Aplikace matematiky

Jiří Míčka; Oskar Schmidt

Zjišťování funkční závislosti mezi třemi tabelovánými veličinami pomocí spojnicových nomogramů

Aplikace matematiky, Vol. 2 (1957), No. 4, 279–296

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102577`

ZJIŠŤOVÁNÍ FUNKČNÍ ZÁVISLOSTI MEZI TŘEMI TABELOVANÝMI VELIČINAMI POMOCÍ SPOJNICOVÝCH NOMOGRAMŮ

JIŘÍ MÍČKA, OSKAR SCHMIDT

(Došlo dne 8. června 1956.) DT:53.087.9:518.3

V práci je podán způsob sestrojení spojnicového nomogramu z dané tabulky hodnot tří proměnných veličin. Z nomogramu je pak zjišťována funkční závislost. Je probráno systematicky šest typů funkčních závislostí a jejich verifikace numerickým kriteriem z dané tabulky.

Úvod

Zjišťování funkční závislosti z tabulky naměřených hodnot je problém, který je důležitý především v technických aplikacích. Zabývalo se jím mnoho autorů, zvláště v případě dvou tabelovaných veličin. Jedná-li se o tři tabelované veličiny, můžeme k vyhodnocení hledaného vztahu s výhodou použít spojnicových nomogramů. V této práci se systematicky zabýváme skupinou funkcí $z = f(x, y)$, pro něž se dá z tabulky daných hodnot sestrojit spojnicový nomogram, z něhož se pak určí hledaná funkční závislost. Při výběru typů funkcí vycházíme z *analogie* s empirickými formulemi pro dvě tabelované veličiny. Tak dospějeme k následující skupině funkčních závislostí (x, y nezávisle proměnné, z závisle proměnná):

$$\begin{aligned}
\textbf{I.}\quad & z = ax + by + c\,, \\
\textbf{II.}\quad & z = ax^m y^n + b\,, \\
\textbf{III.}\quad & z = ab^x c^y + d\,, \\
\textbf{IV.}\quad & z = ax^m b^y + c\,, \\
\textbf{V.}\quad & z = a \log x + b \log y + c\,, \\
\textbf{VI.}\quad & z = a \log x + by + c\,,
\end{aligned}$$

kde a, b, c, d, m, n jsou konstanty. Mezi těmito šesti typy je úzká souvislost, která bude v dalším osvětlena; proto nebyly zatím jiné závislosti vyšetřovány.

Předpokládáme, že naměřené (po př. jinak stanovené) hodnoty hledané funkce můžeme sestavit do tabulky tvaru:

Tabulka 1.
$z = f(x, y)$

$x \backslash y$	y_1	y_2	$\ldots$	y_k
x_1	z_{11}	z_{12}	$\ldots$	z_{1k}
x_2	z_{21}	z_{22}	$\ldots$	z_{2k}
$\cdot$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_h	z_{h1}	z_{h2}	$\ldots$	z_{hk}

kde obecně čísla z_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, h; j = 1, 2, \ldots, k)$ nejsou stejná. Požadujeme, aby mezi veličinami x_i $(i = 1, 2, \ldots, h)$ z dané tabulky se vyskytoval aritmetický a geometrický průměr dvou různých hodnot x_i. Není-li toto splněno, najdeme hodnoty odpovídající aritmetickému nebo geometrickému průměru numerickou interpolací. Tentýž požadavek klademe na hodnoty y_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$.

Teoretická část

Vyjděme od kanonického tvaru vztahu o třech proměnných

$$h_1 f_3 + h_2 g_3 + h_3 = 0 ,$$

který lze zobrazit spojnicovým nomogramem [1]. Přepišme jej na tvar:

$$h_1 \frac{f_3}{g_3} + h_2 + \frac{h_3}{g_3} = 0 , \quad g_3 \neq 0 . \tag{1}$$

Zobrazovací rovnice spojnicového nomogramu pro vztah (1) budeme užívat ve tvaru

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0 , & \eta_1 &= \alpha h_1 , \\ \xi_2 &= \delta , & \eta_2 &= \beta h_2 , \\ \xi_3 &= \frac{\alpha\delta}{\beta \dfrac{f_3}{g_3} + \alpha} , & \eta_3 &= - \frac{\alpha\beta}{\beta \dfrac{f_3}{g_3} + \alpha} \cdot \frac{h_3}{g_3} . \end{aligned} \tag{2}$$

I. Srovnání jednotlivých typů funkčních závislostí I.—VI. s kanonickým tvarem (1).

I. $z = ax + by + c$

$$h_1 = x , \quad h_2 = - \operatorname{sgn}(a)\, z ,$$
$$\frac{f_3}{g_3} = |a| , \quad \frac{h_3}{g_3} = by + c ,$$

nebo

$$h_1 = y , \quad h_2 = - \operatorname{sgn}(b)\, z ,$$
$$\frac{f_3}{g_3} = |b| , \quad \frac{h_3}{g_3} = ax + c .$$

II. $z = ax^m y^n + b\,, \qquad x > 0\,, \quad y > 0$

$$m \log x + n \log y - \log |z - b| + \log |a| = 0\,,$$

$$h_1 = \log x\,, \qquad h_2 = -\operatorname{sgn}(m) \log |z - b|\,,$$

$$\frac{f_3}{g_3} = |m|\,, \qquad \frac{h_3}{g_3} = n \log y + \log |a|\,,$$

nebo

$$h_1 = \log y\,, \qquad h_2 = -\operatorname{sgn}(n) \log |z - b|\,,$$

$$\frac{f_3}{g_3} = |n|\,, \qquad \frac{h_3}{g_3} = m \log x + \log |a|\,.$$

Pro sestrojení stupnice funkce h_2 je třeba znát konstantu b, kterou je nutno určit před konstrukcí nomogramu (zbývající konstanty se určí ze sestrojeného nomogramu). Tuto aditivní konstantu b vypočteme z dané tabulky 1 následujícím způsobem:

Mezi hodnotami x_i $(i = 1, 2, \ldots, h)$ vybereme tři $x_p < x_q < x_r$ tak, aby platilo

$$x_q = \sqrt{x_p x_r}\,. \tag{3}$$

Volíme pevné y_j. Pak

$$z_{pj} = a x_p^m y_j^n + b\,,$$
$$z_{qj} = a x_q^m y_j^n + b\,,$$
$$z_{rj} = a x_r^m y_j^n + b\,.$$

Z těchto rovnic vyplývá následující vztah:

$$(z_{pj} - b)(z_{rj} - b) = (z_{qj} - b)^2\,, \tag{4}$$

odkud dostáváme [2]

$$b = \frac{z_{pj} z_{rj} - z_{qj}^2}{z_{pj} + z_{rj} - 2 z_{qj}}\,. \tag{5}$$

Toto stanovení konstanty b provedeme pro každé $j = 1, 2, \ldots, k$ a z nalezených k hodnot konstanty b vezmeme aritmetický průměr. Tutéž hodnotu dostaneme i pro pevná x_i a geometrický průměr mezi veličinami y_j. V případě, že se nevyskytuje v tabulce žádné x_q splňující relaci (3), vypočteme příslušné hodnoty z_{qj} $(j = 1, 2, \ldots, k)$ numerickou interpolací. Pak je výhodné volit hodnoty x_p a x_r co nejdále od sebe, aby byla vzata v úvahu co největší část dané tabulky.

III. $z = a b^x c^y + d\,, \quad 0 < b \neq 1\,, \quad 0 < c \neq 1$

$$x \log b + y \log c - \log |z - d| + \log |a| = 0\,,$$

$$h_1 = x\,, \qquad h_2 = -\operatorname{sgn}(\log b) \log |z - d|\,,$$

$$\frac{f_3}{g_3} = |\log b|\,, \qquad \frac{h_3}{g_3} = y \log c + \log |a|\,,$$

nebo

$$h_1 = y\,, \qquad h_2 = -\operatorname{sgn}(\log c) \log |z - d|\,,$$

$$\frac{f_3}{g_3} = |\log c|\,, \qquad \frac{h_3}{g_3} = x \log b + \log |a|\,.$$

V tomto případě je opět třeba znát hodnotu konstanty d. Tu určíme stejným způsobem jako u typu **II**. podle vzorce (5), kde

$$x_q = \frac{x_p + x_r}{2}\,; \tag{6}$$

z rovnic

$$z_{pj} = ab^{x_p}c^{y_j} + d\,,$$
$$z_{qj} = ab^{x_q}c^{y_j} + d\,,$$
$$z_{rj} = ab^{x_r}c^{y_j} + d\,,$$

vyplývá vztah

$$(z_{pj} - d)(z_{rj} - d) = (z_{qj} - d)^2\,,$$

který vede opět k vzorci (5) [2]. Hodnota konstanty d je stejná (v mezích přesnosti) jak pro pevná y_j, tak pro pevná x_i.

IV. $z = ax^m b^y + c\,, \qquad x > 0\,, \quad 0 < b \neq 1$

$$m \log x + y \log b - \log|z - c| + \log|a| = 0\,,$$

$$h_1 = \log x\,, \qquad h_2 = -\operatorname{sgn}(m)\log|z - c|\,,$$
$$\frac{f_3}{g_3} = |m|\,, \qquad \frac{h_3}{g_3} = y\log b + \log|a|\,,$$

nebo

$$h_1 = y\,, \qquad h_2 = -\operatorname{sgn}(\log b)\log|z - c|\,,$$
$$\frac{f_3}{g_3} = |\log b|\,, \qquad \frac{h_3}{g_3} = m\log x + \log|a|\,.$$

Pro konstrukci nomogramu je třeba znát hodnotu konstanty c, kterou určíme takto:

Volíme pevné y_j, pak c vypočteme podle vzorce (5), kde příslušné x_q vyhovuje podmínce (3). Tutéž hodnotu dostaneme, volíme-li pevná x_i, při čemž c vypočteme opět podle vzorce (5), kde však y_q vyhovuje stejné podmínce jako x_q ve vzorci (6). V případě, že pro různá $j = 1, 2, \ldots, k$ a $i = 1, 2, \ldots, h$ nedostáváme tutéž hodnotu konstanty c, pak vyměníme geometrický průměr za aritmetický a naopak, neboť by se mohlo jednat o závislost typu

$$z = ab^x y^m + c\,.$$

V. $z = a\log x + b\log y + c\,, \qquad x > 0\,, \quad y > 0$

$$h_1 = \log x\,, \qquad h_2 = -\operatorname{sgn}(a)\,z\,,$$
$$\frac{f_3}{g_3} = |a|\,, \qquad \frac{h_3}{g_3} = b\log y + c\,,$$

nebo

$$h_1 = \log y\,, \qquad h_2 = -\operatorname{sgn}(b)\,z\,,$$
$$\frac{f_3}{g_3} = |b|\,, \qquad \frac{h_3}{g_3} = a\log x + c\,.$$

VI. $z = a \log x + by + c\,, \qquad x > 0$

$$h_1 = \log x\,, \qquad h_2 = -\operatorname{sgn}(a)\, z\,,$$

$$\frac{f_3}{g_3} = |a|\,, \qquad \frac{h_3}{g_3} = by + c\,,$$

nebo

$$h_1 = y\,, \qquad h_2 = -\operatorname{sgn}(b)\, z\,,$$

$$\frac{f_3}{g_3} = |b|\,, \qquad \frac{h_3}{g_3} = a \log x + c\,.$$

2. Diskuse srovnání s kanonickým tvarem.

Uvedená srovnání všech šesti typů, která jsou prakticky nejvýhodnější, mají mimo jiné tuto společnou vlastnost: závisle proměnná z je při konstrukci nomogramu na *krajní* stupnici. Tato volba *umožňuje konstrukci* a zároveň *kontrolu konstrukce* kot prostřední stupnice více dvojicemi (na př. při konstrukci koty y_j lze použít dvojic x_i, z_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, h$) a dokonce konstrukci nomogramu vůbec. Kdyby byla závisle proměnná z na prostřední stupnici, pak nejde obecně nomogram sestrojit, protože se hodnoty z_{ij} nemusí v tabulce opakovat.

Při konstrukci stupnice η_2 se může stát, že třetí stupnice (pro η_3) nepadne mezi stupnice pro η_1 a η_2, což je způsobeno tím, že neznáme znaménko příslušné konstanty, vyskytující se v h_2. Tuto nesnáz odstraníme opačným vynášením stupnice η_2 a tím zároveň určíme znaménko dané konstanty. V případě, že v sestrojeném nomogramu má třetí stupnice malý rozsah, *můžeme* zkusit druhou možnost srovnání.

U typů **II.** a **IV.** se mohou vyskytnout při speciálních hodnotách exponentů m, n také $x < 0$, $y < 0$. V těchto případech přejdeme k absolutní hodnotě a použijeme daného srovnání. V případě, že se u typů **II.** a **IV.** vyskytuje nula v rozsahu veličiny x nebo y, pak bude srovnání s kanonickým tvarem vypadat takto:

II. $h_1 = x^m\,, \qquad h_2 = -\operatorname{sgn}(ay^n)(z - b)\,,$

$$\frac{f_3}{g_3} = |ay^n|\,, \qquad \frac{h_3}{g_3} = 0\,.$$

IV. $h_1 = x^m\,, \qquad h_2 = -\operatorname{sgn}(a)(z - c)\,,$

$$\frac{f_3}{g_3} = |ab^y|\,, \qquad \frac{h_3}{g_3} = 0\,.$$

V obou případech dostáváme t. zv. Z-nomogram a ke konstrukci je třeba znát konstantu m (konstantu b u typu **II.** a c u typu **IV.** určíme stejným způsobem jako dříve).

Určení konstanty m:

Sestrojíme graf, v němž vynášíme na osu úseček hodnoty $\log |x|$ a na osu pořadnic hodnoty $\log |z - b|$ pro $j = 1, 2, \ldots, k$. Dostaneme soustavu rovnoběžek, jejichž společná směrnice je hledaná konstanta m. Tu pak stanovíme numericky. Stejně postupujeme u typu **IV**.

Způsob konstrukce nomogramu a vyhodnocování konstant uvedeme v jednotlivých příkladech.

Ze srovnání jednotlivých typů s kanonickým tvarem, uvedených v odstavci 1, vyplývá, že mezi těmito šesti vztahy je úzká souvislost, jak již bylo řečeno v úvodu. Těchto šest typů lze zobrazit spojnicovým nomogramem o třech *vzájemně rovnoběžných* stupnicích, které jsou buď *lineární* nebo *logaritmické*. Jiné vztahy *nemají* totiž tři lineární nebo logaritmické stupnice s jednoduchým argumentem vzájemně rovnoběžné, což vyplývá z rozboru kanonického tvaru (1).

Vzniká nyní otázka, jak z předložené tabulky poznáme, zda tabelovaná funkce je některou z uvedených šesti závislostí a je-li, jak tuto závislost určíme. Typ **I.** poznáme v tabulce 1 tím, že pro pevná y_j jsou závislosti v jednotlivých sloupcích lineární a diference $z_{(i+1)j} - z_{ij}$ jsou pro všechna $j = 1, 2, \ldots, k$ stejné. Totéž platí i pro pevně volená x_i. Zbývajících pět typů verifikujeme výpočtem aditivní konstanty (viz tab. 2).

Tabulka 2.
Aditivní konstanta pro různá

Typ	pevná y a $x_q = \frac{x_p + x_r}{2}$	pevná x a $y_q = \frac{y_p + y_r}{2}$	pevná y a $x_q = \sqrt{x_p \cdot x_r}$	pevná x a $y_q = \sqrt{y_p \cdot y_r}$
I.	$Z = 0$	$Z = 0$	nevychází stejně	nevychází stejně
II.	nevychází stejně a pro $m = 1, Z = 0$	nevychází stejně a pro $n = 1, Z = 0$	vychází stejně	vychází stejně
III.	vychází stejně	vychází stejně	nevychází stejně	nevychází stejně
IV.	nevychází stejně vychází stejně	vychází stejně nevychází stejně	vychází stejně nevychází stejně	nevychází stejně vychází stejně
V.	nevychází stejně	nevychází stejně	$Z = 0$	$Z = 0$
VI.	nevychází stejně $Z = 0$	$Z = 0$ nevychází stejně	$Z = 0$ nevychází stejně	nevychází stejně $Z = 0$

kde

$$Z = z_{pj} + z_{rj} - 2z_{qj} \tag{7}$$

je jmenovatel ve vzorci (5).

Zbývá nyní dokázat, že *neexistují* žádné jiné závislosti kromě typů **II.**, **III.**, **IV.**, které se dají ověřit přímým výpočtem aditivní konstanty (viz tab. 2). V těchto třech případech musí mít závislost tvar

$$z = A\, f(x)\, g(y) + B\,, \tag{8}$$

protože pro všechna pevná y_j musí výpočet aditivní konstanty dávat tutéž hodnotu (o funkcích $f(x)$ a $g(y)$ předpokládáme, že mají derivaci podle příslušné proměnné). Pro pevné y_j přechází rovnice (8) do tvaru

$$z = A_1\, f(x) + B\,. \tag{8_1}$$

Počítáme-li nyní konstantu B způsobem uvedeným v odstavci 1, musí platit rovnice (4), ze které po dosazení z rovnice (8_1) dostáváme pro

aritmetický průměr $$f(x_p)\, f(x_r) = f^2\left(\frac{x_p + x_r}{2}\right), \tag{9_1}$$

geometrický průměr $$f(x_p)\, f(x_r) = f^2(\sqrt{x_p x_r})\,. \tag{9_2}$$

Funkcionální rovnice (9_1), (9_2) musí platit pro všechny dvojice x_p, x_r, z daného intervalu x. Rozřešíme rovnici (9_1); řešení rovnice (9_2) se provádí analogicky. Derivujme parciálně (9_1) podle x_p:

$$f(x_r)\, \frac{\mathrm{d}f(x_p)}{\mathrm{d}x_p} = f(u)\, \frac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u}\,, \quad \text{kde} \quad u = \frac{x_p + x_r}{2}\,. \tag{10_1}$$

Derivujeme-li (9_1) parciálně podle x_r, dostáváme

$$f(x_p)\, \frac{\mathrm{d}f(x_r)}{\mathrm{d}x_r} = f(u)\, \frac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u}\,. \tag{10_2}$$

Srovnáním rovnic (10_1), (10_2) dostáváme

$$f(x_p)\, \frac{\mathrm{d}f(x_r)}{\mathrm{d}x_r} = f(x_r)\, \frac{\mathrm{d}f(x_p)}{\mathrm{d}x_p}\,,$$

odkud plyne

$$\frac{1}{f(x_p)}\, \frac{\mathrm{d}f(x_p)}{\mathrm{d}x_p} = \frac{1}{f(x_r)}\, \frac{\mathrm{d}f(x_r)}{\mathrm{d}x_r}\,. \tag{11}$$

Protože x_p a x_r jsou libovolné, na sobě nezávislé hodnoty z daného intervalu veličiny x, vyhovuje funkce $f(x)$ diferenciální rovnici

$$\frac{1}{f(x)}\, \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = K\,, \tag{11_1}$$

kde K je konstanta.

Řešením diferenciální rovnice (11_1) je

$$f(x) = Ce^{Kx} = Ca^x\,. \tag{12}$$

Řešením funkcionální rovnice (9_2) je pak funkce

$$f(x) = Cx^m\,. \tag{13}$$

Stejné výsledky dostáváme pro funkci $g(y)$ při pevných x_i. Z řešení (12), (13) vyplývá jednoznačnost verifikace typů **II.**, **III.**, **IV.** výpočtem aditivní konstanty.

Ještě je třeba prodiskutovat typy **I.**, **V.**, **VI.**. Pro ně je rovnice (viz tab. 2)

$$Z = z_{pj} + z_{rj} - 2z_{qj} = 0 \tag{14}$$

nutnou podmínkou, jak vyplyne z dalšího. Pro funkci, která tuto podmínku splňuje (při pevném y), musí platit totiž následující funkcionální rovnice:

pro aritmetický průměr $$f(x_p) + f(x_r) = 2\,f\left(\frac{x_p + x_r}{2}\right), \tag{15_1}$$

pro geometrický průměr $$f(x_p) + f(x_r) = 2\,f\left(\sqrt{x_p x_r}\right). \tag{15_2}$$

Řešením rovnice (15_1) je

$$f(x) = K_1(y)\,x + K_2(y)\,,$$

řešením rovnice (15_2) je

$$f(x) = K_1(y)\log x + K_2(y)\,.$$

Řešení rovnic (15_1), (15_2) ukazují, že podmínka (14) *není dostačující* pro určení typů **I.**, **V.**, **VI.**; proto *ověření* typů **V.**, **VI.** provedeme *přímou konstrukcí* nomogramu (typ **I.** uveden dříve). U typu **V.** sestrojíme krajní stupnice podle srovnání v odstavci 1; pak prostřední stupnice musí být logaritmická. U typu **VI.** sestrojíme nomogram podle srovnání v odstavci 1 (pozor na dvojí možnost); pak prostřední stupnice je buď lineární nebo logaritmická. U těchto dvou typů je zvlášť zapotřebí verifikovat všechny koty prostřední stupnice více než dvěma dvojicemi.

Příklady

Příklad 1. Závislost mezi průtokovým množstvím kapaliny Q (l/sec), průměrem potrubí d (mm) a rychlostí kapaliny V (m/sec) je dána tabulkou [3]:

Tabulka 3.

$V = V(Q, d)$

Q \ d	200	250	300	350	400	450	500
80	2,54	1,63	1,13	0,83	0,64	0,50	0,41
100	3,18	2,04	1,42	1,04	0,80	0,63	0,51
120	3,82	2,45	1,70	1,25	0,96	0,75	0,61
140	4,47	2,86	1,98	1,46	1,12	0,88	0,71
160	5,10	3,27	2,26	1,66	1,28	1,01	0,82
180	5,74	3,67	2,55	1,87	1,44	1,13	0,92
200	6,35	4,08	2,83	2,08	1,60	1,26	1,02

Určení typu funkční závislosti (výpočty zaokrouhlovány na dvě desetinná místa):

$$d_p = 200\,, \quad d_r = 500\,, \quad d_q = 350$$

Q	80	100	120	140	160	180	200
aditivní konstanta	0,27	0,34	0,40	0,46	0,55	0,61	0,67

nevyhovuje;

$$Q_p = 80\,, \quad Q_r = 200\,, \quad Q_q = 140$$

d	200	250	300	350	400	450	500
aditivní konstanta	77,04	152,92	—	40,52	—	—	−8,59
Z	−0,05	−0,01	0,00	−0,01	0,00	0,00	+0,01

nevyhovuje, hodnoty Z poukazují na lineárnost veličiny Q (tab. 2);

$$d_p = 200\,, \quad d_r = 450\,, \quad d_q = 300$$

Q	80	100	120	140	160	180	200
aditivní konstanta	−0,01	−0,01	−0,02	+0,01	+0,03	−0,01	0,00

vyhovuje, průměrná hodnota aditivní konstanty je 0,00;

$$Q_p = 80\,, \quad Q_r = 180\,, \quad Q_q = 120$$

d	200	250	300	350	400	450	500
aditivní konstanta	−0,02	−0,05	−0,03	−0,05	0,00	+0,02	+0,05

vyhovuje, průměrná hodnota aditivní konstanty je − 0,01.

Bereme-li v úvahu oba vyhovující výsledky, vezmeme aditivní konstantu nulovou.

Z uvedených výpočtů vyplývá, že se jedná o závislost typu **II.**, t. j.

$$V = aQ^m d^n \,. \tag{16}$$

Použijeme-li srovnání z odstavce 1, pak dostáváme zobrazovací rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0 \,, & \eta_1 &= \alpha \log Q \,, \\ \xi_2 &= \delta \,, & \eta_2 &= -\beta \log V \,, \\ \xi_3 &= \frac{\alpha\delta}{\beta m + \alpha} \,, & \eta_3 &= -\frac{\alpha\beta}{\beta m + \alpha}(n \log d + \log a) \,, \end{aligned}$$

protože konstrukcí krajních stupnic se zjistí, že sgn $m = +1$.

Moduly:

$$\alpha = 60 \,, \quad \beta = 20 \,, \quad \delta = 18 \,.$$

Exponent m určíme z rovnice (viz obr. 1):

$$\xi_3 = 13{,}51 = \frac{54}{m + 3} \,, \quad m \doteq 1 \,.$$

Prostřední stupnice má být logaritmická, což ověříme sestrojením grafu závislosti η_3 na $\log d$. Protože na stupnici veličiny d není přístupný bod $\eta_3 = 0$, vynášíme vzdálenosti bodů, příslušejících jednotlivým kotám d od pevně voleného bodu M přístupného na stupnici (viz obr. 1), t. j. $\eta_3 - A$, kde A je neznámá konstanta. Pak

$$\eta_3 - A = -\frac{1200}{80}(n \log d + \log a) - A \,,$$

$$-\frac{\eta_3 - A}{15} = n \log d + \log a + \frac{A}{15} \,.$$

Sestrojíme závislost $-\dfrac{\eta_3 - A}{15}$ na $\log d$, při čemž směrnice dané přímky je exponent n.

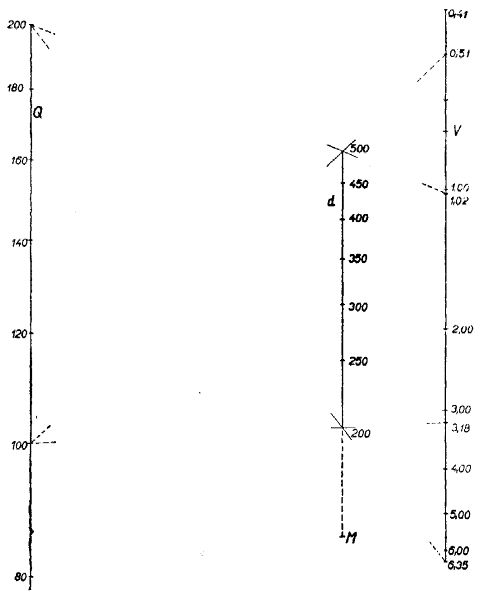
d	200	250	300	350	400	450	500
$\log d$	2,301	2,398	2,477	2,544	2,602	2,653	2,699
$\eta_3 - A$	4,71	7,58	9,99	11,97	13,68	15,27	16,60
$-\dfrac{\eta_3 - A}{15}$	−0,314	−0,505	−0,666	−0,798	−0,912	−1,018	−1,107

Z obr. 2 vyplývá, že stupnice pro d je logaritmická a výpočtem zjistíme, že

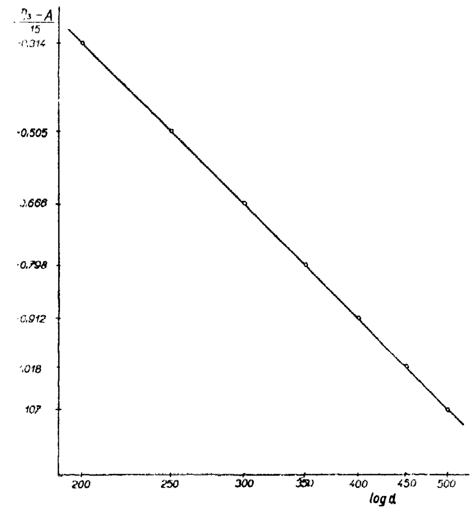
$$n \doteq -2 .$$

Tím rovnice (16) nabývá tvaru

$$V = aQd^{-2} . \qquad (16_1)$$



Obr. 1. Nomogram pro $V = aQ^m d^n$.



Obr. 2.

Konstantu a určíme z tabulky 3 numericky:

pro $Q = 140$

d	200	250	300	350	400	450	500
a	1277	1277	1273	1278	1280	1273	1268

průměrná hodnota $a = 1275$,

pro $d = 350$

Q	80	100	120	140	160	180	200
a	1271	1274	1276	1278	1271	1273	1274

průměrná hodnota $a = 1274$.

Protože v první tabulce byla většina hodnot zaokrouhlena nahoru, volíme

$$a = 1274$$

a výsledný vztah má tvar

$$V = 1274Qd^{-2}\,. \qquad (16_2)$$

Počítáme-li hodnoty V podle vzorce (16_2), jsou rozdíly proti tabelovaným hodnotám maximálně 0,5%.

Příklad 2. Závislost tloušťky olověné desky d (cm) na množství radia m (g) (při 0,5 mm Pt filtru) a bezpečnostní vzdáleností od zdroje v (cm) je dána tabulkou [4]:

Tabulka 4.

$$d = d(m, v)$$

v \ m	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0	10,0
20	10,0	11,5	13,5	15,0	16,0	18,0	19,5
50	6,0	7,5	9,5	11,0	12,5	14,5	16,0
100	3,5	4,5	6,5	8,0	9,5	11,5	13,0
200	1,0	2,0	4,0	5,0	6,5	8,5	10,0
500	0	0	0,5	1,5	3,0	4,5	6,0

Dále je udáno, že tabulka vyhovuje pro $4,5 \leq d \leq 16$.

Určení typu (konstanty zaokrouhlovány na jedno desetinné místo):

Začneme geometrickými průměry, protože se vyskytují v tabulce.

$$v_p = 50\,, \quad v_r = 200, \quad v_q = 100$$

m	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0	10,0
aditivní konstanta	—	−10,5	−8,5	—	—	—	—
Z	0,0	0,5	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0

$$m_p = 0,5\,, \quad m_r = 2,0\,, \quad m_q = 1,0$$

v	20	50	100	200	500
aditivní konstanta	18,0	—	—	2,0	−1,5
Z	−0,5	0,0	0,0	0,5	0,5

Podle hodnot Z lze předpokládat, že daná závislost by mohla být **V.** typu (splněna podmínka nutná). Případný výskyt hodnot $Z = \pm 0{,}5$ může být způsoben tím, že hodnoty v tabulce 4 jsou zaokrouhlovány na 0,5. Ověření **V.** typu provedeme konstrukcí nomogramu (při konstrukci kot prostřední stupnice se snažíme vyhnout hodnotám d, ležícím vně intervalu $\langle 4{,}5; 16 \rangle$). Při kontrole kot prostřední stupnice zbývajícími dvojicemi pamatujeme na to, že hodnoty veličiny d jsou udány s chybou $\pm\ 0{,}25$.

Předpokládáme tudíž, že daná závislost má tvar

$$d = a \lg m + b \lg v + c \,. \tag{17}$$

Zobrazovací rovnice:

$$\xi_1 = 0 \,, \qquad \eta_1 = \alpha \lg m \,,$$
$$\xi_2 = \delta \,, \qquad \eta_2 = -\beta d \,,$$
$$\xi_3 = \frac{\alpha\delta}{\beta a + \alpha} \,, \qquad \eta_3 = -\frac{\alpha\beta}{\beta a + \alpha}(b \lg v + c) \,.$$

Konstrukcí krajních stupnic se totiž zjistí, že $a > 0$.

Moduly:

$$\alpha = 5 \,, \quad \beta = 1 \,, \quad \delta = 15 \,.$$

Jedná se skutečně o závislost (17), jak je vidět z narýsovaného nomogramu.

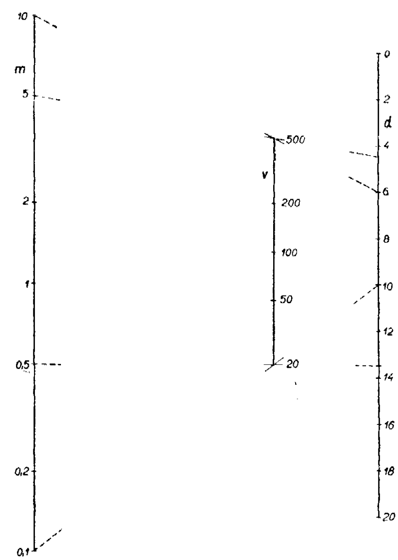
Konstantu a určíme z rovnice

$$\xi_3 = 10{,}46 = \frac{75}{a + 5} \,, \quad a = 2{,}17 \,.$$

Prostřední stupnice má být logaritmická, což ověříme stejným způsobem jako v příkladě 1. Pro konstantu b dostáváme hodnotu

$$b = -\ 4{,}34 \,.$$

Konstanta c je určena numericky z dané tabulky jednak pro $v = 50$ a jednak pro $m = 5{,}0$ (analogickým způsobem jako v př. 1) a má hodnotu



Obr. 3.
Nomogram pro $d = a \lg m + b \lg v + c$.

$$c = 27,\ 94 \,.$$

Tím nabývá rovnice (17) tvaru

$$d = 2{,}17 \lg m - 4{,}34 \lg v + 27{,}94 \,, \tag{17$_1$}$$

nebo

$$0{,}46 d = \lg m - 2 \lg v + 12{,}88 \,, \tag{17$_2$}$$

což souhlasí s výsledkem uvedeným v práci [4]. Hodnoty d počítané podle vzorce (17_1), ležící v intervalu $\langle 4{,}5;\ 16\rangle$, se liší od tabelovaných maximálně o 0,5%.

Příklad 3. Závislost mezi silou T (kg*) v napjaté a silou t (kg*) v ochablé části řemene a úhlem opásání α je dána tabulkou:

Tabulka 5.

$$T = T(t, \alpha)$$

$\alpha°$ \ t	20	40	60	80	100
135	38,686	77,371	116,057	154,742	193,428
140	39,643	79,284	118,927	158,569	198,213
145	40,623	81,246	121,869	162,492	203,116
150	41,628	83,256	124,883	166,511	208,139
155	42,658	85,315	127,973	170,630	213,288
160	43,713	87,425	131,138	174,851	218,564
165	44,794	89,588	134,382	179,176	223,970
170	45,902	91,804	137,706	183,608	229,510
175	47,038	94,075	141,113	188,150	235,188
180	48,201	96,402	144,603	192,804	241,005

Úhel α udáváme v tabulkách pro jednoduchost ve stupňové míře, přestože se při výpočtech používá obloukové míry.

Určení typu (hodnoty zaokrouhlovány na tři desetinná místa):

$$\alpha_p^\circ = 140° , \quad \alpha_r^\circ = 180°, \quad \alpha_q^\circ = 160°$$

t	20	40	60	80	100
aditivní konstanta	0,014	0,007	0,021	−0,081	0,049

vyhovuje (vzhledem k hodnotám v tabulce), průměrná hodnota aditivní konstanty je + 0,002;

$$t_p = 20 , \quad t_r = 100 , \quad t_q = 60$$

$\alpha°$	135	140	145	150	155	160
aditivní konstanta . 10^6	—	−3,143	−6,601	−6,931	—	−7,643
Z	0,000	0,002	0,001	0,001	0,000	0,001

α°	165	170	175	180
aditivní konstanta $. 10^6$	—	—	—	—
Z	0,000	0,000	0,000	0,000

nevyhovuje, hodnoty Z poukazují na lineárnost veličiny t;

$$t_p = 20\,, \quad t_r = 80\,, \quad t_q = 40$$

α°	135	140	145	150	155	160	165
aditivní konstanta	0,002	0,005	0,000	$-0,001$	0,002	$-0,001$	0,000

α°	170	175	180
aditivní konstanta	0,000	0,002	0,000

vyhovuje, průměrná hodnota aditivní konstanty je 0,001.

Daná závislost je **IV.** typu a má tvar:

$$T = at^m b^\alpha\,. \tag{18}$$

Zobrazovací rovnice:

$$\xi_1 = 0\,, \qquad \eta_1 = \beta\alpha\,,$$
$$\xi_2 = \delta\,, \qquad \eta_2 = -\gamma \log T\,,$$
$$\xi_3 = \frac{\beta\delta}{\gamma \log b + \beta}\,, \qquad \eta_3 = -\frac{\beta\gamma}{\gamma \log b + \beta}(m \log t + \log a)\,,$$

protože při konstrukci krajních stupnic se zjistí, že sgn $(\log b) = +1$.

Moduly:

$$\beta = 30\,, \quad \gamma = 30\,, \quad \delta = 18\,.$$

Konstantu b určíme z rovnice (viz obr. 4):

$$\xi_3 = 16{,}05 = \frac{18}{\log b + 1}\,, \qquad b = 1{,}323 \doteq e^{0,28}\,.$$

Prostřední stupnice má být logaritmická, což ověříme stejným způsobem jako v příkladě 1. Vyhodnocením této stupnice zjistíme, že

$$m = 1 \; .$$

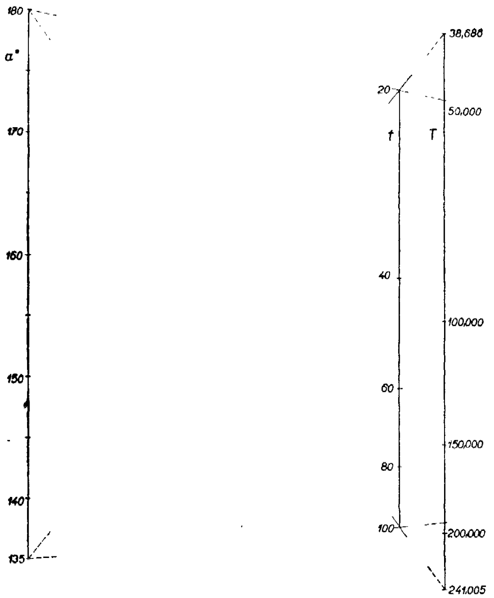
Konstantu a určíme numericky z dané tabulky a dostaneme

$$a = 1 \; .$$

Pak rovnice (18) nabývá tvaru:

$$T = te^{0,28\alpha} \; , \qquad (18_1)$$

což je známý vztah [5], kde hodnota 0,28 je koeficient tření mezi litinoua koženým řemenem.



Obr. 4. Nomogram pro $T = at^m b^\alpha$.

Prof. dr V. Pleskotovi děkujeme za laskavé přečtení rukopisu a cenné rady. Dále děkujeme doc. dr J. Bílkovi, dr L. Jankovi, Ing. F. Kadeřávkovi a jeho spolupracovníkům za užitečné rady a připomínky.

LITERATURA

[1] *Pleskot V.*: Spojnicové nomogramy, JČMF, Praha 1946, 2. vyd.

[2] *Davis D. S.*: Empirical Equations and Nomography, New York, London 1943, 1. vyd.

[3] *Fridman B. E.*: Hydromechanisace zemních prací, Prům. vyd., Praha 1953, str. 38.

[4] *Janko L.*: Acta rad. canc. bohem., 135, VII — 3 (1953).

[5] *Balcar O.*: Části strojové, 3. sešit. SPN Praha, 1952.

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ТРЕМЯ ТАБЕЛИРОВАННЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ ПРИ ПОМОЩИ НОМОГРАММ ИЗ ВЫРАВНЕННЫХ ТОЧЕК

ИРЖИ МИЧКА, ОСКАР ШМИДТ (Jiří Míčka, Oskar Schmidt)

(Поступило в редакцию 8/VI 1956 г.)

В настоящей работе приводится метод определения функциональной зависимости $z = f(x, y)$ из таблицы данных (см. табл. 1) при помощи номограмм из выравненных точек. Было избрано следующих 6 типов зависимостей, образующих органически одно связанное целое (3 параллельные линейные или логарифмические шкалы):

$$\textbf{I.}\ z = ax + by + c ,$$
$$\textbf{II.}\ z = ax^m y^n + b ,$$
$$\textbf{III.}\ z = ab^x c^y + d ,$$
$$\textbf{IV.}\ z = ax^m b^y + c ,$$
$$\textbf{V.}\ z = a \log x + b \log y + c ,$$
$$\textbf{VI.}\ z = a \log x + by + c .$$

Из таблицы сперва определяются — при помощи нумерического критерия соответствующие зависимости, справедливость которых затем проверяется построением номограммы из выравненных точек. Затем из номограммы представляется возможность вычесть соответствеющую зависимость при помощи оценки всех остальных параметров. В заключение, в качестве иллюстрации, приводятся соответствующие примеры.

Zusammenfassung

BESTIMMUNG DER FUNKTIONSABHÄNGIGKEIT ZWISCHEN DREI TABELLIERTEN GRÖSSEN MITTELS FLUCHTLINIENTAFELN

JIŘÍ MÍČKA, OSKAR SCHMIDT

(Eingengangen am 8. Juni 1956.)

In dieser Arbeit ist eine Methode für die Feststellung der Funktionsabhängigkeit $z = f(x, y)$ aus einer Tabelle gegebener Werte (s. Tab. 1) angeführt, die man mittels Fluchtlinientafeln bestimmt. Es wurden folgende 6 Typen organisch zusammenhängender Abhängigkeiten ausgewählt (3 parallele lineare oder logaritmische Skalen):

$$\textbf{I.}\ z = ax + by + c ,$$
$$\textbf{II.}\ z = ax^m y^n + b ,$$
$$\textbf{III.}\ z = ab^x c^y + d ,$$
$$\textbf{IV.}\ z = ax^m b^y + c ,$$
$$\textbf{V.}\ z = a \log x + b \log y + c ,$$
$$\textbf{VI.}\ z = a \log x + by + c .$$

Zuerst bestimmt man aus der Tabelle mittels eines numerischen Kriteriums die zugehörige Funktionsabhängigkeit, die man dann mit Hilfe der Konstruktion einer Fluchtlinientafel verifiziert. Aus dieser Fluchtlinientafel kann man die Funktionsabhängigkeit durch Auswertung aller Parameter feststellen. Zur Illustration sind im letzten Abschnitte einige Beispiele angegeben.