Václav Doležal

Konstrukce „positivně reálných funkcí“

Aplikace matematiky, Vol. 1 (1956), No. 3, 200–215

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102529`

KONSTRUKCE „POSITIVNĚ REÁLNÝCH FUNKCÍ“

VÁCLAV DOLEŽAL

(Došlo dne 2. prosince 1955.) DT : 517.51

Článek je věnován methodám konstrukce positivně reálných funkcí, které hrají důležitou roli v theorii lineárních elektrických obvodů. Jsou tu řešeny tyto otázky: 1. sestrojení positivně reálné funkce, jejíž reálná část na imaginární ose je rovna dané funkci, splňující jisté podmínky, 2. sestrojení positivně reálné funkce, jejíž reálná část na imaginární ose aproximuje danou spojitou funkci s předepsanou přesností.

Úvod

V theorii pasivních lineárních systémů, t. j. takových, které neobsahují zdroj energie, ať elektrických, mechanických nebo akustických, hrají důležitou roli t. zv. „positivně reálné funkce“. Ukazuje se, že lineárním systémům lze přiřaditi jisté charakteristické funkce komplexní proměnné λ, které popisují jejich dynamické chování, a které závisí na parametrech a struktuře systému.

Působí-li totiž na takový systém nějaká „síla“, vyvolá v místě působení jistou „výchylku“, která při pevných počátečních podmínkách je „silou“ jednoznačně určena. Studiem tohoto přiřazení „síla—výchylka“ možno dokázat, že je lze charakterisovati pomocí těch funkcí komplexní proměnné, jejichž singularitami v otevřené komplexní rovině jsou pouze póly, a které mají tu vlastnost, že 1. libovolným dvěma konjugovaným hodnotám argumentu odpovídají konjugované funkční hodnoty, 2. každému argumentu s kladnou reálnou částí odpovídá funkční hodnota též s kladnou reálnou částí.

Konkretně dospějeme k takovým funkcím na příklad při vyšetřování chování vstupu anten, vlnovodů, membran reproduktorů a pod.

Největší důležitost z této třídy funkcí mají pak funkce racionální, které nazýváme „*positivně reálnými funkcemi*“ (dále PRF). K těmto funkcím dospějeme při vyšetřování systémů se „soustředěnými parametry“, t. j. systémů, které jsou vytvořeny z konečného počtu základních prvků. Takovými jsou na př. v elektrotechnice sítě, sestavené z odporů, kondensátorů, vlastních a vzájemných indukčností. Jejich charakteristické funkce nazývají se zde *impedance* a *admitance*. Bylo dokázáno (Brune, Réza [2]) též naopak, že je-li dána PRF $f(\lambda)$, pak možno sestrojiti systém se soustředěnými parametry tak, že jeho charakteristická funkce bude rovna $f(\lambda)$, čili, jak říkáme, je možno $f(\lambda)$ „*realisovat*". Tyto methody nazývají se synthesou obvodů.

Zaveďme si označení: buď Γ množina všech komplexních čísel λ, pro které jest $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $\bar{\Gamma}$ pak její uzávěr, t. j. množina všech λ, pro které $\operatorname{Re}\lambda \geqq 0$ a bodu ∞. Pak můžeme vysloviti definici PRF takto:

Řekneme, že $f(\lambda)$ je PRF, jestliže

1) *$f(\lambda)$ je racionální funkcí λ,*

2) *pro každé $\lambda \in \Gamma$, $\lambda \neq$ pólu $f(\lambda)$ platí*

$$\overline{f(\lambda)} = f(\bar{\lambda}) \quad a \quad \operatorname{Re} f(\lambda) > 0 .$$

Pro tyto PRF lze dokázat řadu vět, z nichž základní význam má tato

Věta 1. *Je-li $f(\lambda)$ PRF, pak*

1. *$f(\lambda)$ nemá ani pólů ani nul v Γ,*

2. *případné póly na imaginární ose nebo v ∞ jsou jednoduché s reálnými kladnými residui,*

3. *jsou-li $i\omega_m$ $(0 < \omega_1 < \omega_2 \dots < \omega_p < \infty)$ její póly na imaginární ose, pak platí*

$$f(\lambda) = k_\infty \lambda + \sum_{m=1}^{p} \frac{2k_m\lambda}{\lambda^2 + \omega_m^2} + \frac{k_0}{\lambda} + \psi(\lambda) ,$$

kde k_0, $k_\infty \geqq 0$, $k_m > 0$ a kde $\psi(\lambda)$ je v $\bar{\Gamma}$ holomorfní a je PRF, pokud $\psi(\lambda) \not\equiv 0$.

Pro každé $\omega \neq 0$, ∞, ω_m jest $\operatorname{Re}\psi(i\omega) = \operatorname{Re} f(i\omega)$.

(Důkaz viz na př. [1].)

Obraťme se nyní k otázkám, kterými se budeme v tomto článku zabývat. Prvým naším úkolem bude nalézti podmínky, za kterých bude daná funkce reálnou částí nějaké PRF na imaginární ose, dále pak sestrojení takové PRF. Tato otázka se vyskytuje při synthese obvodů, zejména pak při synthese $2n$-pólů. Z věty 1 je beze všeho patrno, že bude-li možno takovou PRF sestrojit, pak že řešení nebude jediné, leda že bychom kladli další podmínku, aby sestrojená PRF byla v $\bar{\Gamma}$ holomorfní.[1]) Připojíme-li tento požadavek, zaručíme tím, jak uvidíme, jednoznačnost řešení, přičemž fysikální podstata věci nikterak neutrpí. Lze totiž ukázat, že charakteristická funkce každého „technického" systému (t. j. systému s vesměs dissipativními elementy), je v $\bar{\Gamma}$ holomorfní.

[1]) Pojem „holomorfní funkce" vztahuje se zpravidla na oblast, t. j. otevřenou souvislou množinu. V případě uzavřené množiny $\bar{\Gamma}$ rozumíme rčením „$f(\lambda)$ je holomorfní v $\bar{\Gamma}$", že existuje oblast $G \supset \bar{\Gamma}$ tak, že $f(\lambda)$ je holomorfní v G.

Druhým naším úkolem bude nalezení podmínek, při jejichž splnění danou funkcí $u(\omega)$ bude možno sestrojiti PRF $Z(\lambda)$ tak, že funkce $\operatorname{Re} Z(i\omega)$ bude aproximovat $u(\omega)$ s libovolnou předepsanou přesností. Fysikální význam řešení této otázky je v tom, že umožní sestrojení lineárního systému se soustředěnými parametry, který bude s libovolnou přesností „nahrazovat" nějaký obecný lineární systém, o němž není známo nic více, než reálná část jeho charakteristické funkce na imaginární ose, třebas experimentálně zjištěná.

Tak na př. ve slaboproudé elektrotechnice bude možno sestrojiti „napodobeniny" anten, kabelů a pod. z naměřených hodnot ohmické složky impedance nebo admitance, což má význam při konstrukci výhybek, filtrů atd.

Uvedeme zde celkem tři methody aproximace. Věta 5, na které je založena prvá methoda, je jistým zobecněním Gonzálezovy věty, kteréžto zobecnění je vhodnější pro praktickou aplikaci. Nadto dokážeme větu 5 přímější cestou než v práci [3].

Část I.

Nejprve zavedeme si pro stručnost vyjadřování některá označení. Buď Π systém všech PRF v Γ holomorfních. Nechť K značí množinu všech čísel z, pro která $|z| < 1$, $\bar{K}$ pak její uzávěr, t. j. množinu všech čísel z, pro něž $|z| \leqq 1$, a konečně buď $\bar{K} - K$ jejich rozdíl.

Jak známo, platí toto tvrzení: (jeho důkaz viz na př. [4], str. 200).

Je-li $f(\zeta)$ reálná funkce, definovaná a spojitá na $\bar{K} - K$, potom existuje funkce $F(z)$, která je holomorfní v K, jejíž $\operatorname{Re} F(z)$ je spojitá v $\bar{K}$ a pro niž je $\operatorname{Re} F(\zeta) = f(\zeta)$ pro každé $\zeta \in \bar{K} - K$. Všechny takové funkce $F(z)$ lze vyjádřit Schwarzovým integrálem

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \, d\varphi + iC ,$$

kde je $z \in K$, $\zeta = e^{i\varphi}$, C reálná konstanta.

Všimněme si případu, kdy funkce $f(\zeta)$ splňuje podmínku $f(\zeta) = f(\bar{\zeta})$ pro každé $\zeta \in \bar{K} - K$, t. j. kdy $f(e^{i\varphi})$ je sudou funkcí φ. Pak platí pro $z \in K$:

$$\overline{F(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\varphi}) \frac{e^{-i\varphi} + \bar{z}}{e^{-i\varphi} - \bar{z}} \, d\varphi - iC = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\psi}) \frac{e^{i\psi} + \bar{z}}{e^{i\psi} - \bar{z}} \, d\psi - iC .$$

Bude tedy platit $\overline{F(z)} = F(\bar{z})$ tehdy a jen tehdy, když $C = 0$. Možno tedy vysloviti pro naše účely důležitou větu:

Věta 2. *Buď $f(\zeta)$ reálná funkce, definovaná a spojitá na $\bar{K} - K$, která pro každé $\zeta \in \bar{K} - K$ splňuje rovnost $f(\zeta) = f(\bar{\zeta})$. Pak existuje jediná funkce $F(z)$, která splňuje tyto podmínky:*

1. *je holomorfní v K,*

2. *pro každé $z \in K$ je $\overline{F(z)} = F(\bar{z})$;*

3. Re $F(z)$ *je spojitá v* $\bar{K}$ *a platí* Re $F(\zeta) = f(\zeta)$ *pro každé* $\zeta \in \bar{K} - K$.[2])

Tato funkce $F(z)$ je pak v bodech K definována integrálem

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\varphi \quad (\zeta = e^{i\varphi}) \,. \tag{1}$$

Větu 2 doplníme ještě tvrzením:

Věta 2a. *Splňuje-li $f(\zeta)$ podmínky věty 2 a nadto je $f(\zeta) \not\equiv 0$, $f(\zeta) \geqq 0$ všude v $\bar{K} - K$, pak pro každé $z \in K$ platí* Re $F(z) > 0$.

Toto tvrzení plyne bezprostředně z věty o minimu harmonické funkce Re $F(z)$ v K.[3])

Na základě odvozených vztahů můžeme vysloviti obdobná tvrzení, vztahující se na Γ místo na K. Platí tato věta:

Věta 3. *Buď $U(\omega)$ reálná sudá funkce ω, definovaná na $\langle -\infty, \infty \rangle$, která je tam všude spojitá (t. j. pro každé $\omega \in \langle -\infty, \infty \rangle$ existuje vlastní* $\lim\limits_{\xi \to \omega} U(\xi) = U(\omega)$).

Pak existuje jediná funkce $Z(\lambda)$, která splňuje podmínky:

1. *je holomorfní v Γ;*

2. *pro každé $\lambda \in \Gamma$ je $\overline{Z(\lambda)} = Z(\bar{\lambda})$;*

3. Re $Z(\lambda)$ *je spojitá v $\bar{\Gamma}$ a pro každé ω reálné platí* Re $Z(i\omega) = U(\omega)$, *a* Re $Z(\infty) = U(\infty)$.

Tato funkce $Z(\lambda)$ je pak pro $\lambda \in \Gamma$ definována integrálem

$$Z(\lambda) = \frac{2\lambda}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{U(\omega) \, \mathrm{d}\omega}{\omega^2 + \lambda^2} \,. \tag{2}$$

Věta 3a. *Je-li nadto $U(\omega) \not\equiv 0$ a všude $U(\omega) \geqq 0$, pak pro každé $\lambda \in \Gamma$ je* Re $Z(\lambda) > 0$.

Důkaz. Uvažme, že transformace $z = \dfrac{1 - \lambda}{1 + \lambda}$ zobrazí prostě Γ na K, imaginární osu λ roviny na $\bar{K} - K - \{1\}$, bod ∞ do bodu -1. Bod $i\omega$ se zobrazí na bod $e^{i\varphi}$, přičemž platí vztah $\omega = -\operatorname{tg} \dfrac{\varphi}{2}$.

---

[2]) Platí-li dokonce, že funkce $f(\zeta)$ splňuje Lipschitzovu podmínku, t. j. že existují pro ni pevná čísla $M > 0$ a $0 < \alpha \leqq 1$ tak, že pro všechna $\zeta_1, \zeta_2 \in \bar{K} - K$ je $|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leqq M|\zeta_1 - \zeta_2|^\alpha$, pak lze dokázat, že $F(z)$ bude spojitá v $\bar{K}$.

[3]) Větu o maximu a minimu harmonické funkce viz na př. [4], str. 188.

Definujme nyní funkci $f(\zeta)$ na $\bar{K} - K$ předpisem: je-li $\varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle$, klaďme $f(e^{i\varphi}) = U(-\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi) = U(\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi)$. Zřejmě potom $f(\zeta)$ bude spojitá na $\bar{K} - K$. Existuje tedy k $f(\zeta)$ funkce $F(z)$, která má vlastnosti z věty 2. Odtud však vyplývá, že položíme-li $Z(\lambda) = F\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)$, bude mít $Z(\lambda)$ všechny vlastnosti z věty 3, a že též platí věta 3a.

Zbývá dokázat vzorec (2).

Zvolme tedy bod $\lambda_0 \in \Gamma$, kterému odpovídá bod $z_0 = \frac{1-\lambda_0}{1+\lambda_0}$. Pro příslušnou funkční hodnotu platí:

$$Z(\lambda_0) = F(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta) \frac{\zeta + z_0}{\zeta - z_0} \, d\varphi .$$

Zřejmě platí

$$Z(\lambda_0) = \lim_{\eta \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta} f(\zeta) \frac{\zeta + z_0}{\zeta - z_0} \, d\varphi , \quad \eta > 0 .$$

Transformujme integrál na pravé straně substitucí $\zeta = e^{i\varphi} = \frac{1 - i\omega}{1 + i\omega}$. Snadno se přesvědčíme, že platí:

$$\frac{\zeta + z_0}{\zeta - z_0} \, d\varphi = 2\left\{\frac{1}{i\omega - \lambda_0} + \frac{i\omega}{1 + \omega^2}\right\} d\omega .$$

Meze $\varphi = -\pi + \eta, \pi - \eta$ transformují se na meze $\omega = \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\eta, -\operatorname{ctg} \frac{1}{2}\eta$. Položme ještě $H = \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\eta$, a můžeme psát:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+\eta}^{\pi+\eta} \ldots d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{H}^{-H} U(\omega)\left\{\frac{1}{i\omega - \lambda_0} + \frac{i\omega}{1+\omega^2}\right\} d\omega = \frac{2\lambda_0}{\pi} \int_0^H \frac{U(\omega)\, d\omega}{\lambda_0^2 + \omega^2} ,$$

jelikož $U(\omega)$ je podle předpokladu sudá.

Odtud však plyne, že

$$Z(\lambda_0) = \lim_{H \to \infty} \frac{2\lambda_0}{\pi} \int_0^H \frac{U(\omega)\, d\omega}{\lambda_0^2 + \omega^2} ,$$

což bylo dokázati.

Aplikujme nyní věty 3, 3a na případ, kdy $U(\omega)$ je *racionální* funkcí. Buď tedy $r(\omega)$ sudá racionální funkce ω, definovaná na $\langle -\infty, \infty \rangle$, která je tam všude omezená.

Pišme $r(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$, kde P, Q jsou nesoudělné polynomy. Je zřejmé, že Q nemůže mít reálných kořenů. Z toho, že $r(\omega)$ je omezená, plyne, že stupeň mnohočlenu P je nejvýše roven stupni Q, a tedy že $r(\omega)$ je spojitá všude na $\langle -\infty, \infty \rangle$, čímž jsou splněny požadavky věty 3.

Tvrdím nyní, že funkce $Z(\lambda)$, definovaná na základě $r(\omega)$ integrálem (2) je racionální funkcí λ.

Zvolme tedy $\lambda \in \Gamma$. Zřejmě možno psát $Z(\lambda) = \frac{\lambda}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} \frac{1}{\lambda^2 + \omega^2} \, d\omega$. Uvažme racionální funkci $H(\mu) = \frac{P(\mu)}{Q(\mu)(\lambda^2 + \mu^2)}$ komplexní proměnné μ. Je zřejmé, že $H(\mu)$ nemá pólů na reálné ose a je v bodě ∞ holomorfní. Existuje tedy číslo $N > 0$ tak, že všechny póly $H(\mu)$ budou ležet uvnitř kruhu $|\mu| = N$. Zvolme nějaké $N' > N$ a uvažme kladně orientovanou integrační cestu $C_{N'}$, tvořenou úsekem reálné osy mezi body $-N'$, N' a polokružnicí $|\mu| = N'$, ležící v horní polorovině μ. Pak platí:

$$\int_{C_{N'}} H(\mu) \, d\mu = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\, H \,,$$

kde součet se vztahuje na póly horní poloroviny. Možno tedy psát:

$$\frac{\lambda}{\pi} \int\limits_{-N'}^{N'} \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} \frac{d\omega}{\lambda^2 + \omega^2} + \frac{\lambda}{\pi} \int\limits_{\frown} H(\mu) \, d\mu = 2\lambda i \sum \mathrm{Res}\, H$$

(symbol $\int\limits_{\frown} \ldots$ značí integraci po polokružnici). Dále je zřejmé, že existuje $\lim\limits_{N' \to \infty} \int\limits_{\frown} \ldots = 0$ a ježto existuje též $\lim\limits_{N' \to \infty} \frac{\lambda}{\pi} \int\limits_{-N'}^{N'} \ldots = Z(\lambda)$, máme výsledek $Z(\lambda) = 2\lambda i \sum \mathrm{Res}\, H$.

Všimneme-li si nyní, že každé residuum $H(\mu)$ je racionálním výrazem v λ, plyne odtud, že $Z(\lambda)$ je racionální v λ, což jsme měli dokázat.

Z faktu, že $Z(\lambda)$ je rac. funkcí a $\mathrm{Re}\, Z(\lambda)$ je spojitá v $\bar{\Gamma}$, vyplývá na základě principu analytického pokračování ten důsledek, že $Z(\lambda)$ bude holomorfní v $\bar{\Gamma}$.

Odvodili jsme tedy větu:

Věta 4. *Buď $r(\omega) \not\equiv 0$ sudou racionální funkcí definovanou na $\langle -\infty, \infty \rangle$, která všude splňuje podmínku $0 \leq r(\omega) \leq C < \infty$. Pak existuje jediná funkce $Z(\lambda) \in \mathbf{\Pi}$, pro kterou platí* $\mathrm{Re}\, Z(i\omega) = r(\omega)$, $Z(\infty) = r(\infty)$.

Tato funkce $Z(\lambda)$ je dána vzorcem (3)[4])

Příklad: Dáno

$$r(\omega) = \frac{2}{\omega^6 + \omega^4 + 4\omega^2 + 4} \,.$$

---

[4]) Z této věty vyplývá jeden vedlejší důsledek negativního charakteru: obecně není možno rozložit danou $Z \in \mathbf{\Pi}$ na součet $Z = Z_1 + Z_2$; $Z_1, Z_2 \in \mathbf{\Pi}$ tak, že každá Z_1, Z_2 bude mít méně pólů než Z. To dokazuje příklad funkce $r(\omega) = (1 + \omega^2)^{-n}$. Fysikálně to znamená, že obecně není možno uskutečnit synthesu dvojpólu jako *výhradně seriovou (nebo výhradně paralelní)* kombinaci dvojpólů strukturálně jednodušších.

Máme určiti $Z(\lambda)$. Máme

$$H(\mu) = \frac{2}{(\mu^2 + 1)(\mu^2 + 4)(\mu^2 + \lambda^2)}.$$

Póly $H(\mu)$, ležící v horní polorovině, jsou v bodech: i; $\pm 1 + i$; λi. Výpočtem residuí obdržíme snadno:

$$Z(\lambda) = \frac{3\lambda^2 + 9\lambda + 10}{10(\lambda + 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 2)}.$$

Část II.

Prvá methoda.

Přistupme nyní k odvození dalších důsledků z vět 2 a 3. Buď tedy $U(\omega) \not\equiv 0$ sudou funkcí ω, definovanou a spojitou na $\langle -\infty, \infty \rangle$, která všude splňuje podmínku $U(\omega) \geqq 0$. Definujme na $\langle -\pi, \pi \rangle$ funkci $\tilde{U}(\varphi)$ předpisem: $\tilde{U}(\varphi) = U\left(\frac{1}{\varkappa} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)$, $\varkappa > 0$; zřejmě $\tilde{U}(\varphi)$ bude spojitá na $\langle -\pi, \pi \rangle$. Položíme-li ve větě 2 $f(\zeta) = f(e^{i\varphi}) = \tilde{U}(\varphi)$, splňuje zřejmě $f(\zeta)$ její podmínky. Buď tedy $F(z)$ funkce příslušná $f(\zeta)$ ve smyslu věty 2. Potom pro každé $z \in K$ platí Taylorův rozvoj $F(z) = \frac{c_0}{2} + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$, kde $c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{U}(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, poněvadž $\tilde{U}(\varphi)$ je sudou funkcí φ (viz dodatek A, věta) a kde $\operatorname{Re} c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{U}(\varphi) \, d\varphi$. Ježto však podle věty 2 $F(0)$ je reálné, plyne odtud, že $\operatorname{Re} c_0 = c_0$. Jak vidno, jsou čísla c_n Fourierovými koeficienty funkce $\tilde{U}(\varphi)$ (a jsou tedy vesměs reálná).

Označme $S_k(z) = \frac{1}{2}c_0 + c_1 z + \ldots + c_k z^k$ a utvořme Cesàrovské středy prvého řádu

$$t_n(z) = \frac{S_0(z) + S_1(z) + \ldots + S_n(z)}{n + 1} = \frac{c_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{n + 1 - \nu}{n + 1} c_\nu z^\nu.$$

Všimněme si, že pro $z = e^{i\varphi} \in \overline{K} - K$ je

$$\operatorname{Re} t_n(e^{i\varphi}) = \frac{c_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{n + 1 - \nu}{n + 1} c_\nu \cos \nu\varphi,$$

což jsou Cesàrovské středy, utvořené z Fourierova rozvoje funkce $\tilde{U}(\varphi)$. Potom však platí podle Fejérovy věty (viz [5], str. 518), že $\lim_{n \to \infty} \operatorname{Re} t_n(e^{i\varphi}) = \tilde{U}(\varphi) = \operatorname{Re} F(e^{i\varphi})$ stejnoměrně pro všechna $\varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Uvážíme-li dále, že $\operatorname{Re} t_n(z)$ a $\operatorname{Re} F(z)$ jsou harmonickými funkcemi v K, a že též jejich rozdíl je tam harmonickou funkcí, platí podle věty o maximu a minimu:

$$\min_{\zeta \in \bar{K} - K} [\mathrm{Re}\, t_n(\zeta) - \mathrm{Re}\, F(\zeta)] < \mathrm{Re}\, t_n(z) - \mathrm{Re}\, F(z) < \max_{\zeta \in \bar{K} - K} [\mathrm{Re}\, t_n(\zeta) - \mathrm{Re}\, F(\zeta)]$$

(vylučujeme triviální případ $\mathrm{Re}\, F(\zeta) \equiv$ konst) pro každé $z \in K$. Odtud však plyne, že $\lim_{n \to \infty} \mathrm{Re}\, t_n(z) = \mathrm{Re}\, F(z)$ dokonce stejnoměrně v K.

Ukážeme nyní dále, že pro každé n a každé $z \in K$ je $\mathrm{Re}\, t_n(z) > 0$. Důkaz opírá se o větu SCHUROVU [6], která praví:

Buďte $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$, $g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu$ *v* K *konvergentní řady, pro něž platí* $\mathrm{Re}\, f(z) > 0$, $\mathrm{Re}\, g(z) > 0$ *pro každé* $z \in K$. *Buď* $b_0' = \mathrm{Re}\, b_0$. *Utvořme řadu* $h(z) = 2a_0 b_0' + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu b_\nu z^\nu$ *(která rovněž konverguje v* K*). Potom pro každé* $z \in K$ *je* $\mathrm{Re}\, h(z) > 0$.

(Důkaz viz dodatek B.)

Položíme-li do této věty za $f(z) = \frac{c_0}{2} + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$, za $g(z)$ pak polynom $g(z) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{n+1-\nu}{n+1} z^\nu$, který má v K kladnou reálnou část jak je ukázáno v dodatku C, plyne odtud okamžitě naše tvrzení.

Pro úplnost budiž zde ještě uvedeno, že byly BERNŠTEJNEM (viz [7], str. 203) nalezeny odhady pro odchylku Fejérových součtů od dané funkce v případě, že splňuje Lipschitzovu podmínku s konstantami M, α (viz poznámku pod čarou 2). Označíme-li $\varrho(p, q) = \sup_{x \in \langle -\pi, \pi \rangle} |p(x) - q(x)|$, praví tyto odhady v našem případě:

$$\varrho(\tilde{U}(\varphi); \mathrm{Re}\, t_n(\mathrm{e}^{i\varphi})) \leq \frac{C_\alpha M}{(n+1)^\alpha}, \; C_\alpha < \frac{\pi 2^\alpha}{1-\alpha^2} \text{ pro } \alpha < 1,$$

$$\varrho(\ldots) \leq \frac{\pi M[\pi/2 + \ln (n+1)]}{n+1} \text{ pro } \alpha = 1.$$

Pro praktické použití jsou však tyto odhady příliš hrubé.

Tyto výsledky přeneseme nyní do Γ.

Zavedeme-li transformaci $z = \frac{1 - \varkappa\lambda}{1 + \varkappa\lambda}$, zobrazí tato K na Γ, $\bar{K}$ na $\bar{\Gamma}$. Odtud plyne okamžitě, že

$$Z_n^{(F)}(\lambda) = t_n\left(\frac{1 - \varkappa\lambda}{1 + \varkappa\lambda}\right) \in \mathbf{\Pi}.$$

Nadto platí, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje N_ε tak, že pro všechna $n \geq N_\varepsilon$ a každé $\varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle$ je $|\mathrm{Re}\, t_n(e^{i\varphi}) - \tilde{U}(\varphi)| < \varepsilon$. Všimneme-li si, že v důsledku transformace $z \to \lambda$ je bodu $e^{i\varphi}$ přiřazen bod $i\omega = -\frac{i}{\varkappa} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, plyne odtud, že $\mathrm{Re}\, Z_n^{(F)}(i\omega)$ aproximuje $U(\omega)$ v celém intervalu $\langle -\infty, \infty \rangle$ s odchylkou menší než ε.

Odvodili jsme tedy větu:

Věta 5. *Buď $U(\omega) \not\equiv 0$ reálná nezáporná sudá funkce ω, definovaná a spojitá na $\langle -\infty, \infty \rangle$.*

Potom pro každé $\varepsilon > 0$ lze najít index N_ε tak, že pro všechna $n \geq N_\varepsilon$ bude funkce $Z_n^{(F)}(\lambda) \in \mathbf{\Pi}$, definovaná vztahem

$$Z_n^{(F)}(\lambda) = \frac{c_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{n+1-\nu}{n+1} c_\nu \left(\frac{1-\varkappa\lambda}{1+\varkappa\lambda}\right)^\nu ,$$

kde

$$c_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U\left(\frac{1}{\varkappa} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right) \cos \nu\varphi \, d\varphi , \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

mít tu vlastnost, že $|\operatorname{Re} Z_n^{(F)}(i\omega) - U(\omega)| < \varepsilon$ pro každé $\omega \in \langle -\infty, \infty \rangle$.

Druhá methoda.

Podobným způsobem, jak jsme činili u prvé methody, odvodíme další aparát přiblížení.

Buď tedy $U(\omega)$ funkce splňující podmínky věty 5, a nechť c_ν jsou koeficienty Taylorova rozvoje příslušné funkce $F(z)$.

Utvořme Vallé-Poussinovy mnohočleny $v_n(z)$ předpisem:

$$v_n(z) = \frac{c_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(n!)^2}{(n+\nu)!\,(n-\nu)!} c_\nu z^\nu .$$

Všimněme si, že platí:

$$\operatorname{Re} v_n(e^{i\varphi}) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{U}(t) \cos^{2n} \frac{t-\varphi}{2} \, dt ,$$

což je Vallé-Poussinův integrál. Pak platí (Vallé-Poussinova věta, [7], str. 28), že $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} v_n(e^{i\varphi}) = \operatorname{Re} F(e^{i\varphi})$ stejnoměrně v intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Ježto dále $\operatorname{Re} v_n(z)$ a $\operatorname{Re} F(z)$ jsou harmonickými funkcemi v $\bar{K}$, vyplývá odtud stejně jako prve, že $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} v_n(z) = \operatorname{Re} F(z)$ stejnoměrně v $\bar{K}$. Z věty Schurovy a dodatku C plyne pak okamžitě, že $\operatorname{Re} v_n(z) > 0$ pro každé $z \in K$.

Pro doplnění možno ještě uvést odhad (viz [7], str. 257, 278) $\varrho(\operatorname{Re} v_n(e^{i\varphi}); \tilde{U}(\varphi)) \leq \frac{3M}{\sqrt{n^\alpha}}$, splňuje-li $U(\varphi)$ v intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ Lipschitzovu podmínku s konstantami M, α.

Přeneseme-li tyto výsledky opět do Γ, platí:

Věta 6. *Buď $U(\omega) \not\equiv 0$ reálná nezáporná sudá funkce, definovaná a spojitá na $\langle -\infty, \infty \rangle$.*

Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $N_\varepsilon > 0$ tak, že pro všechna $n \geqq N_\varepsilon$ budou funkce $Z_n^{(V)}(\lambda) \in \mathbf{\Pi}$, definované vztahem

$$Z_n^{(V)}(\lambda) = \frac{c_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(n!)^2}{(n+\nu)!\,(n-\nu)!}\, c_\nu \left(\frac{1-\varkappa\lambda}{1+\varkappa\lambda}\right)^\nu,$$

kde c_ν jsou dány vzorci (4), *mít tu vlastnost, že*

$$\left|\operatorname{Re} Z_n^{(V)}(i\omega) - U(\omega)\right| < \varepsilon$$

pro všechna $\omega \in \langle -\infty; \infty\rangle$.

Podívejme se nyní na věty 5 a 6 z praktické stránky. Máme-li konkretně dánu funkci $U(\omega)$, třebas grafem a „toleranci“ ε, nutno sestrojiti nejprve graf $\tilde{U}(\varphi)$. Přitom zvolíme konstantu $\varkappa > 0$ vhodně tak, aby graf $\tilde{U}(\varphi)$ byl co možná „nejhladší“. V praktických případech totiž, máme-li na mysli případy obvyklé ve slaboproudé elektrotechnice, se graf $U(\omega)$ „vlní“ asi tak v intervalu $\omega = 10^2 \div 10^4$, jde-li o zařízení nízkofrekventní, v rozmezí $\omega = 10^6 \div 10^8$, jde-li o zařízení pro středně vysoké frekvence, jinde je téměř konstantní.

Nyní stačí zjistiti Fourierovy koeficienty funkce $\tilde{U}(\varphi)$, což lze s výhodou provésti harmonickým analysátorem. Pokud jde o stanovení čísla N_ε k dané toleranci, nutno postupovat nepřímo. Bylo by možno vypočíst je ze shora uvedených odhadů, avšak tyto poskytují značně velké hodnoty a jsou tedy prakticky nepoužitelné. Zvolíme tedy nějaké N, sestrojíme příslušný trigonometrický mnohočlen $\operatorname{Re} t_N(e^{i\varphi})$ nebo $\operatorname{Re} v_N(e^{i\varphi})$ a kontrolujeme, zda je v „toleranci“ ε. Nenastane-li to, nutno zvolit N větší.

Všimněme si v této souvislosti toho případu, kdy funkce $\tilde{U}(\varphi)$ je trigonometrickým mnohočlenem, t. j. když $F(z) = \frac{1}{2}c_0 + c_1 z + \ldots + c_m z^m$ je mnohočlenem. Zřejmě potom bude funkce

$$Z(\lambda) = \frac{c_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \left(\frac{1-\varkappa\lambda}{1+\varkappa\lambda}\right)^\nu$$

mít tu vlastnost, že $\operatorname{Re} Z(i\omega) = U(\omega)$. To ostatně plyne z vět 5, 6, neboť pak

$$\lim_{n\to\infty} Z_n^{(F)}(\lambda) = \lim_{n\to\infty} Z_n^{(V)}(\lambda) = Z(\lambda)\,,$$

pro $\lambda \in \overline{\Gamma}$. To má tento praktický význam: jsou-li zjištěné Fourierovy koeficienty počínajíc nějakým indexem k zanedbatelné, a je-li mnohočlen

$$\tfrac{1}{2}c_0 + \sum_{\nu=1}^{k-1} c_\nu \cos \nu\varphi$$

v $\langle -\pi, \pi\rangle$ nezáporný (což lze snadno zjistit), potom funkce

$$\tilde{Z}(\lambda) = \frac{c_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{k-1} c_\nu \left(\frac{1-\varkappa\lambda}{1+\varkappa\lambda}\right)^\nu \in \mathbf{\Pi}$$

bude zpravidla poskytovat lepší aproximaci, než $Z_{k-1}^{(F)}(\lambda)$ a $Z_{k-1}^{(V)}(\lambda)$.

Třetí methoda.

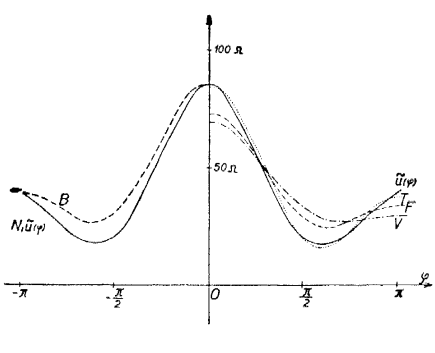
Přistupme nyní k sestrojení třetí methody. Buď opět $U(\omega)$ nezáporná sudá funkce ω, definovaná a spojitá na $\langle -\infty, \infty\rangle$.

Uvažme transformaci $\xi = \frac{\varkappa\omega^2}{1 + \varkappa\omega^2}$, $\varkappa > 0$, která prostě zobrazí interval ω $\langle 0, \infty\rangle$ na interval $\xi\langle 0, 1\rangle$. Definujme na $\langle 0, 1\rangle$ funkci $\tilde{U}(\xi)$ předpisem: $\tilde{U}(\xi) = U\left(\sqrt{\frac{\xi}{\varkappa(1-\xi)}}\right)$. Snadno nahlédneme, že $\tilde{U}(\xi)$ je spojitá v $\langle 0, 1\rangle$. Potom však platí podle Weierstrassovy věty, že ke každému $\varepsilon > 0$ lze najíti mnohočlen $\tilde{P}_\varepsilon(\xi)$ tak, že $|\tilde{P}_\varepsilon(\xi) - \tilde{U}(\xi)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ pro každé $\xi \in \langle 0, 1\rangle$. Pro takový mnohočlen v $\langle 0, 1\rangle$ pak zřejmě platí $\tilde{P}_\varepsilon(\xi) > -\frac{1}{2}\varepsilon$. Potom však pro mnohočlen $P_\varepsilon(\xi)$ bude platit: $P_\varepsilon(\xi) = \tilde{P}_\varepsilon(\xi) + \frac{1}{2}\varepsilon > 0$ a $|P_\varepsilon(\xi) - \tilde{U}(\xi)| < \varepsilon$ pro všechna $\xi \in \langle 0, 1\rangle$. Odtud plyne, že $P_\varepsilon\left(\frac{\varkappa\omega^2}{1+\varkappa\omega^2}\right)$ bude sudou racionální funkcí, která je kladná a ohraničená v $\langle -\infty, \infty\rangle$, a tedy podle věty 4 existuje jediná funkce $Z_\varepsilon(\lambda) \in \mathbf{\Pi}$ daná vzorcem (3) tak, že $\operatorname{Re} Z_\varepsilon(i\omega) = P_\varepsilon\left(\frac{\varkappa\omega^2}{1+\varkappa\omega^2}\right)$. Platí tedy, že $|\operatorname{Re} Z_\varepsilon(i\omega) - U(\omega)| < \varepsilon$ v $\langle -\infty, \infty\rangle$.

Touto úvahou máme zároveň udán předpis, kterak v konkretních případech budeme funkci $Z_\varepsilon(\lambda)$ konstruovat. Jako aproximační aparát můžeme užít příkladně Bernštejnových polynomů, definovaných vztahy

$$B_n(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \tilde{U}\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} \xi^k (1-\xi)^{n-k}.$$

Pokud jde o volbu n k dané toleranci $\varepsilon > 0$, lze říci totéž, co bylo řečeno u prvé a druhé methody.



Obr. 1.

Budiž zde ještě poznamenáno, že Bernštejnovy polynomy jako prakticky upotřebitelný aparát přiblížení jsou nevhodné, ježto konvergují k dané funkci příliš pomalu. Mnohem lepších výsledků lze dosáhnout pomocí vhodných interpolačních method (viz na př. [7], str. 491 a další).

Je zřejmé, že tato methoda má oproti prvé a druhé methodě tu výhodu, že výpočet koeficientů aproximujícího mnohočlenu je snazší, nežli výpočet Fourierových koeficientů, není-li po ruce analysátor.

Závěrem uveďme si konkretní příklad ze slaboproudé elektrotechniky na vyložené methody.

Experimentálně vyšetřená závislost ohmické složky $U(\omega)$ na kruhové frekvenci ω je dána grafem $\tilde{U}(\varphi)$ v obr. 1 plně vytaženou křivkou (pro jednoduchost je voleno $\varkappa = 1$). Předepsaná tolerance je 5 Ω. Pro Fourierovy koeficienty byly nalezeny hodnoty: $\frac{1}{2}c_0 = 41{,}3$; $c_1 = 24{,}6$; $c_2 = 20{,}0$; $c_3 = -1{,}5$; $c_4 = -0{,}2$; ... Zvolíme $n = 4$. Bude tedy částečný součet T Fourierovy řady čtvrtého stupně

$$T = 41{,}3 + 24{,}6 \cos \varphi + 20{,}0 \cos 2\varphi - 1{,}5 \cos 3\varphi - 0{,}2 \cos 4\varphi \,,$$

Féjérův součet F

$$F = 41{,}3 + 19{,}7 \cos \varphi + 12{,}0 \cos 2\varphi - 0{,}6 \cos 3\varphi - 0{,}04 \cos 4\varphi \,,$$

Vallé-Poussinův součet V

$$V = 41{,}3 + 19{,}7 \cos \varphi + 8{,}0 \cos 2\varphi - 0{,}17 \cos 3\varphi - 0{,}003 \cos 4\varphi \,.$$

Grafy těchto mnohočlenů jsou vyneseny v obr. 1 v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ a označeny příslušnými písmeny. (T tečkovaně, F čárkovaně, V čerchovaně).

Dále byl obor funkce $U(\omega)$ transformován do intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a sestrojen Bernštejnův polynom B čtvrtého řádu. Bylo nalezeno

$$B = 8{,}5\xi^4 - 16\xi^3 + 135\xi^2 - 174\xi + 85{,}5 \,.$$

Interpolací podle Newtona na body shody 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1, byl nalezen mnohočlen N:

$$N = 92{,}8\xi^4 - 182{,}4\xi^3 + 276{,}1\xi^2 - 233{,}2\xi + 85{,}5 \,.$$

Grafy obou těchto mnohočlenů byly vyneseny do obrázku 1 jako funkce φ v intervalu $\langle -\pi, 0 \rangle$ a označeny příslušnými písmeny. (Graf N se kryje s grafem $\tilde{U}(\varphi)$).

Z obr. 1 je patrno, že předepsané toleranci při $n = 4$ vyhovuje T a N, které jsou též v $\langle -\pi, \pi \rangle$ nezáporné. Snadným výpočtem nalezneme pak pro hledané funkce:

$$Z_T(\lambda) = \frac{38\lambda^4 + 113{,}8\lambda^3 + 206{,}6\lambda^2 + 218{,}2\lambda + 84{,}2}{\lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1} \,,$$

$$Z_N(\lambda) = \frac{38{,}8\lambda^4 + 119{,}8\lambda^3 + 230{,}8\lambda\text{-} + 213{,}3\lambda + 85{,}5}{\lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1} \,.$$

Závěr

Nakonec pohlédněme na odvozené výsledky „očima ryzího praktika". Možno namítnout, že funkci $U(\omega)$ není možno definovat v okolí ∞ na základě experimentálního vyšetření, které je omezeno „reálnými prostředky". Je však zřejmé, že máme-li $U(\omega)$ definováno v nějakém konečném intervalu $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$, můžeme její definici vhodně rozšířit na celý interval $\langle -\infty, \infty \rangle$, a z takto doplněné $U(\omega)$ sestrojit $Z(\lambda)$ pro danou toleranci. Potom však bude $Z(\lambda)$ očividně splňovat tuto toleranci tím spíše v $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$.

Dodatek

A. Věta. *Buď $F(z)$ holomorfní v K, její* Re $F(z)$ *spojitá v $\bar{K}$. Buď $\frac{1}{2}c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ její Taylorův rozvoj. Pak platí:*

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} F(e^{i\varphi})\, e^{-in\varphi}\, d\varphi\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots; \ \operatorname{Re} c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} F(e^{i\varphi})\, d\varphi\,.$$

Důkaz. Buď $F(z)$ holomorfní v mezikruží $r_1 \leq |z| < r_2$. Nechť její Laurentův rozvoj tam je $\ldots c_{-1} z^{-1} + \frac{1}{2}c_0 + c_1 z + \ldots$ pro jehož koeficienty platí

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \frac{F(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{n+1}}\,, \quad n \neq 0\,,$$

$$\frac{c_0}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \frac{F(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta\,.$$

Vezmeme-li integraci po nějaké kružnici $|\zeta| = r$, $r_1 < r < r_2$, možno tyto vztahy psát:

$$c_n = \frac{r^{-n}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(re^{i\varphi})\, e^{-in\varphi}\, d\varphi\,, \quad \frac{c_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(re^{i\varphi})\, d\varphi\,.$$

Bude-li nyní $F(z)$ holomorfní v $0 \leq |z| < r_2 = 1$, t. j. v K, bude $c_{-n} = 0$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$, takže sečtením výrazů pro c_n a $r^{-2n} \bar{c}_{-n}$ nalezneme:

$$c_n = \frac{r^{-n}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} F(re^{i\varphi})\, e^{-in\varphi}\, d\varphi\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, r < 1\,.$$

Bude-li nadto Re $F(z)$ spojitá v $\bar{K}$, zřejmě existuje

$$\lim_{r \to 1} \frac{r^{-n}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} F(re^{i\varphi})\, e^{-in\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} F(e^{i\varphi})\, e^{-in\varphi}\, d\varphi = c_n$$

a podobně platí pro c_0, což bylo dokázati.

B. Důkaz Schurovy věty. Buďte $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$, $g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu$ v K konvergentní řady, Re $f(z) > 0$, Re $g(z) > 0$ v K.

Buď $g(re^{i\varphi}) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$ pro $0 \leq r < 1$.

Podle dodatku A platí

$$2\pi b_0' = \int_{-\pi}^{\pi} u(r, \varphi)\, d\varphi\,, \quad \pi b_\nu r^\nu = \int_{-\pi}^{\pi} u(r, \varphi)\, e^{-i\nu\varphi}\, d\varphi\,.$$

Dále platí $f(re^{i(\psi-\varphi)}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu r^\nu e^{i\nu(\psi-\varphi)}$, $r < 1$. Utvořme výraz

$$H(r, \psi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(r, \varphi)\, f(re^{i(\psi-\varphi)})\, d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(r, \varphi)\, \{a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu r^\nu e^{i\nu(\psi-\varphi)}\}\, d\varphi =$$

$$= 2a_0 b_0' + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu r^\nu e^{i\nu\psi} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(r, \varphi)\, e^{i\nu(\psi-\varphi)}\, d\varphi = h(r^2 e^{i\psi})\,,$$

neboť řada konverguje stejnoměrně. Ježto však zřejmě $\operatorname{Re} H(r, \psi) > 0$ pro každé $r < 1$ a ψ, je $\operatorname{Re} h(z) > 0$ v K, q. e. d.

C. Lemma. *Buď $T_n(\varphi) = b_0 + b_1 \cos \varphi + \ldots b_n \cos n\varphi$ (b_k reálné, ne vesměs nulové) trigonometrický mnohočlen té vlastnosti, že $T_n(\varphi) \geqq 0$ pro všechna φ. Potom mnohočlen $g_n(z) = b_0 + b_1 z + \ldots b_n z^n$ má $\operatorname{Re} g_n(z) > 0$ všude v K.*

Důkaz plyne bezprostředně aplikací věty o minimu reálné části holomorfní funkce na $g_n(z)$.

a) Položme

$$T_n(\varphi) = \frac{1}{2(n+1)} |1 + e^{i\varphi} + \ldots + e^{in\varphi}|^2 \geqq 0\,.$$

Snadno se přesvědčíme, že

$$T_n(\varphi) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{n+1-\nu}{n+1} \cos \nu\varphi$$

a tedy

$$g_n(z) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{n+1-\nu}{n+1} z^\nu$$

má $\operatorname{Re} g_n(z) > 0$ v K.

b) Podobně, klademe-li

$$T_n(\varphi) = \frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}} (1 + \cos \varphi)^n \geqq 0\,,$$

lehce vyplyne, že

$$T_n(\varphi) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(n!)^2}{(n+\nu)!\,(n-\nu)!} \cos \nu\varphi$$

a odtud „positivita“ příslušného polynomu.

LITERATURA

[1] *Cauer W.:* Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, Akademie Verlag — Berlin 1954.

[2] *Brune O.:* Synthesis of a finite two terminal network whose driving point impedance is a prescribed function of frequency, Journal of Math. and Phys., vol. X (1931).
Réza: Conversion of a Brune cycle with an ideal transformer into a cycle without an ideal transformer, Journal of Math. and Phys., vol. XXXIII, No 2 (1954).

[3] *González A. D.:* Notas sobre la teoria matematica de los circuitos lineales, Mathematicae notae, Argentina 1947.

[4] *Лаврентьев-Шабат:* Методы теории функций комплексного переменного, Москва 1951.

[5] *Jarník:* Integrální počet II, Nakl. ČSAV, Praha 1955.

[6] *Schur:* Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind, Journal für die reine und angew. Math., Bd. 148 (1918).

[7] *Натансон:* Конструктивная теория функций, Москва 1949.

Резюме

ПОСТРОЕНИЯ „ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ“

ВАЦЛАВ ДОЛЕЖАЛ (Václav Doležal)

(Поступило в редакцию 2/XII 1955 г.)

Эта статья посвящена методам построения положительных действительных функций. Эти функции имеют важную роль при исследовании динамических свойств линейных систем, а именно электрических систем.

В первой части работы приведены достаточные условия для того, чтобы заданная функция являлась действительной частью положительной действительной фунлции на мнимой оси, и в то же время показано построение такой положительной действительной функции.

В другой части решается задача построения такой положительной действительной функции, действительная часть которой на мнимой оси равномерно приближает заданную непрерывную функцию в пределах заданного отклонения.

Приведены три аппарата приближения, основанные на свойствах полиномов Фейера, Валле-Пуссена и Бернштейна.

В конце статьи решен численный пример на изложенные методы.

Summary

CONSTRUCTIONS OF "POSITIVE REAL FUNCTIONS"

VÁCLAV DOLEŽAL

(Received December 2, 1955.)

This article is devoted to methods of construction of positive real functions. The latter play an important role in investigation of properties of linear systems, especially electrical systems.

In the first part of the paper, sufficient conditions for any given function, to be real part of a positive real function on the imaginary axis are found; the construction of such a positive real function follows.

In the second part, the following problem is considered: given a continuous function, to find a positive real function, the real part of which on the imaginary axis is a uniform approximation of the given function with a prescribed deviation. Three methods of approximation are derived, based on properties of Fejér, Vallé-Poussin and Bernstein polynomials.

Finally, a numerical example illustrating the mentioned methods is computed.