UPRAVENÁ RELAXAČNÍ METHODA

VLADIMÍR PANC

(Došlo dne 10. října 1955.) DT:512.25:518.12

Řešení soustav lineárních algebraických rovnic upravenou relaxační methodou. Nová tabulková úprava a methody zrychlení konvergence relaxačního procesu, které podstatně zkracují praktické provedení výpočtu. Způsob relaxační eliminace.

I. Úvod

Řešení značné části důležitých technických problémů vede nebo lze převést na soustavy lineárních algebraických rovnic. Při větším počtu neznámých veličin bývá přesné řešení této základní soustavy rovnic přímými methodami časově značně náročné, pracné a často při počítacích přístrojích, které jsou k disposici, jen stěží prakticky proveditelné. Kromě toho v mnohých technických úlohách obvykle postačuje vypočíst neznámé veličiny jen s určitou omezenou přesností.

Uvedené skutečnosti daly v inženýrském stavitelství podnět k mnohým pracem zejména z theorie rámových konstrukcí, pro jejichž řešení bylo vytvořeno několik různých method a mnoho jejich obměn. Těchto method lze pak často užít nebo je přizpůsobit pro řešení jiných technických problémů a případně je presentovat v ryze matematické formě bez ohledu na jejich statický či fysikální význam.

II. Relaxační methody

Princip všech úprav relaxačních method tkví v tom, že v dané základní soustavě n lineárních rovnic o n neznámých fixujeme hodnoty $(n - m)$ neznámých $(1 \leq m \leq n)$ a hodnoty zbývajících m neznámých vypočteme ze soustavy m rovnic vybrané z původní základní soustavy. Nejjednodušší a přitom nejobvyklejší je případ $m = 1$, kdy relaxační methody se blíží zkrácené (Gauss-Seidlově) iteraci.

Při $m = 1$ vypočteme v relaxačním procesu pro každou neznámou veličinu nekonečnou řadu, při čemž postačující podmínkou konvergence těchto řad je positivní definitnost matice základní soustavy rovnic. Tím tedy vlastně určujeme v postupných aproximacích takové hodnoty všech neznámých, které přibližně vyhovují základní soustavě rovnic, čili které ruší s určitou přesností veškeré zatěžovací akce. Zatěžovacími akcemi při tom rozumíme pravé strany (absolutní členy) jednotlivých rovnic základní soustavy. Relaxační proces pak ukončíme ve stadiu, kdy residua (zbytky na pravých stranách rovnic) jsou menší než libovolná předem volitelná hodnota. Velikost residuí je zde tedy kriteriem početní přesnosti řešení.

Ve výjimkovém případě, kdy determinant soustavy je nulový, vycházejí buď různým řazením operací v relaxačním procesu různé hodnoty neznámých veličin, t. j. řešení je mnohoznačné, nebo v procesu dospějeme k určitému sporu, což značí, že řešení neexistuje. Tomu odpovídá po statické stránce konstrukce, která není schopna stabilní pružné rovnováhy a které tedy nelze užít za nosnou.

Nejznámější a nejužívanější druhy úprav relaxační methody jsou methoda rozdělování sil a momentů, relaxační methoda Southwellova a methoda postupného rozvodu deformace. Ve všech dalších úpravách se vlastně vychází z některého tohoto druhu. Matematický princip všech těchto typů relaxační methody je stejný, liší se toliko ve výkladu a potom hlavně ve způsobu praktického provedení a uspořádání relaxačního procesu.

V Crossově methodě, které je patrně prvým druhem relaxační methody, a rovněž v methodě postupného rozvodu deformace se relaxační proces provádí obvykle přímo v osovém mnohostranu konstrukce samé, což mnohdy dává výpočtu velmi nepřehledný tvar. U rámových konstrukcí s posuvnými styčníky, kde konvergence řešení bývá zpravidla mnohem pomalejší, je další nevýhodou tohoto způsobu jen nesnadnost užití některé z method zrychlení konvergence relaxačního procesu. Kromě toho se tento způsob vůbec nehodí při dané základní soustavě rovnic s jiným fysikálním významem.

Uvedené nevýhody odstraňuje úprava akademika V. Daška [1], v níž se rozdělování každé veličiny, tedy relaxační proces, provádí v samostatné rozdělovací tabulce. Počet těchto tabulek je stejný jako počet neznámých veličin a souhlasí tedy na př. se stupněm přetvárné neurčitosti konstrukce. Při relaxačním procesu je zde třeba přepisovat rozvedené veličiny z jedné tabulky do příslušných tabulek ostatních. V Southwellově úpravě [2] se naproti tomu celý relaxační proces provádí v tabulce jediné, ve které počet sloupců převyšuje o dva počet neznámých veličin. V jednom z dalších sloupců je zde totiž třeba zaznamenat označení užité operace, ve druhém pak její koeficient, tedy součinitel, jímž je užitá operace vynásobena. Výhodou Southwellovy úpravy je přehlednost relaxačního procesu, možnost zrychlení jeho konvergence a možnost rozdělování téže veličiny několika různými operacemi. Proti tomu nevýhodou je více početních úkonů (sečítání) než v úpravě Daškově a značnou nevýhodou je vlastní výpočet neznámých po ukončení relaxačního procesu, který je mnohdy třeba provést v další zvláštní tabulce. Každá neznámá veličina je zde totiž dána algebraickým součtem součinů koeficientů operací a hodnoty neznámé v příslušné operaci.

III. Navržená tabulková úprava relaxačního procesu

V podané úpravě relaxační methody jsem se snažil zachovat všechny výhody shora uvedených způsobů, odstranit jejich nevýhody a praktické provedení výpočtu podstatně zkrátit jednak omezením písařské i početní činnosti vhodnou tabulkovou úpravou a jednak zrychlením konvergence relaxačního procesu. Výsledkem této práce co do tabulkové úpravy je podobně jako u Southwella jediná relaxační tabulka, ve které se provádí relaxační proces i vlastní výpočet všech neznámých veličin. Přitom každá neznámá veličina se snadno určí z algebraického součtu určitým způsobem označených, na př. podtržených[1], čísel v příslušném sloupci relaxační tabulky. Proti Southwellově úpravě má navržená relaxační tabulka pro týž případ poloviční počet řádek, protože se nezaznamenávají dílčí součty, a méně o dva sloupce. Není zde totiž třeba zaznamenávat označení užitých operací, ani jejich koeficienty, kterými jsou v podané úpravě označené hodnoty v příslušných sloupcích s opačným znaménkem. Pro rušení veličin v určitém sloupci tabulky je zde však třeba zásadně užít vždy jedné a téže operace. Počet různých operací užitých v relaxačním procesu musí souhlasit s počtem neznámých veličin a nemůže být vyšší.

Navržená relaxační tabulka vznikla v podstatě sloučením výhod úpravy akademika Daška a R. V. Southwella.

IV. Methody zrychlení konvergence relaxačního procesu

Ke zrychlení konvergence relaxačního procesu uvádím dva způsoby, a sice „methodu předpínání neznámých" a methodu skupinových operací.

Principem methody přepínání neznámých je zrušení jiné hodnoty, menší nebo větší, než jaká odpovídá příslušnému stadiu relaxačního procesu. Tato methoda má dvě alternativy, které jsem nazval „methoda předpínání neznámých s ohledem na následující operace" a „methoda předpínání neznámých součty náhradních geometrických řad", kterých obou lze užít v témž relaxačním procesu i je kombinovat s methodou skupinových operací.

---

[1]) Prakticky je vhodné provést celý výpočet na čtverečkovaném papíru. Podtržená čísla, která jsou algebraickým součtem všech výše psaných hodnot v témž sloupci až k předchozímu podtrženému číslu, označíme vhodně na př. podtržením červenou tužkou.

Budiž dána základní soustava n rovnic

$$\begin{array}{llr}
(1) & x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = a_{10} & \\
(2) & a_{21}x_1 + \quad x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = a_{20} & \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (1) \\
(k) & a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + \quad x_k + \ldots + a_{kn}x_n = a_{k0} & \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
(n) & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nk}x_k + \ldots + \quad x_n = a_{n0} &
\end{array}$$

Zafixujeme-li na př. v této soustavě hodnoty neznámých x_2 až x_r, t. j. položíme-li $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$, dávají koeficienty při neznámé x_1 v jednotlivých rovnicích příčinky operace $x_1 = +1$ na levé strany všech rovnic. Přitom hlavním příčinkem operace $x_1 = +1$ nazýváme hodnotu vyvozenou touto operací na levé straně rovnice 1 (je to tedy diagonální člen matice soustavy, v našem případě $+1$). Na levých stranách ostatních rovnic vyvodí operace $x_1 = +1$ vedlejší příčinky a_{21} až a_{n1}.

Tab. I. Vzor operační tabulky při užití pouze jednoduchých operací

Způsob (koef.)	Příčiny vyvozené operací v rovnici					
	1	2	...	k	...	n
$x_1 = +1$	1	a_{21}	...	a_{k1}	...	a_{n1}
$x_2 = +1$	a_{12}	1	...	a_{k2}	...	a_{n2}
....	...	...	...	...	...	...
$x_k = +1$	a_{1k}	a_{2k}	...	1	...	a_{nk}
....	...	...	...	...	...	...
$x_n = +1$	a_{1n}	a_{2n}	...	a_{kn}	...	1

Příčinky všech jednoduchých operací odpovídajících dané soustavě sestavíme do t. zv. operační tabulky podle vzoru tab. I. Řádky této tabulky jsou tedy totožné s příslušnými sloupci matice základní soustavy (1)[2]. V každé řádce operační tabulky jsou zaznamenány hodnoty, jimiž přičiňuje neznámá v diagonále matice základní soustavy na levé strany jednotlivých rovnic při hodnotě této neznámé rovné převratné hodnotě diagonálního členu.

[2]) Jestliže diagonální členy matice základní soustavy jsou různé od $+1 : a_{kk} \neq +1$, můžeme buďto každou rovnici (včetně její pravé strany) dělit hodnotou diagonálního členu, čímž uvedeme soustavu do tvaru (1), nebo hodnotou a_{kk} dělíme k-tý sloupec matice základní soustavy, a tak odvodíme jednoduché operace $x_k = \dfrac{1}{a_{kk}}$.

Nyní přikročíme k relaxačnímu procesu, který provedeme v navržené relaxační tabulce podle vzoru tab. II. Každý sloupec této tabulky přísluší jedné rovnici a zároveň neznámé s týmž indexem. V prvé řádce tabulky jsou uvedeny hodnoty pravých stran rovnic, které představují určité zatížení soustavy. Při výpočtu rámcových konstrukcí jsou to na př. nevyrovnané akce zatěžující jednotlivé styčníky a patra. Každou nevyrovnanou akci rušíme operací,

Tab. II. Vzor tabulkové úpravy relaxačního procesu při užití methody předpínání neznámých

1	2	. . .	k	. . .	n
a_{10}	a_{20}	. . .	a_{k0}	. . .	a_{n0}
$\underline{x_1}$ $\longrightarrow$	$-a_{21}x_1$	. . .	$-a_{k1}x_1$	. . .	$-a_{n1}x_1$
$a_{10}-x_1$					
$-a_{12}x_2 \longleftarrow$	$\longleftarrow$ $\underline{x_2}$ $\longrightarrow$	$\longrightarrow$ . . .	$-a_{k2}x_2$	. . .	$-a_{n2}x_2$
	$a_{20}-a_{21}x_1-x_2$				
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$-a_{1k}x_k$	$-a_{2k}x_k$	. . . $\longleftarrow$	$\longleftarrow$ $\underline{x_k}$ $\longrightarrow$	$\longrightarrow$ . . .	$-a_{nk}x_k$
			$a_{k0}-a_{k1}x_1-a_{k2}x_2-\ldots-x_k$		
. . .	. . .	. . .		. . .	. . .
$-a_{1n}x_n$	$-a_{2n}x_n$	. . .	$-a_{kn}x_n$	. . . $\longleftarrow$	$\longleftarrow$ $\underline{x_n}$
					$a_{n0}-a_{n1}x_1-a_{n2}x_2-\ldots-a_{nk}x_k-\ldots-x_n$
0	0	0	0	0	0
x_1	x_2	. . .	x_k	. . .	x_n

která má v příslušném sloupci příčinek + 1 (t. j. nevyrovnanou akci zatěžující rovnici k rušíme operací $x_k = +1$), při čemž rušenou akci rozvádíme do pravých stran ostatních rovnic. To znamená, že v každém sloupci relaxační tabulky stanovíme algebraický součet výše psaných hodnot, který označíme podtržením, a tímto součtem s opačným znaménkem vynásobíme příslušnou řádku operační tabulky. Jestliže chceme rušené akci udělit určité předpětí, změníme o jeho hodnotu tento součet, při čemž hodnotu předpětí ihned zapíšeme pod čáru označující rušenou akci. Hodnoty zavedeného předpětí je totiž třeba dbát při dalším rušení nevyrovnaných akcí v témž sloupci relaxační tabulky.

Tak na př. v prvém sloupci tab. II. bychom bez předpínání rušili zatěžovací akci a_{10}. Zrušíme-li na jejím místě hodnotu x_1, kterou označíme podtržením, zbude na pravé straně rovnice 1 nevyrovnaná akce $a_{10} - x_1$, což je hodnota předpětí. Zrušenou hodnotou s opačným znaménkem, t. j. $(- x_1)$, vynásobíme příčinky operace $x_1 = +1$, čímž vlastně rozvedeme hodnotu x_1 do pravých stran ostatních rovnic.

Alternativa methody předpínání neznámých s ohledem na následující operace spočívá v tom, že si povšimneme účinků operací, kterých dále užijeme, případně pouze té operace, jež má ve sloupci rušené veličiny největší příčinek, a zrušíme přibližně o tolik více nebo méně, udělíme tedy neznámé určité předpětí, aby následující operace toto předpětí zrušily. Předpínáme-li při tomto způsobu pouze pro jednu následující operaci, lze požadované předpětí, ovšem s vyloučením vlivu předpětí při následující operaci, snadno též určit řešením rovnice o jedné neznámé. Chceme-li na př. rušené veličině v prvém sloupci tab. II. udělit předpětí s ohledem na operaci $x_2 = +1$, jíž rušíme nevyrovnané akce ve druhém sloupci, je třeba při prvé operaci zrušit veličinu x_1, pro kterou platí relace

$$a_{10} - x_1 - a_{12}(a_{20} - a_{21}x_1) = 0\,. \tag{2}$$

Ve velmi mnohých případech, jak bude ukázáno na příkladě, postačuje však dobře hodnoty předpětí pouze odhadnout. V praktických případech nebývají v k-tém sloupci tab. I. všechny koeficienty a_{ki} téže velikosti a předpětí veličin rušených v k-tém sloupci tab. II. pak zavádíme jen s ohledem na největší z nich, případně při velmi různé velikosti jednotlivých nevyrovnaných akcí zavedeme předpětí s ohledem na největší akci.

Jestliže by se nám podařilo zvolit předpětí při všech operacích tak, aby součet hodnot v každém sloupci pod podtrženou (zrušenou) veličinou byl roven nule, skončil by se relaxační proces v jediném běhu a zrušená akce v každém sloupci by již byla hodnotou příslušné neznámé. Podle tab. II. z tvaru součtů hodnot pod zrušenou akcí každém sloupci plyne, že výpočet požadovaných předpětí v uvedeném případě je ekvivalentní s řešením dané soustavy rovnic a tedy určení předpětí ohledem na všechny další operace se zahrnutím vlivu předpětí při těchto dalších operacích nemá pro relaxační methodu praktického významu.

Druhá alternativa methody předpínání spočívá v tom, že po provedení dvou až tří běhů relaxací v určitém pořadí, které jsou v podaném řešení vlastně zkrácenou iterací, můžeme poslední rušené veličiny považovat za prvé členy geometrických řad, jejichž kvocient určíme jako aritmetický průměr kvocientů vypočtených ze dvou posledních následujících veličin rušených ve všech sloupcích, a součty takto zjištěných nekonečných geometrických řad rozdělit v dalším stadiu relaxačního procesu. Poněkud lepší účinek na zrychlení konvergence relaxačního procesu dává často tento způsob s provedením tří až čtyř běhů relaxací v určitém pořadí a s kvocientem řad určeným pro každý sloupec zvláště. Této alternativy methody předpínání lze ovšem užít jen tehdy, když pro danou soustavu rovnic je i proces zkrácené iterace konvergentní, byť i sebe pomaleji (kvocient náhradních řad musí být menší než $|1|$). Zmíněnou vlastnost, která je podmíněna positivní definitností matice základní soustavy rovnic, mají však všechny soustavy rovnic, které dávají statické řešení určité konstrukce.

Obě uvedené alternativy methody předpínání neznámých mají v mnohých případech velmi dobrý vliv na zrychlení konvergence řešení. Jejich aplikace bude ukázána na příkladech.

Methoda skupinových operací, respektive její název, pochází od R. V. Southwella. Těsně souvisí se způsobem částečného rozdělování sil a momentů přes dva nebo více prutů. Je to vlastně nahrazování původních neznámých jinými neznámými (viz odst. 16 na str. 87 zmíněné publikace akademika V. Daška).

Zatím co jednoduché operace vyjadřují účinek jednotkové hodnoty jediné neznámé veličiny při ostatních neznámých nulových na levé strany všech rovnic soustavy, principem skupinových operací je určitá lineární kombinace účinků obecně různých hodnot několika nebo i všech neznámých veličin. U rámových konstrukcí značí na př. skupinová operace jistou kombinaci současných přemístění několika různých styčníků, zatím co jednoduchou operací je zde změna pouze jediné souřadnice jediného styčníku.

V podané úpravě se této methody užívá k odvození „hodnotnějších" operací. Všechny jednoduché operace (viz tab. I) odpovídající dané soustavě rovnic nebývají totiž stejně hodnotné. Méně hodnotnou operací rozumíme pak takovou jednoduchou operaci, jejíž vedlejší účinky převyšují značně vedlejší účinky operací ostatních, případně se blíží hodnotě diagonálního členu nebo jej dokonce převyšují[3]). Takovou méně hodnotnou jednoduchou operaci, která by tedy zpomalovala konvergenci relaxačního procesu nahradíme hodnotnější operací skupinovou, jejíž vedlejší účinky (příčinkové koeficienty

Tab. III. Vzor operační tabulky při užití skupinových operací — systém skupinových operací s trojúhelníkovou maticí pro relaxační eliminaci

Příčinky vyvozené operací v rovnici						Při hodnotě neznámých					
1	2	..	k	..	n	x_1	x_2	..	x_k	..	x_n
1	a_{21}	..	a_{k1}	..	a_{n1}	1	0	0	0	0	0
0	1	..	$\bar{a}_{k2}$	..	$\bar{a}_{n2}$	b_{12}	b_{22}	0	0	0	0
0	0	..	.	..	..	..	..	..	0	0	0
0	0	0	1	..	$\bar{a}_{nk}$	b_{1k}	b_{2k}	..	b_{kk}	0	0
0	0	0	0	..	..	..	..	..	..	..	0
0	0	0	0	0	1	b_{1n}	b_{2n}	..	b_{kn}	..	b_{nn}

[3]) Vedlejší účinky operace $x_k = +1$ jsou vyjádřeny hodnotami příčinkových koeficientů a_{ik} ($i = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq k$).

$\bar{a}_{ik}$) jsou obecně menší než vedlejší účinky a_{ik} nahrazované jednoduché operace ($|\bar{a}_{ik}| < |a_{ik}|$). Příčinkové koeficienty $\bar{a}_{ik}$ této skupinové operace lze obvykle snadno určit samostatnou relaxací méně hodnotné jednoduché operace $x_k = + 1$.

Tab. IV. Schema relaxační eliminace

1	2	..	k	..	n
a_{10}	a_{20}	..	a_{k0}	..	a_{n0}
a_{10}	$-a_{21}a_{10}$	..	$-a_{k1}a_{10}$	..	$-a_{n1}a_{10}$
	$\bar{a}_{20}$	..	$-\bar{a}_{k2}\bar{a}_{20}$	..	$-\bar{a}_{n2}\bar{a}_{20}$
		..	..	..	..
			$\bar{a}_{k0}$	..	$-\bar{a}_{nk}\bar{a}_{k0}$
				..	..
					$\bar{a}_{n0}$
a_{10}					
$b_{12}\bar{a}_{20}$	$b_{22}\bar{a}_{20}$				
..	..	..			
$b_{1k}\bar{a}_{k0}$	$b_{2k}\bar{a}_{k0}$	..	$b_{kk}\bar{a}_{k0}$		
..	..	..	..	..	
$b_{1n}\bar{a}_{n0}$	$b_{2n}\bar{a}_{n0}$	..	$b_{kn}\bar{a}_{n0}$	..	$b_{nn}\bar{a}_{n0}$
x_1	x_2	..	x_k	..	x_n

$$
\begin{aligned}
\bar{a}_{20} &= a_{20} - a_{21}a_{10} \\
\bar{a}_{k0} &= a_{k0} - a_{k1}a_{10} - \sum_{i=2}^{i=k-1} \bar{a}_{ki}\bar{a}_{i0} \\
x_1 &= a_{10} - \sum_{k=2}^{k=n} b_{1k}\bar{a}_{k0} \\
x_k &= \sum_{i=k}^{i=n} b_{ki}\bar{a}_{i0} \\
x_n &= b_{nn}\bar{a}_{n0}
\end{aligned}
$$

Pro danou soustavu rovnic existuje kromě systému samých jednoduchých operací ještě nekonečně mnoho systémů operací jednoduchých i skupinových, případně samých operací skupinových, při čemž, pokud je ovšem determinant soustavy od nuly různý, je vždy možno zvolit takový systém operací, při jehož užití je relaxační proces konvergentní. Mezi těmito systémy operací zvláštním případem je systém operací s trojúhelníkovou maticí, při jehož užití relaxační proces konverguje v jediném běhu a nabude tvaru relaxační eliminace. Přitom systém operací s trojúhelníkovou maticí existuje tehdy a jen tehdy, pokud determinant soustavy má hodnotu od nuly různou.

Pro shora uvedenou soustavu n rovnic s nenulovým determinantem existuje tedy systém operací s trojúhelníkovou maticí podle tab. III. Operační tabulkou III. nahradíme operační tabulku I. samých jednoduchých operací a relaxační eliminaci potom provedeme podle schematu daného tab. IV.

Příklady řešení

Příklad 1. Jako příklad užití prvé z uvedených alternativ methody předpínání neznámých uvádím řešení hodnot styčníkových pootočení patrového rámu s neposuv-

Tab. V. Základní soustava rovnic příkladu 1

Rovnice	Levá strana rovnice						Pravá strana
	φ_a	φ_b	φ_c	φ_d	φ_e	φ_f	
a	10,68	3,58				0,76	+4,160
b	3,58	15,86	2,74		0,61		−4,160
c		2,74	8,70	0,61			0
d			0,61	4,86	1,82		0
e		0,61		1,82	9,62	2,38	0
f	0,76				2,38	6,28	0

Tab. VI. Operační tabulka příkladu 1

Způsob (koeficient) operace	Příčinky vyvozené operací v rovnici					
	a	b	c	d	e	f
$\varphi_a = 1/10,68$	1	0,3352				0,0712
$\varphi_b = 1/15,86$	0,2257	1	0,1728		0,0385	
$\varphi_c = 1/\ 8,70$		0,3149	1	0,0701		
$\varphi_d = 1/\ 4,86$			0,1255	1	0,3745	
$\varphi_e = 1/\ 9,62$		0,0634		0,1892	1	0,2474
$\varphi_f = 1/\ 6,28$	0,1210				0,3790	1

Tab. VII. Relaxační proces příkladu 1 — methoda přepínání neznámých s ohledem na následující operace

Rov.:	a	b	c	d	e	f
a_{k0}:	+4,160	−4,160				
	+5,520	−1,850				−0,393
	−1,360					
	+1,433	−6,350	+1,097		+0,244	
		+0,340				
		−0,350	+1,110	−0,078		
			−0,013			
	+0,060				+0,189	−0,500
						+0,107
		−0,032		−0,095	+0,500	−0,124
					−0,067	
			+0,022	−0,173	+0,065	
	+0,154	−0,052				−0,011
	−0,021					
	+0,023	−0,103	+0,018		+0,004	
		+0,009				
		−0,008	+0,027	−0,002		
	+0,004				+0,012	−0,031
						+0,003
		−0,001		−0,003	+0,016	−0,004
					−0,002	
	+0,006	−0,002				0,000
			+0,001	−0,005	+0,002	
Σ:	+5,680	−6,455	+1,138	−0,178	+0,516	−0,532
φ_i:	+0,532	−0,407	+0,131	−0,0366	+0,0536	−0,0847

nými styčníky[4]). Základní soustava rovnic pro tento případ je dána tab. V., ze které sestavíme operační tabulku jednoduchých operací (tab. VI.) záměnou sloupců za řádky a dělením každé řádky hodnotou diagonálního členu, jehož převratnou hodnotou uvedenou v prvém sloupci tab. VI. je dána velikost příslušné neznámé (styčníkového pootočení) v operaci. Relaxační proces provedeme v tab. VII. V tomto případě předpětí při každé operaci byla určována s ohledem na jednu operaci následující. Tak na př. při relaxačním procesu bez předpínání bychom prvou operací $\varphi_a = 1/10{,}68$ rušili nevyrovnanou akci +4,160 zatěžující styčník a (pravou stranu rovnice a). Povšimneme-li si však příčinku vyvozeného v rovnici a následující operací $\varphi_b = 1/15{,}86$, kterou zrušíme nevyrovnanou

[4]) Viz prof. Ing. dr Otakar Novák: Patrový rám v theorii a příkladech, 1944, str. 56 – 60.

akci $-4{,}160$ i příčinek prvé operace v rovnici pro styčník b, plyne dosazením do relace (2): $+4{,}160 - x_1 - 0{,}2257(-4{,}160 - 0{,}3352x_1) = 0$, že při prvé operaci je třeba zrušit veličinu $x_1 = +5{,}520$. Takto zavedeným předpětím, jehož velikost je $4{,}160 - 5{,}520 = -1{,}360$, dosáhneme snížení nevyrovnané akce, kterou bude třeba později zrušit ve styčníku a, a tedy zrychlení konvergence řady pro neznámé styčníkové pootočení φ_a. Protože však hodnota každé rušené nevyrovnané akce se projeví i v rovnicích pro ostatní styčníky, zrychlí předpětí byť i jediné veličiny konvergenci řad pro všechny neznámé a tím i celého relaxačního procesu.

Ve druhé řádce tab. VII. rušíme tedy veličinu $+5{,}520$. Tím v ostatních rovnicích přibudou přídavné akce, které určíme vynásobením příčinků operace φ_a uvedených v tab. VI. hodnotou rušené veličiny s opačným znaménkem, t. j. součinitelem $-5{,}520$. Přitom hodnota předpětí $-1{,}360$ značí nevyrovnanou akci, která zůstává v rovnici pro styčník a a algebraicky se sčítá s přídavnými akcemi vyvozenými v této rovnici následujícími operacemi.

V řešeném případě nabyly nevyrovnané akce zanedbatelných hodnot po užití třinácté operace a relaxační proces byl tedy ukončen. Hodnoty neznámých stanovíme z algebraického součtu podtržených (rušených) veličin v každém sloupci násobením převratnou hodnotou příslušného diagonálního členu. Tak na př. pro styčníkové pootočení φ_a platí $\varphi_a = 1/10{,}68 \,.\, (+5{,}520 + 0{,}154 + 0{,}006) = +5{,}680/10{,}68 = +0{,}532$. Pro dosažení téže přesnosti s užitím iterací bylo třeba sedmi iteračních koloběhů, což odpovídá $7 \,.\, 6 = 42$ operacím.

Příklad 2. Příkladem užití druhé alternativy methody předpínání je řešení styčníkových a prutových přetvoření rámové konstrukce zatížené vodorovně[5]). Tomuto případu odpovídá základní soustava rovnic podle tab. VIII. a operační tabulka jednoduchých operací podle tab. IX. Při relaxačním procesu (tab. X.) byly provedeny tři relaxační běhy bez předpínání (zkrácená iterace) se zaokrouhlováním rozváděných veličin na celé desítky a čtvrtý pomocný s rozváděním pouze do pravé strany tabulky pro zjištění prvého členu a kvocientu náhradních geometrických řad. Přitom hodnoty rozváděné (rušené) při třetím iteračním běhu jsou dány podtrženými veličinami ve 14. až 21. řádce tab. X. (na př. pro styčník a hodnota $+7830$) a hodnoty odpovídající čtvrtému pomocnému běhu bez předpínání jsou uvedeny v prvé řádce tab. XI. (na př. pro styčník a hodnota $+4080$). V tab. XI. je též proveden výpočet kvocientu a součtu náhradních geometrických řad, který rozvedeme na místě příslušných hodnot pomocného běhu. Tak na př. pro styčník a vypočteme kvocient $q = 4080/7830 = 0{,}52$ a součet náhradní geometrické řady $\Sigma = 4\,080 \,.\, \dfrac{1}{1 - 0{,}52} = 8490$. Hodnotu $+8490$, rozvedeme potom operací φ_a na místě hodnoty $+4080$. Při této operaci je tedy uděleno předpětí $+1 - 1160 + 2195 + 3045 - 8490 = -4409$.

Jak již bylo řečeno, součty náhradních geometrických řad je v mnohých případech možno prostě odhadnout. Dále pak provádíme relaxační proces s užitím předpínání podle prvé alternativy této methody, při čemž vždy rozvádíme přibližně největší nevyrovnanou akci. V řešeném příkladě nevyrovnané akce nabyly zanedbatelných hodnot po užití 40. operace. Hodnoty neznámých určíme potom stejně jako v předchozím případě. Při užití iterací bylo dosaženo stejné přesnosti až ve 12 iteračních koloběžích, což odpovídá $12 \,.\, 8 = 96$ operacím.

[5]) Viz zmíněnou monografii prof. Ing. dr O. Nováka, str. 173–174.

Tab. VIII. Základní soustava rovnic příkladu 2

Rov.:	Levá strana rovnice								Pravá strana
	φ_a	φ_b	φ_c	φ_d	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	
a	20,82	2,32			−11,67	−6,96			0
b	2,32	11,10	1,34			−6,96	−4,02		0
c		1,34	8,42	0,98			−4,02	−2,94	0
d			0,98	4,15				−2,94	0
I	−11,67				23,34				20 655
II	− 6,96	−6,96				13,92			11 025
III		−4,02	−4,02				8,04		6,615
IV			−2,94	−2,94				5,88	2 205

Tab. IX. Operační tabulka příkladu 2

Způsob (koeficient) operace	Příčinky vyvozené operací v rovnici							
	a	b	c	d	I	II	III	IV
$\varphi_a = 1/20{,}82$	1	0,11143			−0,56052	−0,33429		
$\varphi_b = 1/11{,}10$	0,20901	1	0,12072			−0,62703	−0,36216	
$\varphi_c = 1/\ 8{,}42$		0,15914	1	0,11639			−0,47743	−0,34917
$\varphi_d = 1/\ 4{,}15$			0,23614	1				−0,70843
$\psi_1 = 1/23{,}34$	−0,5				**1**			
$\psi_2 = 1/13{,}92$	−0,5	−0,5				1		
$\psi_3 = 1/\ 8{,}04$		−0,5	−0,5				1	
$\psi_4 = 1/\ 5{,}88$			−0,5	**−0,5**				1

Tab. X. Relaxační proces příkladu 2 — methoda předpínání neznámých součty náhradních geometrických řad

Rov.:	*a*	*b*	*c*	*d*	I	II	III	IV
a_{k0}	0	0	0	0	+20 655	+11 025	+6 615	+2 205
	+10 325				+20 650			
					+5			
	+5 510	+5 510				+11 020		
						+5		
		+3 305	+3 305				+6 610	
							+5	
			+1 100	+1 100				+2 200
								+5
	+15 830	−1 764			+8 873	+5 292		
	+5							
	−1 474	+7 050	−851			+4 421	+2 553	
		+1						
		−565	+3 550	−413			+1 695	+1 240
			+4					
			−163	+690				+489
				−3				
	+4 440				+8 880			
					−2			
	+4 860	+4 860				+9 720		
						−2		
		+2 125	+2 125				+4 250	
							+3	
			+865	+865				+1 730
								+4
	+7 830	−872			+4 389	+2 617		
	+1							
	−1 160	+5 550	−670			+3 480	+2 010	
		−1						
		−344	+2 160	−251			+1 031	+754
			+1					
			−144	+610				+432
				+4				
	+2 195				+4 390			
					−3			
	+3 045	+3 045				+6 090		
						+5		
		+1 520	+1520				+3 040	
							+4	
			+595	+595				+1 190

	+8 490	−946			+4 759	+2 838		
	−4 409							
	−2 462	+11 780	−1 422			+7 386	+4 266	
		−8 506						
		−804	+5 050	−588			+2 411	+1 763
			−4 500					
			−321	+1 360				+963
				−1 349				
	+2 375				+4 750			
					+6			
	+4 775	+4 775				+9 550		
						+679		
		+3 380	+3 380				+6 760	
							−79	
			+1 380	+1 380				+2 760
								−34
	+334	−1 600	+193			−1 003	−579	
		+445						
	+800	−89			+448	+267		
	−187							
		−400	−400				−800	
							+142	
		+56	−350	+41			−167	−122
			+82					
	+227				+454			
			−80	−80				−160
								+4
	−50	−50				−100		
						+43		
	+13	−60	+7			−38	−22	
		+22						
		−25	−25				−50	
							+3	
		+2	−14	+2			−7	−5
			−2					
			+2	−10				−7
				+4				
			−4	−4				−8
Σ:	+32 950	+22 720	+10 396	+2 650	+39 124	+36 280	+19 810	+7 712
φ_i; ψ_i:	+1 583	+2 047	+1 235	+639	+1 676	+2 606	+2 464	+1 312

Tab. XI. Výpočet součtů náhradních geometrických řad pro relaxační proces příkladu 2

Rovnice	a	b	c	d	I	II	III	IV
Prvý člen řady	4 080	3 765	1 517	422	2 284	3 730	2 092	829
Kvocient q	0,52	0,68	0,70	0,69	0,52	0,61	0,69	0,70
$1/(1-q)$	2,08	3,13	3,33	3,23	2,08	2,56	3,23	3,33
Σ náhr. řady	8 490	11 780	5 050	1 360	4 750	9 550	6 760	2 760

Závěr

Uvedený způsob úpravy relaxační methody byl vyzkoušen na mnoha praktických příkladech, jimiž byly prokázány jeho velké výhody spočívající v úspoře práce a značném zkrácení doby potřebné k řešení.

Co se týče postupu řazení jednotlivých operací v relaxačním procesu, lze vyslovit dvě obecné zásady, jejichž respektování zpravidla urychluje konvergenci řešení. Při přibližně stejně hodnotných operacích, ať jednoduchých či skupinových, rušíme vždy v prvém pořadí největší z nevyrovnaných veličin a při zhruba stejných hodnotách nevyrovnaných veličin užíváme vždy nejdříve operací méně hodnotných. Podrobnější rozbor vhodného řazení jednotlivých operací se vymyká rámci tohoto pojednání a ostatně každý, kdo uvedené methody užije, po praxi získané vyřešením několika soustav rovnic sám připadne na nejvhodnější postup ve speciálních případech.

Vhodnost užití některé z uvedených method zrychlení konvergence relaxačního procesu závisí na několika okolnostech.

V běžném případě soustavy rovnic, jejíž determinant není blízký nule a jíž odpovídá systém dosti hodnotných jednoduchých operací, při čemž soustava má být řešena jen pro jeden systém pravých stran (pro jediné „zatížení"), je vhodná methoda předpínání neznámých s jednou z uvedených alternativ, případně jejich kombinací, pokud nám postačuje přesnost získaných hodnot neznámých rovná přesnosti užitého počítacího přístroje — na př. při užití 25 cm logaritmického pravítka nebo s omezením násobků a podílů na tři platné cifry při užití počítacího stroje dosáhneme v běžných případech přesnosti výsledků větší než 2%.

Jestliže požadujeme větší přesnost výsledků a přitom celý výpočet chceme nebo můžeme provést na př. pouze na tři platné cifry, nebo v případě, že touž soustavu rovnic máme řešit pro několik různých systémů pravých stran (několik různých zatížení), je vhodná methoda skupinových operací kombinovaná případně s methodou předpínání neznámých nebo i relaxační eliminace, která má v uvedených případech proti Gaussově eliminaci některé přednosti. Větší přesnosti výsledků, než jaká odpovídá užitému počítacímu přístroji, dosáhneme pak velmi snadno postupnými aproximacemi.

Početní kontroly v řešení podle navržené úpravy je možno dobře provádět v jednom připojeném sloupci k uvedeným tabulkám jako kontroly součtové, a sice algebraickým součtem hodnot v každé řádce operační i relaxační tabulky. Hodnoty rozdělované v relaxační tabulce označené podtržením je ovšem třeba zavést do těchto součtů s opačným znaménkem, nebo v operační tabulce je třeba pokládat jednotky v diagonále matice za záporné.

LITERATURA

[1] *V. Dašek*: Výpočet rámových konstrukcí rozdělováním sil a momentů (1951).

[2] *R. V. Southwell*: Relaxations Methods in Engineering Science (1940).

Резюме

НОВОЕ ВИДОИЗМЕНЕНИЕ РЕЛЯКСАЦИОННОГО МЕТОДА

ВЛАДИМИР ПАНЦ (Vladimír Panc)

(Поступило в редакцию 10/X 1955 г.)

Предлагаемая статья содержит видоизменение релаксационного метода, который был разработан автором с целью сохранения всех выгод существующих видоизменений реляксационных методов, устранения их отдельных невыгод и существенного сокращения практического проведения расчетов частью ограничением излишней писарской и счетной работы полезным табличным видоизменением, частью ускорением сходимости реляксационного процесса.

Предлагаемая реляксационная таблица, в которой проводится реляксационный процесс и собственный расчет всех неизвестных, возникла по существу соединением выгод видоизменений, которые разработали академик V. Dašek и R. V. Southwell. Для ускорения сходимости реляксационного процесса в работе приводятся два метода, а именно ,,метод предварительно напряженных неизвестных`` в двух альтернативах — ,,метод предварительно напряженных неизвестных по отношению к следующим операциям`` и ,,метод предварительно напряженных неизвестных применением сумм подставных геометрических рядов`` — и метод групповых

операций, который имеет здесь несколько иное значение, чем какое придает ему R. V. SOUTHWELL, называя его теми же словами. Система групповых операций с треугольной матрицей сводится к реляксационной элиминации, которая приносит с собой при определенных проблемах некоторые выгоды по сравнению с элиминацией Гаусса.

Статья дополнена двумя подробными численными примерами, на которых проверяются большие выгоды видоизменения автора, основывающиеся на сбережении работы и на значительном сокращении времени, потребного к решению. В заключении статьи приводятся обстоятельства, оказывающие влияние на целесообразность применения того или другого метода ускорения сходимости решения.

Zusammenfassung

DIE VERBESSERTE RELAXATIONSMETHODE

VLADIMÍR PANC

(Eigegangen am 10. Oktober 1955.)

Die vorliegende Abhandlung umfasst eine vom Versfasser stammende Verbesserung der Relaxationsmethode, die mit dem Ziele ausgearbeitet wurde, alle Vorteile sämtlicher Gattungen von Relaxationsmethoden aufrechtzuerhalten, etwaige Nachteile dieser Methoden auszuscheiden und gleichzeitig eine grundsätzliche Verkürzung der praktischen Durchführung von statischen Berechnungen durch Verminderung unnötiger Schreib- und Rechentätigkeit mittels eines zweckdienlichen tabellarischen Rechenvorganges sowie einer Konvergenzbeschleunigung des Relaxationsprozesses zu erreichen.

Die vom Verfasser entworfene Relaxationstabelle, in der der Relaxationsprozess wie auch die eigentliche Auflösung aller unbekannten Grössen durchgeführt wird, entstand im Grundsatz genommen durch Verbindung der Vorteile, die die Methode vom Akademiker V. DAŠEK und die von R. V. SOUTHWELL darbieten. Zur Beschleunigung der Konvergenz des Relaxationsprozesses werden vom Verfasser zwei verschiedene Verfahren angeführt, nämlich die Methode der sogenannten Vorspannung der Unbekannten und die Methode der Gruppenoperationen. Die erstgenannte Methode wird in zwei Alternativformen vorgeführt, erstens als ,,die Methode der Vorspannung der Unbekannten mit Rücksicht auf die folgenden Operationen'' und zweitens als ,,Methode der Vorspannung der Unbekannten mittels der Summen von geometrischen Ersatzreihen''. Die Methode der Gruppenoperationen wird hier vom Verfasser

in einer anderen, von der von R. V. Southwell gleichlautend benannten Methode sich einigermassen unterscheidenden Bedeutung angeführt. Das System der Gruppenoperationen mit einer Dreieckmatrix führt dann zu einer Relaxationselimination, die in bestimmten Aufgaben gegenüber der Gauss'schen Elimination gewisse Vorteile mitbringt.

Die vom Verfasser ausgearbeitete Berechnungsweise wird an Hand von zwei ausführlichen numerischen Beispielen erläutert, womit gleichfalls auch die grossen, aus der beträchtlichen Arbeitersparnis und Verkürzung der für die Lösung benötigten Zeit sich ergebenden Vorteile dieser neuen Methode nachgewiesen werden sollen. Zuletzt werden noch einige Umstände aufgezählt, die die Zweckmässigkeit der Anwendung derjenigen zur Beschleunigung der Konvergenz der Lösung dienenden Methode beeinflussen vermögen.