0, 0) = 0\,,$$

$$\mu_1\Omega_0 - \frac{1}{2}\varkappa\varrho\eta(0, 0)\,\delta_{n1} = 0\,,$$

$$\frac{1}{2}\,\delta\xi(0, 0) - \frac{1}{\omega_0}\,\Omega_0\,\eta(0, 0) = 0\,,$$

$$\frac{1}{\omega_0}\,\Omega_0\xi(0, 0) + \frac{1}{2}\,\delta\eta(0, 0) + \frac{1}{2}\,\varkappa\delta_{n1} = 0\,,$$

где $\delta_{n1} = 1$ для $n = 1$ и $\delta_{n1} = 0$ для $n \neq 1$.

Если $n \neq 1$, то отсюда непосредственно получаем

$$\xi(0, 0) = \eta(0, 0) = \Psi(0, 0) = \Omega_0 = 0\,.$$

Функциональный определитель исследуемой системы в случае этого решения отличен от нуля.

Если $n = 1$, то $\omega_0 = 1$ и

$$\Psi(0, 0) = 0\,, \quad \xi(0, 0) = -\frac{1}{2}\,\varkappa\,\Omega_0\left[\frac{1}{4}\,\delta^2 + \Omega_0^2\right]^{-1},$$

$$\eta(0, 0) = -\frac{1}{4}\,\delta\varkappa\left[\frac{1}{4}\,\delta^2 + \Omega_0^2\right]^{-1},$$

причем Ω_0 удовлетворяет кубическому уравнению

$$u^3 + \frac{1}{4}\,\delta^2 u + \frac{1}{8\mu_1}\,\delta\varkappa^2\varrho = 0\,,$$

имеющему, в силу известной теоремы алгебры, только один действительный корень. Легко проверим, что и в этом случае функциональный определитель для найденного решения отличен от нуля и, что, следовательно, опять для достаточно малых ε существует аналитическое решение $\xi(0, \varepsilon), \ldots$ и т. д. системы (7).

Подставляя найденное решение $\xi(0, \varepsilon), \ldots$ и т. д. в систему (3″) (или же решая систему (3′) с этими начальными условиями) и решая ее (это решение для достаточно малых ε на отрезке $\langle 0, T\rangle$ всегда существует и является аналитическим в ε), получим искомое 2π-периодическое решение системы (3), а после обратного преобразования времени $\vartheta = \omega(\varepsilon)\, t$ и подстановки во второе равенство из (2) получим также и решение системы (1) в искомом виде.

Выведенные до сих пор результаты можем высказать в теореме:

Теорема 1. *Если $\mu_0 \neq 0 \neq \mu_1$, то система (1) всегда имеет решение $x = x(t, \varepsilon)$, $\varphi = \omega(\varepsilon)\, t + \varepsilon F(t, \varepsilon)$ где $x(t, \varepsilon)$ и $F(t, \varepsilon)$ — периодические по t функции с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega(\varepsilon)}$. При этом в нерезонансном случае, а в резонансном при $n > 1$, величина амплитуд колебаний функции $x(t, \varepsilon)$ имеет порядок ε, а величина амплитуд возмущений функции $\varphi(t)$ — порядок ε^2.*

Теперь займемся устойчивостью полученных решений. Как известно, периодическое решение системы (1) не может быть асимптотически устойчивым. Это утверждение имеет место и для решения типа (2). Но оно может быть орбитально асимптотически устойчивым. О том, когда исследуемое решение может быть орбитально асимптотически устойчивым, говорит следующая модифицированная теорема Андронова-Витта (ее доказательство приведено в подготовляемой работе автора):

Теорема 2. *Пусть система*

$$\dot{x}_j = F_j(x_1, \ldots, x_n)\,, \quad (j = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{10}$$

правые части которой являются 2π-периодическими функциями по x_1, имеет решение вида

$$x_1 = \varphi_1(t) = \omega t + \psi(t)\,, \quad x_j = \varphi_j(t)\,, \quad (j = 2, \ldots, n)\,,$$

где функции ψ, φ_j $(j = 2, \ldots, n)$ — T-периодические, причем $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Пусть функции F_j обладают непрерывными частными производными первого порядка в окрестности решения $x_j = \varphi_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Уравнения в вариациях

$$\dot{y}_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\, y_k$$

имеют в таком случае T-периодические коэффициенты; пусть $n - 1$ характеристический показатель этой системы имеет отрицательные действительные части (остающийся характеристический показатель необходимо равен нулю).

Тогда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что как только произвольное решение $x(t)$ системы (10) удовлетворяет неравенству $\|x(t_1) - \varphi(t_0)\| < \varepsilon$ для некоторых t_1 и t_0, то существует число c такое, что

$$\lim_{t\to\infty} (x(t) - \varphi(t + c)) = 0\,.$$

(Это значит не только то, что решение $\varphi(t)$ является орбитально асимптотически устойчивым, но даже, что каждое решение, достаточно близкое к нему, имеет асимптотическое фазовое опоздание.)

Роль переменной x_1, выступающей в этой теореме, играет в системе (1) переменная φ. Система в вариациях имеет в нашем случае вид

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= -u_2 ,\\
\dot{u}_2 &= u_1 - \varepsilon\delta u_2 - \varepsilon\varkappa \sin\bar{\varphi} u_4 ,\\
\dot{u}_3 &= -\varepsilon\mu_1 u_3 + \varepsilon^2\varkappa\varrho(\cos 2\bar{\varphi} - \bar{x}\cos\bar{\varphi})\, u_4 - \varepsilon^2\varkappa\varrho \sin\bar{\varphi} u_1 ,\\
\dot{u}_4 &= u_3 ,
\end{aligned}$$

где $\bar{x}(t)$ и $\bar{\varphi}(t)$ — рассматриваемые решения.

При помощи некоторого из известных методов для приближенного вычисления характеристических показателей можем легко проверить, что на основании теоремы 2 справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Решение системы* (1) *вида* (2) *является для достаточно малых* ε *асимптотически орбитально устойчивым если*

$$\delta > 0 \text{ и } \mu_1 > 0 \tag{11}$$

в нерезонансном случае и в резонансном случае при $n > 1$, *и если*

$$0 < \delta + \mu_1, \qquad 0 < -\tfrac{1}{4}\mu_1\varkappa\varrho\Omega_0(\Omega_0^2 + \tfrac{1}{4}\delta^2)^{-1} + \delta(\Omega_0^2 + \tfrac{1}{4}\delta^2) + \delta\mu_1(\delta + \mu_1) , \tag{12$_1$}$$

$$\delta\varkappa^2\varrho\Omega_0 < \mu_1(\Omega_0^2 + \tfrac{1}{4}\delta^2) \tag{12$_2$}$$

в резонансном случае при $n = 1$.

(Это значит, что в первоначальной технической формулировке ($\delta > 0$, $\varkappa > 0$, $\mu_1 > 0$, $\varepsilon > 0$ и, следовательно, $\Omega_0 < 0$ эти условия всегда выполнены. Мы можем легко убедиться в том, что условие (12_2) эквивалентно условию (40) из работы Ладислава Пуста.)

Souhrn

POZNÁMKA K ČLÁNKU LADISLAVA PŮSTA: VLIV VLASTNOSTÍ ZDROJE STŘÍDAVÉ SÍLY NA KMITÁNÍ MECHANICKÉHO SYSTÉMU

OTTO VEJVODA

(Došlo dne 26. března 1958.)

V poznámce je vyšetřována existence ustáleného řešení soustavy (1), v níž δ, $\varkappa$, ϱ, μ_0 a μ_1 jsou konstanty (v původní technické interpretaci vesměs kladné) a ε je malý parametr. Ustálené řešení hledáme ve tvaru (2), kde $x(t, \varepsilon)$ a $F(t, \varepsilon)$ jsou periodické funkce s periodou $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Proveďme substituci $\vartheta = \omega t$ a zaveďme označení (2′) a (2″); pak pro funkce ξ, η, Ψ a Φ, jež mají být v ϑ 2π-periodické, dostaneme soustavu (3), jejíž pravé strany jsou 2π-periodické v ϑ.

Z podmínky, aby se ξ, η, Ψ a Φ pro $\mu \to 0$ blížily 2π-periodickému řešení, dostaneme především rovnici (5), která určuje prvé přiblížení úhlové rychlosti motoru ω_0.

Předpokládejme, že ω lze psát ve tvaru (6). Po dosazení (6) do (3) dostaneme (3′). Při označení (*) jsou podmínky nutné a postačující k tomu, aby ξ, η, Ψ a Φ byly 2π-periodické, dány rovnicemi (7). Těmito podmínkami jsou určeny počáteční hodnoty $\xi(0, \varepsilon)$, $\eta(0, \varepsilon)$, $\Psi(0, \varepsilon)$ a oprava úhlové rychlosti motoru $\Omega(\varepsilon)$ (počáteční podmínka $\Phi(0, \varepsilon) = 0$).

Při vyšetřování soustavy (7) musíme rozlišovat dva případy: 1. $\omega_0 \neq \frac{1}{n}$ (n přirozené, neresonanční případ) a 2. $\omega_0 = \frac{1}{n}$ (n přirozené, resonanční případ). Po snadných výpočtech dostaneme tuto větu:

Věta 1. *Jestliže $\mu_0 \neq 0 \neq \mu_1$, má soustava* (1) *vždy řešení tvaru* (2), *kde x a F jsou v t periodické s periodou $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Přitom v neresonančním případě a v resonančním pro $n > 1$ je velikost amplitud kmitů funkce x řádu ε a periodických poruch funkce φ řádu ε^2.*

K vyšetření stability nalezených řešení se užívá věty 2 (modifikované věty Andronov-Vittovy). Na základě této věty se snadno přesvědčíme pomocí některé známé metody pro přibližný výpočet charakteristických exponentů, že platí tato věta:

Věta 3. *Řešení soustavy* (1) *tvaru* (2) *je pro dostatečně malá ε asymptoticky orbitálně stabilní, jsou-li v případě neresonančním i resonančním pro $n > 1$ splněny podmínky* (11) *a v případě resonančním pro $n = 1$ podmínky* (12). *(V původní technické formulaci jsou tyto podmínky vždy splněny. Podmínka* (12_2) *je ekvivalentní s Půstovo podmínkou* (40)*).*

Zusammenfassung

EINE BEMERKUNG ZU DEM ARTIKEL VON LADISLAV PŮST: WIRKUNG DER EIGENSCHAFTEN DES WECHSELKRAFTERREGERS AUF DIE SCHWINGUNGEN EINES MECHANISCHEN SYSTEMS

OTTO VEJVODA

(Eingegangen am 26. März 1958.)

In der Bemerkung wird die Existenz einer stationären Lösung des Systems (1) untersucht, wobei δ, $\varkappa$, ϱ, μ_0 und μ_1 Konstanten sind (in der technischen Interpretation durchwegs positiv) und ε ein kleiner Parameter. Die stationäre Lösung suchen wir in der Form (2), wo $x(t, \varepsilon)$ und $F(t, \varepsilon)$ periodische Funktionen mit der Periode $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ sind.

Führen wir die Substitution $\vartheta = \omega t$ und die Bezeichnung (2′) und (2″) ein, dann erhalten wir für die Funktionen ξ, η, Ψ und Φ, die in ϑ die Periode 2π haben sollen, ein System (3), dessen rechte Seiten Funktionen mit der Periode 2π in ϑ sind.

Aus der Bedingung, dass sich die Funktionen ξ, η, Ψ und Φ für $\mu \to 0$ der Lösung mit der Periode 2π nähern, erhalten wir die Gleichung (5), welche die erste Annäherung der Winkelgeschwindigkeit des Motors ω_0 angibt.

Setzen wir voraus, dass sich ω in der Form von (6) schreiben lässt. Nach dem Einsetzen von (6) in (3) erhalten wir (3′). Bei der Bezeichnung (*) sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen durch die Gleichungen (7) dazu gegeben, dass die Funktionen ξ, η, Ψ und Φ Funktionen mit der Periode 2π sind. Durch diese Bedingungen sind die Anfangswerte $\xi(0, \varepsilon)$, $\eta(0, \varepsilon)$, $\Psi(0, \varepsilon)$ und die Verbesserung der Winkelgeschwindigkeit des Motors $\Omega(\varepsilon)$ gegeben. (Die Anfangsbedingung $\Phi(0, \varepsilon) = 0$.)

Bei der Untersuchung des Systems (7) müssen wir zwei Fälle unterscheiden: 1. $\omega_0 \neq \dfrac{1}{n}$ (n — eine natürliche Zahl, der nicht resonante Fall), 2. $\omega_0 = \dfrac{1}{n}$ (n — eine natürliche Zahl, Resonanz).

Nach einfachen Berechnungen erhalten wir folgenden Satz:

Satz 1. *Wenn $\mu_0 \neq 0 \neq \mu_1$ ist, so hat das System* (1) *immer eine Lösung in der Form von* (2), *wo x und F in t periodisch mit der Periode $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ sind. Dabei ist im nicht resonantem Fall und im Resonanzfall für $n > 1$ die Grösse der Amplitudenschwingungen der Funktion x vom Grad ε und der periodischen Störungen der Funktion φ vom Grad ε^2.*

Zur Untersuchung der Stabilität der gefundenen Lösungen wird der Satz 2 benützt. (Eine Modifikation des Satzes von Andronov — Vitt.) Auf Grund dieses Satzes können wir uns leicht mit Hilfe eines bekannten Satzes für die angenäherte Berechnung der charakteristischen Exponenten überzeugen, dass folgender Satz gilt:

Satz 3. *Die Lösung des Systems* (1) *in der Form von* (2) *ist für genügend kleine ε asymptotisch orbital stabil, wenn im nicht resonanten Falle sowie im Resonanzfall für $n > 1$ die Bedigungen* (11) *und im Resonanzfall für $n = 1$ die Bedigungen* (12) *erfüllt sind. (In der ursprünglichen technischen Formulierung sind diese Bedingungen immer erfüllt. Man kann sich leicht überzeugen, dass die Bedingung* (12_2) *mit der Bedingung* (40) *von Půst äkvivalent ist.)*