Aplikace matematiky

Vladimír Klega; Jiří Seitz

Test přesnosti seřízení automatického třídiče

Aplikace matematiky, Vol. 3 (1958), No. 2, 124–140

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102610

SVAZEK 3 (1958) APLIKACE MATEMATIKY ČÍSLO 2

TEST PŘESNOSTI SEŘÍZENÍ AUTOMATICKÉHO TŘÍDIČE

VLADIMÍR KLEGA, JIŘÍ SEITZ

(Došlo dne 14. května 1957.) DT:681.18:519.24

V článku je sestrojen test přesnosti seřízení automatického třídiče, který je založen na třídění souboru součástí rektangulárního typu s dostatečně velkým parametrem δ a na náhodném výběru malého rozsahu vzatém z jedné skupiny třídiče. Je odvozena distribuční funkce navržené výběrové charakteristiky, na jejímž základě jsou napočteny kritické hodnoty testu v_ε pro rozsahy výběru $n = 3, 4, \ldots, 10$, hladiny významnosti $\varepsilon = 0{,}05$ a $0{,}01$ a normovanou směrodatnou odchylku třídění $\sigma = 0{,}05\ (0{,}05)\ 0{,}3$.

1. Úvod

Jedním z přístrojů plně automatisujících kontrolní operaci je automatický třídič, který změří součást a podle hodnoty měřeného rozměru ji vytřídí do příslušné skupiny. S rychlým vývojem celé řady automatických třídičů vznikla otázka zjištění jejich přesnosti třídění a seřízení. Poněvadž mezní chybu třídění resp. směrodatnou odchylku třídění lze považovat prakticky za konstantní (dokonce spíše než u měřicího přístroje, poněvadž odpadá osobní chyba), postačí jejich spolehlivý odhad (viz [4]) k bezpečnému zjištění přesnosti třídění automatického třídiče.

Zůstává tedy hlavním problémem rychlá kontrola přesnosti seřízení. Jak vyplývá z praxe, dochází k novému seřízení i několikrát za směnu, takže s ohledem na vysokou přesnost třídění je jeho kontrola velmi důležitá. V tomto článku je navržen test přesnosti seřízení automatického třídiče, který je založen na náhodném výběru z jedné skupiny třídiče. Jeho jednoduchá forma a napočtená tabulka kritických hodnot umožňuje rychlou kontrolu přesnosti seřízení.

Autorem odstavců 2—5 tohoto článku je V. Klega a autorem odstavce 6 J. Seitz.

2. Test přesnosti seřízení automatického třídiče

Při třídění součástí do skupin podle rozměru je kladen požadavek, aby součást vytříděná do určité skupiny (označme ji Γ) měla tříděný rozměr η mezi rozměry γ_1 a γ_2 ($\gamma_1 < \gamma_2$). Poněvadž však dochází v měřicím prostoru třídiče k chybě třídění ξ, je ve skutečnosti do skupiny Γ součást tříděna podle rozměru

$$\varrho = \eta + \zeta ,$$

takže tato skupina obsahuje součásti, pro které platí

$$\gamma_1 < \eta + \zeta < \gamma_2 . \tag{1}$$

Ze zkušenosti víme, že chyba třídění ζ má normální rozdělení $N(\alpha_1, \sigma_1^2)$, kde α_1 je systematická chyba třídění a σ_1 směrodatná odchylka třídění. Test přesnosti seřízení automatického třídiče tedy založíme na testování hypotézy H_0, že $\alpha_1 = 0$, t. j. že třídič je správně seřízen.

Třídič zařadí tříděnou součást do skupiny Γ, je-li $\gamma_1 < \varrho = \eta + \zeta < \gamma_2$, avšak hodnoty ζ a ϱ přístroj nezaznamenává, takže test nemůžeme založit ani na pozorování hodnot ζ ani na pozorování hodnot ϱ. Proto k testování uvedené hypotézy použijeme podmíněného rozdělení $g_\eta(y \mid E)$ tříděného rozměru η, kde jev E je dán vztahem (1). Aby podmínky třídění byly ve všech skupinách třídiče stejné, je nejvhodnější za soubor součástí, které budeme třídit, zvolit soubor (který označme S), jehož modelem je vzhledem k tříděnému rozměru η rektangulární rozdělení $R(-\delta, \delta)$. Parametr δ pak zvolíme tak, aby soubor pokryl všechny skupiny třídiče, t. j. obecně je δ dostatečně velké.

Každou součást zařazenou do souboru S označíme jejím tříděným rozměrem. Po vytřídění souboru S dostaneme pak ve skupině Γ nový soubor označených součástí, třeba S*. Za model tohoto souboru lze pak považovat rozdělení $g_\eta(y \mid E)$, dané vztahem (3).

Jestliže je automatický třídič správně seřízen, potom systematická chyba třídění $\alpha_1 = 0$, takže soubor S* bude symetricky rozdělen kolem středu skupiny Γ, t. j. $\gamma = \dfrac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$, což ihned plyne z (3). Tato vlastnost souboru S* nás zcela přirozeně vede k tomuto postupu: Test přesnosti seřízení automatického třídiče založíme na náhodném výběru n součástí ($s_1, s_2, \ldots, s_n$) ze souboru S*. U součástí $s_1, s_2, \ldots, s_n$ známe jejich tříděné rozměry $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Při testování použijeme náhodnou proměnnou v, která, jsou-li vybrány součásti $s_1, s_2, \ldots, s_n$, nabude hodnoty

$$v = \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k - \gamma}{\gamma_2 - \gamma_1} . \tag{2}$$

Hypotézu H_0 zamítneme, když

$$|v| > v_\varepsilon$$

a to s pravděpodobností

$$\varepsilon = \mathbf{P}(|v| > v_\varepsilon) = 2\int_{v_\varepsilon}^{\infty} f_n(v)\, \mathrm{d}v ,$$

kde $f_n(v \mid H_0)$ je rozdělení výběrové charakteristiky v. „Symetričnost" testu je umožněna tím, že rozdělení $f_n(v \mid H_0)$ je symetrické kolem nuly.

V tab. 1 jsou uvedeny hodnoty v_ε pro $\varepsilon = 0{,}01$ a $0{,}05$, $n = 3, 4, \ldots, 10, 15, 20$ a „normovanou" směrodatnou odchylku třídění $\sigma = \dfrac{\sigma_1}{\gamma_2 - \gamma_1} = 0{,}05\ (0{,}05)\ 03$.

Tabulka 1.

Kritické hodnoty v_ε

σ	ε	n									
		3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
0,10	0,01	0,428	0,378	0,341	0,313	0,291	0,273	0,258	0,245	0,201	0,175
	0,05	0,342	0,297	0,266	0,243	0,225	0,211	0,199	0,189	0,154	0,134
0,15	0,01	0,463	0,406	0,366	0,335	0,311	0,292	0,276	0,262	0,215	0,186
	0,05	0,364	0,316	0,284	0,259	0,240	0,225	0,212	0,201	0,164	0,142
0,20	0,01	0,506	0,442	0,397	0,364	0,338	0,316	0,299	0,284	0,232	0,201
	0,05	0,394	0,342	0,306	0,280	0,259	0,243	0,229	0,217	0,178	0,154
0,25	0,01	0,556	0,484	0,434	0,397	0,369	0,345	0,326	0,309	0,253	0,219
	0,05	0,430	0,373	0,334	0,305	0,282	0,264	0,249	0,236	0,193	0,167
0,30	0,01	0,611	0,531	0,476	0,435	0,403	0,377	0,356	0,338	0,276	0,240
	0,05	0,470	0,407	0,364	0,333	0,308	0,288	0,272	0,258	0,211	0,182

3. Model souboru S*

Nyní odvodíme tvar rozdělení $g_\eta(y \mid E)$. Uvažujme nezávislé spojité náhodné proměnné η a ζ, které mají rozdělení $g_1(y)$ a $g_2(z)$. Označme jev (1) znakem E (γ_1 a γ_2 jsou konečná reálná čísla). Potom podmíněné rozdělení $g_\eta(y|E)$ má tvar

$$g_\eta(y \mid E) = \frac{g_1(y) \int_{\gamma_1 - y}^{\gamma_2 - y} g_2(z)\, dz}{\int g_1(y) \left[\int_{\gamma_1 - y}^{\gamma_2 - y} g_2(z)\, dz \right] dy},$$

což plyne z Bayesova vzorce při podmínce (1), neboť

$$\mathbf{P}(E \mid y) = \mathbf{P}(\gamma_1 - y < \zeta < \gamma_2 - y)\,.$$

Za předpokladu, že $g_1(y)$ resp. $g_2(z)$ jsou rozdělení $R(-\delta, \delta)$ resp. $N(\alpha_1, \sigma_1^2)$ je

$$g_\eta(y \mid E) = \frac{\int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} e^{-\frac{(r-y-\alpha_1)^2}{2\sigma_1^2}} \, dr}{\int\limits_{-\delta}^{\delta}\int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} e^{-\frac{(r-y-\alpha_1)^2}{2\sigma_1^2}} \, dr \, dy} \, .$$

Protože předpokládáme, že δ je dostatečně velké, pak

$$\lim_{\delta \to \infty} \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} \int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{(r-y-\alpha_1)^2}{2\sigma_1^2}} \, dy \, dr = \sigma_1 \sqrt{2\pi}(\gamma_2 - \gamma_1)$$

a

$$g_\eta(y \mid E) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}(\gamma_2 - \gamma_1)} \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} e^{-\frac{(r-y-\alpha_1)^2}{2\sigma_1^2}} \, dr \, , \quad -\infty < y < \infty \, . \tag{3}$$

4. Rozdělení výběrové charakteristiky ν

V souladu s hypotézou H_0 položme ve (3) $\alpha_1 = 0$. Jestliže pak náhodná proměnná η má rozdělení (3), má náhodná proměnná

$$\xi = \frac{\eta - \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}$$

rozdělení

$$g_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^1 e^{-\frac{(u-x)^2}{2\sigma^2}} \, du \, , \quad -\infty < x < \infty \, , \tag{5}$$

kde

$$\sigma = \frac{\sigma_1}{\gamma_2 - \gamma_1} \, . \tag{6}$$

Stanovme nyní rozdělení náhodné proměnné $\bar{\xi} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, když všechny ξ_k jsou vzájemně nezávislé náhodné proměnné a mají rozdělení (5). Pro charakteristickou funkci náhodné proměnné ξ_k dostaneme

$$\varphi_{\xi_k}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_0^1 e^{itx - \frac{(u-x)^2}{2\sigma^2}} \, du \, dx \, .$$

Po změně pořadí integrace a substituci $s = \frac{u-x}{\sigma} + it\sigma$ je

$$\varphi_{\xi_k}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \int\limits_0^1 e^{itu} \left[\int\limits_{-\infty + it\sigma}^{\infty + it\sigma} e^{-\frac{s^2}{2}} \, ds \right] du = \frac{e^{it} - 1}{it} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \, ,$$

takže charakteristická funkce náhodné proměnné $\bar{\xi}$ je

$$\varphi_{\bar{\xi}}(t) = \frac{(e^{\frac{it}{n}} - 1)^n}{\left(\frac{it}{n}\right)^n} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2n}} .$$

Podle inversního teorému platí pro rozdělení náhodné proměnné $\bar{\xi}$ vztah

$$f_n(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\bar{x}} \varphi_{\bar{\xi}}(t) \, \mathrm{d}t = \frac{n^n}{2\pi i^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\bar{x} - \frac{\sigma^2 t^2}{2n}} \frac{(e^{\frac{it}{n}} - 1)^n}{t^n} \, \mathrm{d}t .$$

Tento integrál vypočteme pomocí teorie analytických funkcí. Především integrand je holomorfní funkce v celé rovině. Vzhledem k následujícímu rozvedení výrazu $(e^{\frac{it}{n}} - 1)^n$ podle binomické věty zvolme však za integrační cestu C polopřímku $(-\infty, -1>$, polokružnici v horní polorovině s poloměrem 1 a středem v počátku a polopřímku $< 1, \infty)$. Potom

$$f_n(\bar{x}) = \frac{(-1)^n n^n}{2\pi i^n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \int_C \frac{1}{t^n} e^{it\left(\frac{j}{n} - \bar{x}\right) - \frac{\sigma^2 t^2}{2n}} \, \mathrm{d}t .$$

Substitucí $u = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} t$ upravíme $f_n(\bar{x})$ na tvar (integrační cestu nemusíme měnit)

$$f_n(\bar{x}) = \frac{(-1)^n n^{\frac{n+1}{2}} \sigma^{n-1}}{2^{\frac{n-1}{2}} \pi i^n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \int_C \frac{e^{iuc - u^2}}{u^n} \, \mathrm{d}u ,$$

kde

$$c = \frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{n}} (j - n\bar{x}) ,$$

takže podle vztahu (7) v dodatku (odst. 6)

$$f_n(\bar{x}) = \frac{(-1)^n n^{\frac{n+1}{2}} \sigma^{n-1}}{2^{\frac{n+1}{2}} \pi i^n} \left[\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} 2^n i^n \sqrt{\pi} \int_{\frac{c}{2}}^{\infty} \int_{z_n}^{\infty} \dots \int_{z_2}^{\infty} e^{-z_1^2} \, \mathrm{d}z_1 \dots \mathrm{d}z_n + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \sum_{k=0}^{n-1} (j - n\bar{x}) \, Q_{n-1}^{(k)} \right] ,$$

kde $Q_{n-1}^{(k)}$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$ jsou konstanty.

Nyní pro n-tou diferenci polynomu $P_k(y)$ řádu k při kroku w platí vztah

$$\Delta_w^n P_k(y) = w^{-n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P_k(y + wj) = 0 , \quad n > k . \tag{7}$$

Položíme-li v něm $P_k(y) = (y - n\bar{x})^k$, $w = 1$ a $y = 0$, dostáváme, že

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (j - n\bar{x})^k = 0\,, \quad n > k\,.$$

Užitím tohoto výsledku zjednodušíme vyjádření $f_n(\bar{x})$, neboť

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \sum_{k=0}^{n-1} (j - n\bar{x})^k Q_{n-1}^{(k)} = \sum_{k=0}^{n-1} Q_{n-1}^{(k)} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (j - n\bar{x})^k = 0\,,$$

a tedy

$$f_n(\bar{x}) = \frac{(-1)^n\, 2^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{n+1}{2}} \sigma^{n-1}}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \int_{-\frac{c}{2}}^{\infty} \int_{z_n}^{\infty} \dots \int_{z_2}^{\infty} e^{-z_1^2} \mathrm{d}z_1 \dots \mathrm{d}z_n\,.$$

Zaveďme nyní funkci

$$h_n(z_n) = \int_{z_n}^{\infty} h_{n-1}(z_{n-1})\, \mathrm{d}z_{n-1}\,, \quad n = 2, 3, \dots\,, \tag{8}$$

když

$$h_1(z_1) = e^{-z_1^2}\,,$$

takže $f_n(\bar{x})$ můžeme psát

$$f_n(\bar{x}) = \frac{(-1)^n\, 2^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{n+1}{2}} \sigma^{n-1}}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} h_{n+1}\left(-\frac{c}{2}\right).$$

Vzhledem ke vztahům (10) a (11) snadno nahlédneme platnost rovnic

$$h_n(-z_n) = \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} a_{n,2k} z_n^{2k} - h_n(z_n)\,, \quad n = 2, 4, \dots\,,$$

a

$$h_n(-z_n) = \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} a_{n,2k+1} z_n^{2k+1} + h_n(z_n)\,, \quad n = 3, 5, \dots\,,$$

pomocí nichž a vztahu (7) dostáváme konečný tvar rozdělení náhodné proměnné $\bar{\xi}$

$$f_n(\bar{x}) = \frac{2^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{n+1}{2}} \sigma^{n-1}}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} h_{n+1}\left(\frac{c}{2}\right).$$

Rozdělení výběrové charakteristiky (viz odst. 2)

$$\nu = \bar{\xi} - \tfrac{1}{2}\,,$$

pak je

$$f_n(v) = \frac{2^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{n+1}{2}} \sigma^{n-1}}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} h_{n+1}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2n}} \left(j - \frac{n}{2} - nv\right)\right].$$

Uvažujme nyní součet náhodných proměnných

$$\xi = \xi^{(1)} + \xi^{(2)} .$$

Jestliže náhodné proměnné $\xi^{(1)}$ resp. $\xi^{(2)}$ mají rozdělení $N(0, \sigma^2)$ resp. $R(0, 1)$, pak má náhodná proměnná ξ právě rozdělení (5). Tak lze snadno stanovit momenty náhodné proměnné ν, neboť

$$\nu = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k^{(2)} - \frac{1}{2}\right)\right],$$

kde náhodná proměnná $\xi_k^{(1)}$ má rozdělení $N(0, \sigma^2)$ a náhodná proměnná $(\xi_k^{(2)} - \frac{1}{2})$ rozdělení $R(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Pro matematickou naději dostáváme

$$\mathbf{E}(\nu) = 0 .$$

Poněvadž centrální momenty $\mathbf{M}_k(\xi)$ jsou

$$\mathbf{M}_2(\xi) = \sigma^2 + 0{,}08\overline{3}$$

$$\mathbf{M}_4(\xi) = 3\sigma^4 + 0{,}5\sigma^2 + 0{,}0125 ,$$

je koeficient plochosti

$$\gamma_2(\nu) = \frac{1}{n}\left(\frac{\mathbf{M}_4(\xi)}{\mathbf{M}_2^2(\xi)} - 3\right) = -\frac{0{,}008\overline{3}}{n(\sigma^2 + 0{,}08\overline{3})^2},$$

který dále výhodně použijeme, jak plyne z poznámky 2. Ihned je také patrno, že rozdělení $f_n(v)$ je symetrické kolem své matematické naděje, t. j. kolem nuly.

5. Výpočet kritických hodnot testu

K výpočtu kritických hodnot testu musíme znát distribuční funkci $F_n(v)$ výběrové charakteristiky ν, která je rovna

$$F_n(v) = \frac{2^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{n+1}{2}} \sigma^{n-1}}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \int_{-\infty}^{v} h_{n+1}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2n}}\left(j - \frac{n}{2} - nu\right)\right] du =$$

$$= \frac{(2n)^{\frac{n}{2}} \sigma^n}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} h_{n+2}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2n}}\left(j - \frac{n}{2} - nv\right)\right]. \tag{9}$$

Pro výpočet kritických hodnot nelze přímo použít tvaru distribuční funkce (9), protože tabulky funkce $h_n(z_n)$, které jsou k disposici (viz poznámka 1), jsou pro naše účely příliš hrubé. Proto bylo užito vztahů

$$h_n(z_n) = h_2(z_n) \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} a_{n,2k} z_n^{2k} - h_1(z_n) \sum_{j=0}^{\frac{n-4}{2}} b_{n,2j+1} z_n^{2j+1} , \quad n = 2, 4, \ldots, \tag{10}$$

a

$$h_n(z_n) = -h_2(z_n) \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} a_{n,2k+1} z_n^{2k+1} + h_1(z_n) \sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} b_{n,2j} z_n^{2j}, \quad n = 3, 5, \dots, \tag{11}$$

kde pro konstanty $a_{n,2k}$, $a_{n,2k+1}$, $b_{n,2j}$ a $b_{n,2j+1}$ platí rekurentní vzorce

$$\left.\begin{aligned}
a_{n,0} &= b_{n-1,0} - \sum_{k=0}^{\frac{n-4}{2}} \frac{A^*_{n-1,k}}{2^{k+1}} (2k+1)(2k-1)\dots 3 \cdot 1\,, \\
a_{n,2k} &= \frac{a_{n-1,2k-1}}{2k}\,, \quad k = 1, 2, \dots \frac{n-2}{2}\,, \\
a_{n,2k+1} &= \frac{a_{n-1,2k}}{2k+1}\,, \quad k = 0, 1, \dots \frac{n-3}{2}\,, \\
b_{n,2j} &= \sum_{k=j}^{\frac{n-3}{2}} A_{n-1,k} B_{j,k}\,, \quad j = 0, 1, \dots \frac{n-3}{2}\,, \\
b_{n,2j+1} &= \sum_{k=j}^{\frac{n-4}{2}} A^*_{n-1,k} B^*_{j,k}\,, \quad j = 0, 1, \dots \frac{n-4}{2}\,,
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

při čemž

$$\left.\begin{aligned}
A_{n-1,k} &= \frac{a_{n-1,2k}}{2k+1} - b_{n-1,2k+1}\,, \\
B_{j,k} &= \frac{1}{2(k+1)} (k+1)^{[k-j+1]}\,, \\
A^*_{n-1,k} &= \frac{a_{n-1,2k+1}}{2(k+1)} - b_{n-1,2k+2}\,, \\
B^*_{j,k} &= \frac{1}{2^{k-j+1}(2k+3)} (2k+3)(2k+1)\dots(2j+3)\,,
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

když

$$u^{[m]} = u(u-1)(u-2)\dots(u-m+1)\,.$$

Důkaz. V průběhu důkazu budeme potřebovat tyto vzorce (které se odvodí pomocí integrace per partes):

$$\int_{z_{n+1}}^{\infty} z_n^s \left[\int_{z_n}^{\infty} e^{-z_1^2} \mathrm{d}z_1\right] \mathrm{d}z_n = -\frac{z_{n+1}^{s+1}}{s+1} \int_{z_{n+1}}^{\infty} e^{-z_1^2} \mathrm{d}z_1 + \frac{1}{s+1} \int_{z_{n+1}}^{\infty} z_n^{s+1} e^{-z_n^2} \mathrm{d}z_n\,,$$
$$s = 1, 2, \dots, \tag{13}$$

$$\int_{z_{n+1}}^{\infty} z_n^{2k+1} e^{-z_n^2}\, \mathrm{d}z_n = h_1(z_{n+1}) \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2(k+1)} (k+1)^{[i+1]} z_{n+1}^{2(k-i)}\,, \quad k = 0, 1, \dots, \tag{14}$$

$$\int_{z_{n+1}}^{\infty} z_n^{2(k+1)} e^{-z_n^2} \mathrm{d}z_n = h_1(z_{n+1}) \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2^{i+1}(2k+3)} (2k+3)(2k+1) \dots (2k-2i+3) \,.$$

$$. \, z_{n+1}^{2(k-i)+1} + \frac{1}{2^{k+1}} (2k+1)(2k-1) \dots 3 \,.\, 1 h_2(z_{n+1}) \,, \tag{15}$$

$$k = 0, 1, \dots \,.$$

Platnost vztahů (10) a (11) dokážeme metodou úplné indukce. Přímou integrací v (8) zjistíme, že pro $n = 2$ a 3 vztahy (10) a (11) platí. Nechť platí vztah (10) pro $n \geqq 4$. Potom podle (8) a (10) je

$$h_{n+1}(z_{n+1}) = \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} a_{n,2k} \int_{z_{n+1}}^{\infty} z_n^{2k} h_2(z_n) \,\mathrm{d}z_n - \sum_{k=0}^{\frac{n-4}{2}} b_{n,2k+1} \int_{z_{n+1}}^{\infty} z_n^{2k+1} h_1(z_n) \,\mathrm{d}z_n \,.$$

Dosazením vztahů (13) a (14), a položíme-li $b_{n,n-1} = 0$, dostaneme, že

$$h_{n+1}(z_{n+1}) = -h_2(z_{n+1}) \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} \frac{a_{n,2k}}{2k+1} z_{n+1}^{2k+1} + h_1(z_{n+1}) \,.$$

$$. \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{a_{n,2k}}{2k+1} - b_{n,2k+1} \right) \left[\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2(k+1)} (k+1)^{[i+1]} z_{n+1}^{2(k-i)} \right] . \tag{16}$$

Zaveďme v součtu $\sum_{i=0}^{k}$ sčítací index $j = k - i$ a položme

$$\left.\begin{aligned} a_{n+1,2k+1} &= \frac{a_{n,2k}}{2k+1} \,, \\ A_{n,k} &= \frac{a_{n,2k}}{2k+1} - b_{n,2k+1} \,, \\ B_{j,k} &= \frac{1}{2(k+1)} (k+1)^{[k-j+1]} \,, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

kde $j, k = 0, 1, 2, \dots, \dfrac{n-2}{2}$.

Dosazením těchto výrazů do (16) a poněvadž

$$\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} A_{n,k} \sum_{j=0}^{k} B_{j,k} z_{n+1}^{2j} = \sum_{j=0}^{\frac{n-2}{2}} b_{n+1,2j} z_{n+1}^{2j} \,,$$

kde

$$b_{n+1,2j} = \sum_{k=j}^{\frac{n-2}{2}} A_{n,k} B_{j,k} \,, \tag{18}$$

Tabulka 2.

$a_{n,m}$ / $b_{n,m}$	$a_{n,0}$ / $b_{n,0}$	$a_{n,1}$ / $b_{n,1}$	$a_{n,2}$ / $b_{n,2}$	$a_{n,3}$ / $b_{n,3}$	$a_{n,4}$ / $b_{n,4}$	$a_{n,5}$ / $b_{n,5}$	$a_{n,6}$ / $b_{n,6}$	$a_{n,7}$ / $b_{n,7}$	$a_{n,8}$ / $b_{n,8}$	$a_{n,9}$ / $b_{n,9}$	$a_{n,10}$ / $b_{n,10}$
n = 5		$1/2^2$		$1/2 \cdot 3$							
	$1/2^2 \cdot 3$		$1/2^2 \cdot 3$								
6	$1/2^5$		$1/2^3$		$1/2^3 \cdot 3$						
		$5/2^5 \cdot 3$		$1/2^4 \cdot 3$							
7		$1/2^5$		$1/2^3 \cdot 3$		$1/2^3 \cdot 15$					
	$1/2^3 \cdot 15$		$3/2^5 \cdot 5$		$1/2^4 \cdot 15$						
8	$1/2^7 \cdot 3$		$1/2^6$		$1/2^5 \cdot 3$		$1/2^4 \cdot 45$				
		$11/2^7 \cdot 15$		$7/2^5 \cdot 45$		$1/2^5 \cdot 45$					
9		$1/2^7 \cdot 3$		$1/2^6 \cdot 3$		$1/2^5 \cdot 15$		$1/2^4 \cdot 315$			
	$1/2^4 \cdot 105$		$29/2^7 \cdot 105$		$1/2^4 \cdot 63$		$1/2^5 \cdot 315$				
10	$1/2^{11} \cdot 3$		$1/2^8 \cdot 3$		$1/2^8 \cdot 3$		$1/2^{10} \cdot 45$		$1/2^{14} \cdot 63$		
		$31/2^{11} \cdot 35$		$37/2^{10} \cdot 63$		$3/2^9 \cdot 35$		$1/2^8 \cdot 315$			
11		$1/2^{11} \cdot 3$		$1/2^8 \cdot 9$		$1/2^8 \cdot 15$		$1/2^6 \cdot 315$		$1/2^7 \cdot 2835$	
	$1/2^5 \cdot 945$		$65/2^{11} \cdot 189$		$23/2^{10} \cdot 189$		$1/2^9 \cdot 81$		$1/2^8 \cdot 2835$		
12	$1/2^{13} \cdot 15$		$1/2^{12} \cdot 3$		$1/2^{10} \cdot 9$		$1/2^9 \cdot 45$		$1/2^9 \cdot 315$		$1/2^8 \cdot 14175$
		$863/2^{13} \cdot 945$		$11/2^8 \cdot 945$		$7/2^9 \cdot 675$		$11/2^8 \cdot 14175$		$1/2^9 \cdot 14175$	

upravíme $h_{n+1}(z_{n+1})$ na tvar

$$h_{n+1}(z_{n+1}) = - h_2(z_{n+1}) \sum_{k=0}^{\frac{(n+1)-3}{2}} a_{n+1,2k+1} z_{n+1}^{2k+1} + h_1(z_{n+1}) \sum_{j=0}^{\frac{(n+1)-3}{2}} b_{n+1,2j} z_{n+1}^{2j} \,.$$

Ten je pak roven vyjádření $h_n(z_n)$ pro liché n (viz (11)), když místo n píšeme $n + 1$. Obdobně bychom pomocí (13) a (15) dokázali, že za platnosti vztahu (11) pro $n \geqq 3$ platí (10), kde místo n píšeme $n + 1$. Tím je platnost vztahů (10) a (11) dokázána. Současně vzhledem k (17) a (18) dostáváme rekurentní vztahy (12) pro konstanty $a_{n,2k+1}$ a $b_{n,2j}$ a obdobně bychom obdrželi rekurentní vztahy pro konstanty $a_{n,2k}$ a $b_{n,2j+1}$.

V tabulce 2 jsou tabelovány konstanty $a_{n,2k+1}$, $b_{n,2j}$ pro $n = 5, 7, 9, 11$ a konstanty $a_{n,2k}$, $b_{n,2j+1}$ pro $n = 6, 8, 10, 12$.

Poznámka 1. Pro první přiblížení při výpočtu kritických hodnot můžeme výhodně použít tabulek [3], ve kterých Kaye tabeloval pro $n = 1, 2, \ldots, 11$ funkci

$$i^n erfc\, z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} h_{n+2}(z) \,, \quad z \geqq 0 \,.$$

Poznámka 2. Značným usnadněním výpočtu kritických hodnot byla tabulka kritických hodnot $t = t(\varepsilon, \gamma_2)$ pro hladiny významnosti $\varepsilon = 0{,}05$ a $\varepsilon = 0{,}01$, příslušných k rozdělení

$$\varphi(x \mid \gamma_2) = \varphi(x) + \gamma_2 \frac{1}{24} \varphi^{(4)}(x) \,,$$

kde $\varphi(x)$ je normální rozdělení $N(0,1)$, $\varphi^{(4)}(x)$ jeho čtvrtá derivace a $\gamma_2 = \frac{\mathbf{M}_4}{\mathbf{M}_2^2} - 3$ je koeficient plochosti, kterou sestrojil J. Hájek [7]. Ukázalo se totiž, že rozdělením $\varphi(v \mid \gamma_2(v))$ lze velmi dobře aproximovat rozdělení $f_n(v)$ pro větší n. Tak na př. pro $\sigma = 0{,}2$ lze této aproximace užít pro obě hladiny významnosti při $n \geqq 6$.

6. Dodatek

Věta 1. *Nechť n je nezáporné celé číslo a nechť C je integrační cesta v rovině komplexních čísel skládající se z neohraničeného intervalu zleva $(-\infty, -1\rangle$, z polokružnice se středem v počátku a s poloměrem rovným jednotce probíhající v hořejší půlrovině a z neohraničeného intervalu zprava $\langle 1, \infty)$. Potom funkce $I_n(z)$ určená vztahem*

$$I_n(z) = \int_C \frac{e^{itz - t^2}}{t^n} \, dt \,. \tag{1}$$

je analytická funkce komplexní proměnné z v celé rovině a pro každé přirozené n platí vztah

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} I_n(z) = iI_{n-1}(z) . \tag{2}$$

Důkaz. Integrál na pravé straně ve vztahu (1) konverguje pro každé komplexní číslo z, ježto funkce $\frac{e^{itz-t^2}}{t^n}$ je spojitá v t na C a ježto pro každé $t \in C$ takové, že $|t| \geqq 1$, $|t| \geqq 2|z|$, platí vztah

$$\left| \frac{e^{itz-t^2}}{t^n} \right| \leqq \frac{e^{-t^2\left(1-\frac{|z|}{|t|}\right)}}{|t|^n} \leqq e^{-\frac{t^2}{2}} .$$

Integrál $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$ je konvergentní, a tedy je konvergentní i integrál ve vztahu (1). Nechť dále n je přirozené číslo. Nechť z je dané komplexní číslo, nechť D je reálné číslo takové, že $D > 1$, $|z| < D$. Nechť $R > 2D$ a nechť $z' \neq z$ a $|z'| < D$. Definujme výraz $f(z', z)$ vztahem:

$$f(z', z) = \frac{I_n(z') - I_n(z)}{z' - z} - iI_{n-1}(z) . \tag{3}$$

Zřejmě lze $f(z', z)$ psát ve tvaru:

$$f(z', z) = H_1 - H_2 + H_3 + H_4 - H_5 , \tag{4}$$

kde

$$H_1 = \int_{-\infty}^{-R} \frac{e^{itz'} - e^{itz}}{z' - z} \cdot \frac{e^{-t^2}}{t^n} \mathrm{d}t ,$$

$$H_2 = \int_{-\infty}^{-R} ite^{itz} \frac{e^{-t^2}}{t^n} \mathrm{d}t ,$$

$$H_3 = \int_{C_R} \left(\frac{e^{itz'} - e^{itz}}{z' - z} - it\, e^{itz} \right) \frac{e^{-t^2}}{t^n} \mathrm{d}t ,$$

$$H_4 = \int_{R}^{\infty} \frac{e^{itz'} - e^{itz}}{z' - z} \cdot \frac{e^{-t^2}}{t^n} \mathrm{d}t ,$$

$$H_5 = \int_{R}^{\infty} it\, e^{itz} \frac{e^{-t^2}}{t^n} \mathrm{d}t ,$$

při čemž C_R je integrační cesta skládající se z intervalu $\langle -R, -1 \rangle$, z polokružnice se středem v počátku a s poloměrem rovným jedné probíhající v hořejší půlrovině a z intervalu $\langle 1, R \rangle$.

Když M je úsečka s počátkem z_1 a s koncem z_2 pak platí:

$$\left|\int_{\substack{z_1\\M}}^{z_2} e^z \,\mathrm{d}z\right| = |e^{z_2} - e^{z_1}| \leqq |z_2 - z_1| \,.\, |e^{\xi}| \leqq |z_2 - z_1| \, e^{|\xi|} \,, \tag{5}$$

kde ξ je bod na úsečce M. Dle toho můžeme psát:

$$|H_1| = \left| \int_{-\infty}^{-R} \frac{e^{itz'} - e^{itz}}{z' - z} \cdot \frac{e^{-t^2}}{|t|^n} \,\mathrm{d}t \right| \leqq \int_{-\infty}^{-R} \frac{|t| \,.\, |z' - z| \, e^{|t| \,.\, |D|}}{|z' - z|} \cdot \frac{e^{-t^2}}{|t|^n} \,\mathrm{d}t \leqq$$

$$\leqq \int_{-\infty}^{-R} e^{-t^2\left(1 - \frac{D}{|t|}\right)} \,\mathrm{d}t \leqq \int_{-\infty}^{-R} e^{-\frac{t^2}{2}} \,\mathrm{d}t \,.$$

Odtud plyne, že ke každému $\varepsilon > 0$ lze udat $R_1 > 1$ tak, že pro všechna $R > R_1$ je $|H_1| < \frac{\varepsilon}{5}$.

K témuž ε lze obdobně udat $R_4 > 1$ tak, že pro všechna $R > R_4$ je $|H_4| < \frac{\varepsilon}{5}$. Snadno se též zjistí, že k témuž $\varepsilon > 0$ lze udat $R_2 > 1$, resp. $R_5 > 1$ tak, že pro všechna $R > R_2$, resp. $R > R_5$ je $|H_2| < \frac{\varepsilon}{5}$, $|H_5| < \frac{\varepsilon}{5}$.

Pišme dále H_3 ve tvaru:

$$H_3 = \frac{\displaystyle\int_{C_R} \frac{e^{itz'-t^2}}{t^n} \,\mathrm{d}t - \int_{C_R} \frac{e^{itz-t^2}}{t^n} \,\mathrm{d}t}{z' - z} - \int_{C_R} \frac{i\, e^{itz-t^2}}{t^{n-1}} \,\mathrm{d}t \,.$$

Podle [5], kap. II, § 3, věta 3.3 platí vztah

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \int_{C_R} \frac{e^{itz-t^2}}{t^n} \,\mathrm{d}t = \int_{C_R} \frac{i\, e^{itz-t^2}}{t^{n-1}} \,\mathrm{d}t \,.$$

Bezprostředně z definice derivace komplexní funkce pak ihned odtud plyne, že při *pevném* R větším nežli kterékoliv z čísel R_1, R_2, R_4, R_5 lze udat $\delta > 0$ tak, že pro každé $z' \neq z$ takové, že $|z' - z| < \delta$ je $|z'| < D$ a zároveň $|H_3| < \frac{\varepsilon}{5}$.

Shrnutím všech odhadů pro H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 pak dostaneme ihned tvrzení: Nechť z je dané komplexní číslo; pak ke každému $\varepsilon > 0$ lze udat $\delta > 0$ tak, že pro všechna $z' \neq z$ splňujících nerovnost $|z' - z| < \delta$ platí (vzhledem ke (3) a (4)):

$$\left| \frac{I_n(z') - I_n(z)}{z' - z} - iI_{n-1}(z) \right| < \varepsilon \,.$$

T. j. pro každé přirozené n a každé komplexní číslo z je $\frac{\mathrm{d}I_n(z)}{\mathrm{d}z} = iI_{n-1}(z)$, což je vztah (2), který bylo dokázat.

Věta 2. *Nechť pro každé nezáporné celé číslo n a každé komplexní z je funkce $I_n(z)$ opět určena vztahem* (1). *Pak je*

$$\frac{\mathrm{d}^n I_n(z)}{\mathrm{d}z^n} = i^n \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{z^2}{4}} . \tag{6}$$

Důkaz. Podle vztahu (1) a (2) platí pro každé nezáporné celé n

$$\frac{\mathrm{d}^n I_n(z)}{\mathrm{d}z^n} = i^n I_0(z) = i^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz-t^2}\,\mathrm{d}t$$

(integrační cestu C můžeme v $I_0(z)$ zaměnit celou reálnou osou, ježto integrovaná funkce je analytická v celé rovině). Substitucí $u = t - \frac{iz}{2}$ dostaneme, že

$$\frac{\mathrm{d}^n I_n(z)}{\mathrm{d}z^n} = i^n e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{\Gamma} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u ,$$

kde Γ je rovnoběžka s reálnou osou procházející bodem $-\frac{iz}{2}$. Poslední integrál se vypočte tak, že se uvažuje integrál po obvodě obdélníka s vrcholy $(-R, 0)$, $(R, 0)$, $\left(R, -\frac{iz}{2}\right)$, $\left(-R, -\frac{iz}{2}\right)$. Tento integrál je podle Cauchyho integrální věty roven nule. Integrály podél stran rovnoběžných s imaginární osou konvergují k nule, pro $R \to \infty$, takže dostaneme:

$$\int_{\Gamma} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi} .$$

Tím dostáváme vztah (6).

Věta 3. *Nechť $I_n(z)$ je funkce definovaná vztahem* (1). *Pak pro každé reálné c a pro každé přirozené n platí vztah:*

$$I_n(c) = 2^n i^n \sqrt{\pi} \int_{\frac{c}{2}}^{\infty} \int_{x_n}^{\infty} \dots \int_{x_2}^{\infty} e^{-x_1^2}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n + P_{n-1}(c) . \tag{7}$$

kde $P_{n-1}(c)$ je mnohočlen stupně nanejvýše $(n-1)$-ho.

Důkaz. $\int_{x_2}^{\infty} e^{-x_1^2}\,\mathrm{d}x_1$ jest konvergentní a pro $x_2 > 1$ platí zřejmě nerovnost $\int_{x_2}^{\infty} e^{-x_1^2}\,\mathrm{d}x_1 < e^{-x_2}$. Dále je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_2} \int_{x_2}^{\infty} e^{-x_1^2}\,\mathrm{d}x_1 = -e^{-x_2^2}$$

Úplnou indukcí pak snadno plyne, že

$$\int_{x_{n+1}}^{\infty} \int_{x_n}^{\infty} \dots \int_{x_2}^{\infty} e^{-x_1^2}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n$$

je konvergentní, že pro $x_{n+1} \geqq 1$ je tento integrál menší nežli $e^{-x_{n+1}}$ a že platí vztah

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_{n+1}} \int_{x_{n+1}}^{\infty} \int_{x_n}^{\infty} \dots \int_{x_2}^{\infty} e^{-x_1^2} \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n =$$

$$= - \int_{x_{n+1}}^{\infty} \int_{x_{n-1}}^{\infty} \dots \int_{x_2}^{\infty} e^{-x_1^2} \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_{n-1} \, .$$

Odtud ihned plyne, že integrál ve vztahu (7) je konvergentní a že

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}c^n} 2^n i^n \sqrt{\pi} \int_{-\frac{c}{2}}^{\infty} \int_{x_n}^{\infty} \dots \int_{x_2}^{\infty} e^{-x_1^2} \, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = i^n \sqrt{\pi} \, e^{-\frac{c^2}{4}} \, . \qquad (8)$$

Dle vztahu (6) je pro každé reálné c

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}c^n} I_n(c) = i^n \sqrt{\pi} e^{-\frac{c^2}{4}} \, .$$

Odtud a ze vztahu (8) plyne ihned vztah (7).

7. Závěr

Vyložený test přesnosti seřízení automatického třídiče je zvláště vhodný pro třídiče s komparátory s elektrickými kontakty, kde zjištění směrodatné odchylky třídění nečiní vzhledem k reálnosti předpokladu normality žádných potíží. Uplatnění testu je v praxi možné, i když nejsou právě splněny výše uvedené předpoklady (stručně vyložené v úvodu). Ukázalo se totiž, že na „tvorbu" souboru S* ve skupině Γ mají prakticky vliv pouze součásti patřící správně do nejbližších skupin, a že tedy aproximace libovolného tříděného souboru vzhledem k tříděnému rozměru modelem rektangulárního rozdělení je mimo okrajových skupin zcela přijatelná. To znamená, že test můžeme provést bez „vzorového" souboru S, když náhodný výběr z jedné skupiny dodatečně přesně proměříme (jak se často v praxi děje).

LITERATURA

[1] *Бородачев:* Основные вопросы теории точности производства, 1950.

[2] *Kendall:* The advanced theory of statistics.

[3] *Kaye:* A table of the first eleven repeated integrals of the error function, Journal of Math. and Phys. 1955, No. 2.

[4] *Klega:* Určení charakteristik přesnosti třídicího automatu, Strojírenství 1957, 10.

[5] *Saks — Zykmund:* Funkcje analityczne, 1948.

[6] *Knopp:* Funktionentheorie, 1. díl, 1937.

[7] *Hájek:* O aproximaci některých teoretických rozdělení normálním rozdělením (připravuje se do tisku pro Aplikace matematiky).

Резюме

КРИТЕРИЙ ТОЧНОСТИ НАЛАДКИ СОРТИРОВОЧНОЙ МАШИНЫ

ВЛАДИМИР КЛЕГА, ИРЖИ СЕЙТЗ (Vladimír Klega, Jiří Seitz)

(Поступило в редакцию 14/V 1957 г.)

При автоматической сортировке деталей в группы возникает потребность контролировать точность наладки сортировочной машины; в настоящей работе предложен один метод такой наладки.

Определенная группа сортировочной машины (обозначим ее буквой Γ) содержит детали, которые удовлетворяют неравенствам (1), где η — сортированный размер, и ошибка сортировки ζ имеет нормальное распределение $N(\alpha_1, \sigma_1^2)$. В таком случае критерий точности наладки дан проверкой гипотезы H_0, которая заключается в систематической ошибке сортировки $\alpha_1 = 0$. Так как сортировочная машина не замечает значение ζ и ϱ, то нам невозможно обосновать проверку наблюдением ни значений ζ, ни значений ϱ. Поэтому первый из авторов предлагает критерий, основанный на наблюдении значения η при условии, что состоялось событие (1). Ход работы следующий: согласно сортировочному размеру составляем совокупность деталей S так, что ее статистической моделью является равномерное распределение $R(-\delta, \delta)$ с достаточно большим параметром δ. Каждую деталь, включенную в совокупность S, обозначим по ее сортировочному размеру. После сортировки совокупности S получим в группе Γ определенную совокупность деталей S^*. Из совокупности S^* возьмем случайную выборку n деталей; их сортировочные размеры $y_1, y_2, \ldots, y_n$ мы, конечно, знаем. Вычислим значение v, данное формулой (2), которое является наблюдением случайной величины

$$\nu = \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \eta_k - \gamma}{\gamma_2 - \gamma_1}, \quad \gamma = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2},$$

где случайная величина η_k распределена по закону (3). Если гипотеза H_0 верна, то случайная величина ν имеет функцию распределения (9), где $h_n(z_n)$ — функция, определенная соотношением (8), и $\sigma = \sigma_1/(\gamma_2 - \gamma_1)$ устанавливаем, например, методом, изложенном в [4]. Гипотезу H_0 отвергаем с вероятностью ε, когда $|v| > v_\varepsilon$; значения v_ε приведены в таб. 1.

Дополнение (отдел 6) написано другим автором. Для доказательства распределения $f_n(v)$ была использована теорема 3: Пусть $I_n(z)$ — функция, определенная соотношением (1). Тогда для каждого вещественного c и для каждого натурального n имеет место соотношение (7), где $P_{n-1}(c)$ — полином степени не выше $(n-1)$.

Summary

TEST OF THE ACCURACY OF SETTING OF AN AUTOMATIC SORTING MACHINE

VLADIMÍR KLEGA, JIŘÍ SEITZ

(Received May, 14, 1957.)

In connection with the automatic sorting of machined parts into certain dimensional groups the problem arises of verifying the accuracy of setting of the sorting machine. In this paper one such method is described.

A certain class of a sorting machine (denoted by Γ) contains parts for which the relation (1) holds; here η is the dimension of the parts being sorted and ξ is the error of sorting, which has the normal distribution $N(\alpha_1, \sigma_1^2)$. A test of sorting accuracy is thus given by testing the hypothesis H_0 that the systematic error of setting $\alpha_1 = 0$. Because the sorting machine does not indicate the values ξ and ϱ, we cannot base the test on the observation either of the values ξ nor of the values ϱ. The first author, therefore, proposes a test which is based on the observations of the values η on the assumption that the event given by the relation (1) has occured. The test procedure is as follows: We form a group of parts S such that we can take as its statistical model with respect to the sorted dimension the rectangular distribution $R(-\delta, \delta)$ with a sufficiently large parameter δ. We mark every part which belongs to the group S by its appropriate dimension. Then we sort the group S, so that we obtain in the class Γ a certain sub-group of parts S*. From the sub-group S* we take a random sample of n parts, whose sorted dimensions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ are already known. We then compute the value v given in (2); this is an observation of the random variable

$$\nu = \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \eta_k - \gamma}{\gamma_2 - \gamma_1}, \quad \gamma = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2},$$

where the random variable η_k has the distribution (3). Under the hypothesis H_0 the random variable ν has the distribution function (9), where $h_n(z_n)$ is the function given by (8) and $\sigma = \sigma_1/(\gamma_2 - \gamma_1)$ is obtained e. g. by the method described in [4]. The hypothesis H_0 is rejected when $|v| > v_\varepsilon$ with probability ε; the values v_ε are tabulated in table 1.

The appendix (section 6) was prepared by the second author. In the derivation of the frequency function $f_n(v)$ the following theorem 3 was used: Let $I_n(z)$ be a function defined by the relation (1). Then for every real c and for every real positive integer n the relation (7) holds, where $P_{n-1}(c)$ is a polynomial of the $(n-1)$-st degree at most.