

Aplikace matematiky

Jan Polášek

Tenký profil v nehomogenním proudovém poli

Aplikace matematiky, Vol. 1 (1956), No. 1, 44–58

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102515>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1956

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

TENKÝ PROFIL V NEHOMOGENNÍM PROUDOVÉM POLI

JAN POLÁŠEK

(Došlo dne 13. října 1955.)

DT: 533.6.011.3

Je podána obecná teorie potenciálního obtékání tenkého osamocenému profilu v zakřiveném nehomogenním proudovém poli nestlačitelné tekutiny. Je vypracováno řešení přímého i nepřímého problému. Výsledky jsou dány ve tvaru trigonometrických řad.

Základní označení

V_0	rychlost primárního proudu ve středu profilu, resp. náhradního oblouku	m/sek,
V_r, V_τ	radiální a azimutální složka primární rychlosti	m/sek,
v_r, v_τ	radiální a azimutální složka rychlosti indukované vírovými vlákny	m/sek,
U	povrchová rychlost na profilu	m/sek,
Γ	cirkulace vírového vlákna	m ² /sek,
γ	hustota cirkulace spojitého rozložení vírových vláken na profilu	m/sek,
r, φ	polární souřadnice,	
R	poloměr náhradního oblouku,	
ω	rozevření profilu (středový úhel náhradního oblouku),	
$R(1 + \eta), \varphi$	polární souřadnice profilu,	
α	úhel nastavení profilu,	
ϑ, ζ	proměnné polohové úhly,	
g_n, B_n, μ_n, ν_n	Fourierovy koeficienty v rozvoji hustoty cirkulace, tvaru profilu a složek primární rychlosti.	

Úvod

Při výpočtu tenkých leteckých profilů vystačíme většinou s Birnbaum-Glauertovou teorií nosné vírové plochy [1] a [2]. Jedním ze základních předpokladů této a téměř všech teorií leteckých profilů je předpoklad homogenity

primárního proudu, t. j. předpoklad, že rychlost primárního proudu je ve všech bodech stejná co do směru a velikosti. Tento předpoklad je ve většině případů s dostatečnou přesností splněn. Vyskytují se však také případy, kdy předpoklad homogenity primárního proudu splněn není. Na př. při vyšetřování profilů v některých aerodynamických tunelech nebo při užití tenkých profilů jako vodicích lopatek, které mají zamezit odtrhávání mezní vrstvy při obtékání silně zakřivených ploch.

V prvním příkladu jde v podstatě o případ, kdy primární proud je proměnný podél rozpětí profilu. Tímto problémem se zabývali TH. VON KÁRMÁN a HSUE-SHEN TSIEN [3], K. BAUSCH [4] a F. VANDREY [5].

V druhém příkladu, kterého se týká naše práce, jde v podstatě o dvojrozměrný problém obtékání profilu v rychlostním poli nehomogenním (co do velikosti i směru). Tímto případem se zabýval E. SOUCZEK [6] (a snad i R. P. ISAACS v práci, která nám byla přístupná jen ve výťahu [7]). Souczek zpracovává teorii tenkého slabě zakřiveného profilu a jen přímý problém. Konečně jsme se tímto problémem zabývali sami v práci [8], ve které jsme řešili obtékání tenkého profilu, málo odlišného od kruhového oblouku.

Naše teorie je použitelná i v případě homogenního proudění, kde má proti Birnbaum-Glauertově teorii tu výhodu, že kruhový oblouk lépe aproximuje skutečný profil než úsečka. Při použití na nehomogenní proudové pole měla naše dřívější teorie určitý nedostatek v tom, že zanedbávala (stejně jako teorie Souczekova) některé „členy druhého řádu“ (ve smyslu dále v textu vysvětleném), kdežto Birnbaum-Glauertova teorie zanedbává až „členy třetího řádu“. V této práci se proto pokoušíme o vybudování přesnější teorie, která bude zanedbávat teprve „členy třetího řádu“.

Obdobně jako v své dřívější práci [8] přiřadíme ke každému profilu náhradní kruhový oblouk, ale na rozdíl od této práce nebudeme vírová vlákna rozkládat na tomto náhradním oblouku, nýbrž přímo na profilu.

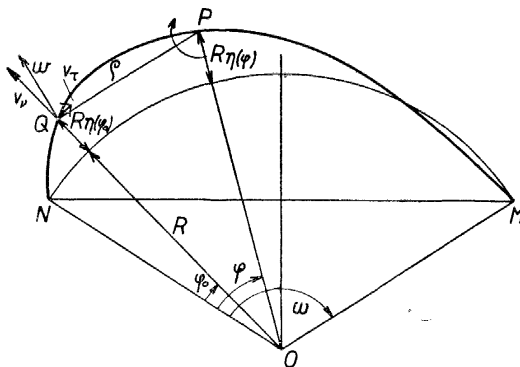
Nezávisle na předpokladu, že se profil liší málo od kruhového oblouku, děláme v naší teorii ještě další předpoklad, že úhel rozevření náhradního kruhového oblouku je malý (vůči 2π), takže podle jeho mocnin rozvíjíme. Ukazuje se, že naše vzorce, v nichž užíváme jen dvou členů rozvoje, stačí s velkou přesností i pro půlkruh. Proto další členy nepočítáme, ač by jejich připojení získané vzorce podstatně nekomplikovalo.

Podobně jako v Birnbaum-Glauertově teorii pokládáme profil za osamocенý, t. j. superponujeme pole rozložených vírových vláken na pole primárního proudění. Nehomogenní proudové pole je zpravidla vytvořeno zakřivenými stěnami. Superponované pole rozložených vírů poruší obecně okrajové podmínky na těchto stěnách. Musíme proto k uvažovanému proudění přidat ještě rychlostní pole, které vyrovná toto porušení okrajových podmínek a nemá singularitu v oblasti vyplněné prouděním. Naše vzorce zůstávají v platnosti i v tomto případě, jestliže toto doplňkové proudění zahrneme do primárního

pole. Nový problém v tomto případě je určení doplňkového pole dříve než máme vyřešen profil. Tímto problémem se v této práci nebudeme zabývat; způsob, jak je možno jej řešit, je ukázán v práci [9] na příkladě vstupního hrdla odstředivých lopatkových strojů.

1. Rychlost indukovaná spojitým rozložením vírových vláken na povrchu profilu

Nejprve přiřadíme k profilu kruhový oblouk, jehož počáteční, resp. koncový bod je totožný s náběžnou, resp. odtokovou hranou profilu, a jehož poloměr R je zvolen tak, aby tento, t. zv. „náhradní oblouk“, aproximoval pokud možno dobře uvažovaný profil (obr. 1).



Obr. 1.

Dále si zavedeme systém polárních souřadnic (r, φ) . Počátek tohoto systému položíme do středu O náhradní kružnice a za základní směr zvolíme spojnicí středu O s náběžnou hranou N profilu. Úhel φ počítáme kladně ve směru naznačeném na obr. 1. Středový úhel náhradního oblouku označíme ω a předpokládáme, že $\omega < \pi$.

Rovnice profilu v této soustavě bude:

$$r(\varphi) = R[1 + \eta(\varphi)], \quad 0 \leq \varphi \leq \omega, \quad (1,1)$$

při čemž

$$\eta(0) = \eta(\omega) = 0.$$

Označíme-li $\gamma(\varphi) R d\varphi$ intenzitu cirkulace vírových vláken na elementár-

¹⁾ Lineární hustota cirkulace vírových vláken v bodě $[R(1 + \eta), \varphi]$ je rovna:

$$\bar{\gamma}(\varphi) = \gamma(\varphi) \cdot \frac{1}{1 + \eta} \doteq (1 - \eta) \gamma(\varphi).$$

ním oblouku kolem bodu $P \equiv [R(1 + \eta), \varphi]$, bude rychlost indukovaná v bodě $Q \equiv [R(1 + \eta_0), \varphi_0]$:

$$dw = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{R\gamma(\varphi)}{\varrho} \cdot d\varphi, \quad (1,2)$$

kde ϱ je vzdálenost bodů P a Q . Cirkulaci vírových vláken počítáme kladně ve stejném směru jako bereme kladný smysl úhlu φ , t. j. ve směru pohybu ručiček hodinových (obr. 1).

Funkce γ , η a $\frac{d\eta}{d\varphi}$ považujeme za malé veličiny prvního řádu, a to v tom smyslu, že v této teorii budeme jejich součiny, jakožto veličiny druhého řádu, ještě uvažovat, kdežto součiny tří veličin prvního řádu budeme zanedbávat.²⁾

Platí (viz obr. 1):

$$\begin{aligned} \varrho^2 &= R^2\{(1 + \eta)^2 + (1 + \eta_0)^2 - \\ &- 2(1 + \eta)(1 + \eta_0) \cos(\varphi - \varphi_0)\} = \\ &= R^2\{2(1 + \eta + \eta_0 + \eta\eta_0)[1 - \\ &- \cos(\varphi - \varphi_0)] + (\eta - \eta_0)^2\}. \end{aligned} \quad (1,3)$$

Poněvadž funkce $\gamma(\varphi)$ je malá prvního řádu, můžeme ve výrazu $\frac{R}{\varrho}$, který dosazujeme do vzorce (1,2), zanedbat veličiny malé druhého řádu:

$$\frac{\varrho^2}{R^2} = 4 \sin^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{2} (1 + \eta + \eta_0) \quad (1,4)$$

a

$$\frac{R}{\varrho} = \frac{1}{2 \sin \frac{|\varphi - \varphi_0|}{2}} \left[1 - \frac{1}{2}(\eta + \eta_0) \right]. \quad (1,5)$$

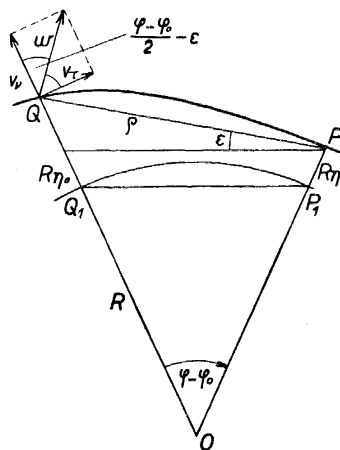
Po dosazení (1,5) do (1,2) dostaneme:

$$dw = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\gamma(\varphi) d\varphi}{\sin \frac{|\varphi - \varphi_0|}{2}} \cdot \left[1 - \frac{1}{2}(\eta + \eta_0) \right]. \quad (1,6)$$

Úhel, který svírá spojnice bodů PQ s tětivou P_1Q_1 na náhradním oblouku označíme ε (obr. 2). Úhel ε měříme od spojnice PQ k tětivě P_1Q_1 kladně ve stejném smyslu jako úhel φ .

²⁾ Malostí funkcí γ a $\frac{d\eta}{d\varphi}$ rozumíme to, že v jejich trigonometrických rozvozech (1,18)

a (2,6) jsou veličiny g_0 , n^2g_n , n^2B_n malé prvního řádu.



Obr. 2.

Platí:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\eta - \eta_0) \cotg \frac{\varphi - \varphi_0}{2}. \quad (1,7)$$

Element indukované rychlosti (1,6) si rozložíme na radiální a azimutální složku:

$$dv_r = \pm dw \cos \left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2} - \varepsilon \right), \quad (1,8)$$

$$dv_\tau = \pm dw \sin \left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2} - \varepsilon \right), \quad (1,9)$$

kde znaménko + resp. - platí pro $\varphi > \varphi_0$ resp. $\varphi < \varphi_0$. Do výrazů (1,8) a (1,9) dosadíme výrazy (1,6) a (1,7). Při zanedbání malých veličin třetího a vyšších řádů dostaneme:

$$dv_r = \frac{1}{4\pi} (1 - \eta_0) \cotg \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \gamma(\varphi) d\varphi, \quad (1,10)$$

$$dv_\tau = \frac{1}{4\pi} \left[1 - \frac{1}{2} (\eta + \eta_0) - \frac{1}{2} (\eta - \eta_0) \cotg^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right] \gamma(\varphi) d\varphi. \quad (1,11)$$

Integrováním výrazů (1,10) a (1,11) dostaneme radiální a azimutální složku rychlosti indukované v bodě Q:

$$v_r = \frac{1}{4\pi} (1 - \eta_0) \int_0^\omega \gamma(\varphi) \cotg \frac{\varphi - \varphi_0}{2} d\varphi, \quad (1,12)$$

$$v_\tau = \frac{1}{4\pi} \int_0^\omega \left[1 - \frac{1}{2} (\eta + \eta_0) - \frac{1}{2} (\eta - \eta_0) \cotg^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right] \gamma(\varphi) d\varphi. \quad (1,13)$$

Hodnotami singulárních integrálů (1,12) a (1,13) se rozumí jejich hlavní hodnoty.³⁾ Podle zavedené klasifikace malých veličin budou hlavní členy složek indukované rychlosti veličiny prvního řádu a uvažované korekční členy řádu druhého. Při dalších výpočtech budeme používat azimutální složku násobenou malou funkcí prvního řádu. Korekční členy by pak dávaly již zanedbatelné korekce třetího řádu, a proto se v integrálu (1,13) omezíme jen na hlavní člen:

$$v_\tau = \frac{1}{4\pi} \int_0^\omega \gamma(\varphi) d\varphi. \quad (1,14)$$

³⁾ Při definici malosti funkcí γ a $\frac{d\eta}{d\varphi}$ podle pozn. ²⁾ na str. 47, existují singulární integrály z malých funkcí prvního (druhého) řádu v rovnicích (1,12) a (1,13) a jsou veličinami malými prvního (druhého) řádu. Zanedbané singulární integrály s malými funkcemi vyšších řádů jsou malými veličinami vyšších řádů.

Pro výpočet si zavedeme místo proměnné φ novou proměnnou χ :

$$\varphi \approx \frac{\omega}{2} (1 - \cos \chi), \quad 0 \leq \chi \leq \pi, \quad (1,15)$$

$$d\varphi = \frac{\omega}{2} \sin \chi d\chi. \quad (1,16)$$

Dále označíme

$$\varphi_0 = \frac{\omega}{2} (1 - \cos \vartheta). \quad (1,17)$$

Rozložení cirkulace $\gamma(\chi)$ předpokládáme ve tvaru:

$$\gamma(\chi) \approx 2V_0(-g_0 \cotg \frac{1}{2}\chi + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin n\chi), \quad (1,18)$$

kde V_0 je hodnota rychlosti primárního proudění ve středu profilu. Rozložení cirkulace je zvoleno tak, aby byla splněna Žukovského podmínka hladkého odtoku na zadní hraně profilu:

$$\gamma(\pi) = 0. \quad (1,19)$$

Z rovnice (1,18) a (1,16) plyne:

$$\gamma d\varphi = \omega V_0[-g_0(1 + \cos \chi) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin \chi \sin n\chi] d\chi. \quad (1,20)$$

Rozvineme-li cotangens v řadu

$$\cotg \frac{\varphi - \varphi_0}{2} = -\frac{4}{\omega} \left[\frac{1}{\cos \chi - \cos \vartheta} - \frac{\omega^2}{48} (\cos \chi - \cos \vartheta) + \dots \right], \quad (1,21)$$

(konvergující pro $\omega < 2\pi$), a dosadíme-li výrazy (1,20) a (1,21) do integrálů (1,12) a (1,14), dostaneme po provedení integrací:⁴⁾

$$\frac{v_r}{V_0} = (1 - \eta_0) \left\{ \frac{\omega^2}{48} \left[-\frac{1}{2} g_0 + \frac{1}{4} g_2 + \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) \cos \vartheta \right] + \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos n\vartheta \right\}, \quad (1,22)$$

$$\frac{v_r}{V_0} \approx -\frac{\omega}{4} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right). \quad (1,23)$$

Zanedbané členy v rovnici (1,21) dávají u koeficientů při g_n v rovnici (1,22) korekce, z nichž největší (u koeficientu při g_0) je

$$\sim \omega^4 \left(\frac{1}{12228} - \frac{\cos \vartheta}{9216} + \frac{\cos 2\vartheta}{15360} - \frac{\cos 3\vartheta}{46080} \right)$$

a tedy dosahuje teprve pro $\omega = \pi$ asi 2%.

2. Základní vztahy mezi tvarem profilu a složkami primární a indukované rychlosti. Řešení přímého problému

Rozložení cirkulace na profilu je určeno požadavkem, aby směr rychlosti (primární + indukované) byl v bodech na profilu rovnoběžný s povrhem

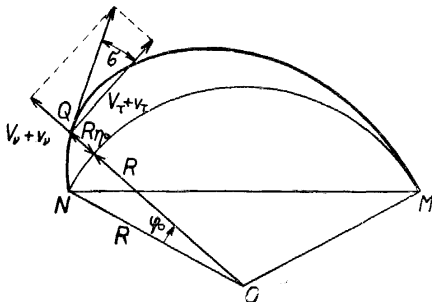
⁴⁾ Výpočet integrálů (1,12) a (1,14) je proveden v dodatku I.

profilu. Označíme-li V_r a V_τ radiální a azimutální složku primární rychlosti a σ úhel, který svírá tečna k profilu a tečna ke kružnici $r = R(1 + \eta_0)$ v bodě Q , platí:

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{v_r + V_r}{V_\tau + v_\tau}. \quad (2,1)$$

Z obr. 3 je zřejmé, že

$$\frac{d\eta_0}{d\varphi} = (1 + \eta_0) \operatorname{tg} \sigma. \quad (2,2)$$



Obr. 3.

V dalším budeme u η_0 a $\frac{d\eta_0}{d\varphi}$ vycházet index 0, neboť záměna je vyloučená.

Z rovnic (2,1) a (2,2) dostaneme:

$$\frac{d\eta}{d\varphi} = (1 + \eta) \frac{v_r + V_r}{V_\tau + v_\tau}. \quad (2,3)$$

Úhel, který svírá směr rychlosti primárního proudění a tečna ke kružnici $r = R[1 + \eta(\frac{1}{2}\omega)]$ v bodě $[R(1 + \eta(\frac{1}{2}\omega)), \frac{1}{2}\omega]$, si označíme α a nazveme jej úhlem nastavení profilu.

Radiální i azimutální složku primární rychlosti v místě profilu si vyjádříme trigonometrickými řadami:

$$\frac{V_\tau}{V_0} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \cos n\vartheta, \quad 1 + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \mu_{2m} = \cos \alpha, \quad (2,4)$$

$$\frac{V_r}{V_0} = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \cos n\vartheta, \quad \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m v_{2m} = \sin \alpha. \quad (2,5)$$

O koeficientech μ_n a v_n předpokládáme, že jsou malé prvního řádu.⁵⁾ Rovněž tak derivaci funkce η vyjádříme si trigonometrickou řadou:

$$\frac{d\eta}{d\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos n\vartheta. \quad (2,6)$$

Integrací rovnice (2,6) dostaneme:

$$\eta = \frac{\omega}{4} \left\{ B_0(1 - \cos \vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n-1} - B_{n+1}}{n} (1 - \cos n\vartheta) \right\}. \quad (2,7)$$

Počáteční a koncový bod náhradního oblouku je totožný s náběžnou, resp. odtokovou hranou profilu, tedy:

$$\eta(0) = \eta(\pi) = 0, \quad (2,8)$$

⁵⁾ Na př. v tom smyslu, že $\mu_0, v_0, n^2\mu_n$ a n^2v_n jsou malé veličiny prvního řádu, ve skutečnosti ovšem klesají koeficienty μ_n a v_n rychleji než $\frac{\text{konst}}{n^2}$.

z čehož plyne:

$$B_0 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{4m^2 - 1} = 0. \quad (2,9)$$

Dosadíme-li rozvoje (1,22), (1,23) a (2,4)–(2,7) do výrazu (2,3), dostaneme:

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos n\vartheta \right\} \cdot \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \cos n\vartheta - \frac{\omega}{4} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) \right\} = \\ & = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos n\vartheta + \frac{\omega^2}{48} \left[-\frac{1}{2} g_0 + \frac{1}{4} g_2 + \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) \cos \vartheta \right] \right\} + \\ & + \left\{ 1 + \frac{\omega}{4} \left[B_0(1 - \cos \vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n-1} - B_{n+1}}{n} (1 - \cos n\vartheta) \right] \right\} \cdot \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \nu_n \cos n\vartheta \right\}. \end{aligned} \quad (2,10)$$

Srovnáním koeficientů u $\cos n\vartheta$ na obou stranách rovnice (2,10) dostaneme nekonečný systém rovnic:⁶⁾

$$\begin{aligned} g_0 + \frac{\omega}{4} B_0 \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) - \frac{\omega^2}{96} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) = B_0 - \nu_0 - \frac{\omega}{8} \left[B_0(2\nu_0 - \nu_1) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_{i-1} - B_{i+1}}{i} (2\nu_0 - \nu_i) \right] + \\ + \frac{1}{2} \mu_0 B_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i B_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1 + \frac{\omega}{4} \left(\frac{\omega}{12} + B_1 \right) \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) = B_1 - \nu_1 + \frac{\omega}{8} \left[(2B_0 - B_2) \nu_0 + \right. \\ \left. + B_0(\nu_0 - 2\nu_1 + \nu_2) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_{i-1} - B_{i+1}}{i} (\nu_{i-1} - 2\nu_i + \nu_{i+1}) \right] + \\ + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=0}^1 \mu_i B_{1-i} + \sum_{i=0}^{\infty} (\mu_i B_{i+1} + \mu_{i+1} B_i) \right], \end{aligned} \quad (2,11)$$

$$\begin{aligned} g_2 + \frac{\omega}{4} B_2 \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) = B_2 - \nu_2 + \frac{\omega}{8} \left[\frac{1}{2} (B_1 - B_3) \nu_0 + B_0(\nu_1 - 2\nu_2 + \nu_3) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_{i-1} - B_{i+1}}{i} (\nu_{|i-2|} - 2\nu_2 + \nu_{i+2}) \right] + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=0}^2 \mu_i B_{2-i} + \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{\infty} (\mu_i B_{2+i} + \mu_{2+i} B_i) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_n = B_n - \nu_n + \frac{\omega}{8} \left[\frac{B_{n-1} - B_{n+1}}{n} \nu_0 - B_n(2g_0 - g_1) + B_0(\nu_{n-1} - 2\nu_n + \right. \\ \left. + \nu_{n+1}) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_{i-1} - B_{i+1}}{i} (\nu_{|i-n|} - 2\nu_n + \nu_{i+n}) \right] + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=0}^n \mu_i B_{n-i} + \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{\infty} (\mu_i B_{n+i} + \mu_{n+i} B_i) \right]; \quad n > 2, \dots \end{aligned}$$

⁶⁾ Viz dodatek II.

Řešíme-li přímý problém, t. j. hledáme-li rozložení cirkulace, resp. povrchové rychlosti na tenkém profilu, přiřadíme mu nejdříve náhradní oblouk, t. j. kruhový oblouk procházející náběžnou a odtokovou hranou profilu. Poloměr náhradního oblouku zvolíme tak, aby odchylky oblouku od skutečného profilu byly co nejmenší. Tím je dáno rozevření ω a koeficienty B_n ; ze známého primárního proudění určíme koeficienty μ_n a ν_n rozvoju (2,4) a (2,5) složek primární rychlosti v místě profilu. První tři rovnice nekonečného systému rovnic (2,11) nám představují systém tří lineárních nehomogenních rovnic pro koeficienty g_0, g_1 a g_2 , kdežto ostatní koeficienty g_n jsou přímo dány pravicími stranami zbývajících rovnic systému (2,11).⁷⁾

3. Řešení nepřímého problému

Druhá základní úloha, t. zv. nepřímý problém, je stanovení tvaru a úhlu nastavení profilu, který má předepsanou délku a rozložení cirkulace. Pro řešení je však výhodnější předepsat délku náhradního oblouku a rozložení cirkulace předpokládat ve tvaru (1,18) [srov. (1,2) a pozn. ¹⁾ na str. 46]. Poloměr náhradního oblouku zvolíme tak, aby co nejlépe aproximoval hledaný profil; v prvním přiblížení můžeme vzít poloměr náhradního oblouku roven poloměru křivosti primárního proudu v místě profilu. Tvar profilu je dán rozvojem (2,7), a proto je nepřímý problém řešen, jsou-li určeny hodnoty všech koeficientů B_n rozvoje (2,6). Při řešení této úlohy vyjdeme, jako v předešlé kapitole, z rovnice (2,3).

Výrazy pro složky primární rychlosti v místě hledaného profilu dostaneme rozvinutím radiální a azimutální složky primární rychlosti v okolí náhradního oblouku v Taylorovy řady, z nichž budeme uvažovat jen první členy. Budeme tedy místo (2,4) a (2,5) psát:

$$\frac{V_\tau}{V_0} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mu'_n + \frac{\partial \mu'_n}{\partial \eta} \eta \right) \cos n\vartheta, \quad (3,1)$$

$$\frac{V_\nu}{V_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\nu'_n + \frac{\partial \nu'_n}{\partial \eta} \eta \right) \cos n\vartheta. \quad (3,2)$$

Přitom jsou opět splněny podmínky:

$$1 + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \mu'_{2m} = \cos \alpha, \quad \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \nu'_{2m} = \sin \alpha,$$

kde α je úhel nastavení, definovaný v předešlém odstavci. Hodnoty koeficientů μ'_n, ν'_n a $\frac{\partial \mu'_n}{\partial \eta}, \frac{\partial \nu'_n}{\partial \eta}$ určíme z hodnot a derivací složek primární rych-

⁷⁾ Z rovnice (2,11) je zřejmé, že jsou-li dané veličiny B_n, μ_n a ν_n malé ve smyslu pozn. ²⁾ a ⁵⁾, platí totéž i o vypočítaných veličinách g_n .

lostí v bodech náhradního oblouku. Čárkované označení jsme zavedli proto, abychom tyto koeficienty μ'_n a ν'_n odlišili od koeficientů μ_n a ν_n rozvoju azimutální a radiální složky primární rychlosti (2,4) a (2,5), počítaných přímo na profilu.

Dosaďme-li rozvoje (3,1) a (3,2) do rovnice (2,3), dostaneme:

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos n\vartheta \right\} \cdot \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mu'_n + \frac{\partial \mu'_n}{\partial \eta} \eta \right) \cos n\vartheta - \frac{\omega}{4} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) \right\} = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos n\vartheta + \frac{\omega^2}{48} \left[-\frac{1}{2} g_0 + \frac{1}{4} g_2 + \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) \cos \vartheta \right] + \\ & + (1 + \eta) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\nu'_n + \frac{\partial \nu'_n}{\partial \eta} \eta \right) \cos n\vartheta. \end{aligned} \quad (3,3)$$

Po zanedbání malých veličin třetího a vyšších řádů můžeme rovnici (3,3) napsat ve tvaru:

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos n\vartheta \right\} \cdot \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \mu'_n \cos n\vartheta - \frac{\omega}{4} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} (g_n + \nu'_n) \cos n\vartheta + \\ & + \frac{\omega^2}{48} \left[-\frac{1}{2} g_0 + \frac{1}{4} g_2 + \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) \cos \vartheta \right] + \frac{\omega}{4} \left[B_0(1 - \cos \vartheta) + \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n-1} - B_{n+1}}{n} (1 - \cos n\vartheta) \right] \cdot \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\nu'_n + \frac{\partial \nu'_n}{\partial \eta} \eta \right) \cos n\vartheta \right\}. \end{aligned} \quad (3,4)$$

Zavedeme si označení:

$$\bar{\nu}_n = \nu'_n + \frac{\partial \nu'_n}{\partial \eta}, \quad \text{pro } n = 0, 1, 2, \dots \quad (3,5)$$

Srovnáním koeficientů u $\cos n\vartheta$ na obou stranách rovnice (3,4) dostaneme nekonečný systém rovnic:⁸⁾

$$\begin{aligned} B_0 &= g_0 + \nu'_0 - \frac{\omega^2}{96} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) - \frac{1}{2} \mu'_0 B_0 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \mu'_i B_i + \frac{\omega}{8} \left\{ (2g_0 - g_1) B_0 + \right. \\ & \left. + 2(2\bar{\nu}_0 - \bar{\nu}_1) B_0 + \frac{1}{2} (2\bar{\nu}_0 - \bar{\nu}_2) B_1 - \sum_{i=2}^{\infty} \left[\frac{\bar{\nu}_{i+1}}{i+1} + \frac{4\bar{\nu}_0}{i^2-1} - \frac{\bar{\nu}_{i-1}}{i-1} \right] B_i \right\}; \\ B_1 &= g_1 + \nu'_1 + \frac{\omega^2}{48} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) - \frac{1}{2} \mu'_0 B_1 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} (\mu'_{i-1} + \mu'_{i+1}) B_i + \\ & + \frac{\omega}{8} \left\{ (2g_0 - g_1) B_1 - 2(2\bar{\nu}_0 - 2\bar{\nu}_1 + \bar{\nu}_2) B_0 + \frac{1}{2} (\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_3) B_1 + \bar{\nu}_0 B_2 - \right. \\ & \left. - \sum_{i=2}^{\infty} \left[\frac{\bar{\nu}_{i+2}}{i+1} - 2 \frac{\bar{\nu}_i}{i^2-1} - \frac{\bar{\nu}_{i-2}}{i-1} \right] B_i \right\}; \end{aligned} \quad (3,6)$$

⁸⁾ Viz dodatek II.

$$\begin{aligned}
B_n = & g_n + v'_n - \frac{1}{2} \mu'_0 B_n - \frac{1}{2} \sum_0^{\infty} (\mu'_{|i-n|} + \mu'_{i+n}) B_i + \frac{\omega}{8} \left\{ (2g_0 - g_1) B_n - \right. \\
& - \bar{v}_0 \frac{B_{n-1} - B_{n+1}}{n} - 2(\bar{v}_{n-1} - 2\bar{v}_n + \bar{v}_{n+1}) B_0 - \frac{1}{2} (\bar{v}_{n-2} - 2\bar{v}_n + \bar{v}_{n+2}) B_1 - \\
& \left. - \sum_{i=2}^{\infty} \left[\frac{\bar{v}_{i+n+1} + \bar{v}_{|i-n+1|}}{i+1} + \frac{4\bar{v}_n}{i^2-1} - \frac{\bar{v}_{i+n-1} + \bar{v}_{|i-n-1|}}{i-1} \right] B_i \right\}, \quad n = 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

Nekonečný systém (3,6) lineárních nehomogenních rovnic pro hledané koeficienty B_n má za daných předpokladů o malosti koeficientů g_n, μ'_n a v'_n právě jedno omezené řešení. Toto řešení je možno získat na př. metodou postupných aproximací.⁹⁾ Koeficienty systému a tedy i řešení B_n však závisí na úhlu nastavení α , který je zatím neznám a určí se z rovnice (2,9), které musí hovět nalezené koeficienty B_n . Pro další výpočet si z rovnice (2,9) vyjádříme koeficient B_0 pomocí ostatních koeficientů:

$$B_0 = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{m^2 - \frac{1}{4}} \quad (3,7)$$

a tento výraz dosadíme do rovnic (3,6). Po úpravě dostaneme:

$$\begin{aligned}
v'_0 = & -g_0 + \frac{\omega^2}{96} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) + \frac{1}{4} (1 + \mu'_0) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{m^2 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \mu'_i B_i - \\
& - \frac{\omega}{8} \left\{ \left(\bar{v}_0 - \frac{1}{2} \bar{v}_2 \right) B_1 + \frac{1}{2} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 - \bar{v}_1 \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{m^2 - \frac{1}{4}} - \bar{v}_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m+1}}{m^2 + m} - \right. \\
& \left. - \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{\bar{v}_{i+1}}{i+1} - \frac{\bar{v}_{i-1}}{i-1} \right) B_i \right\}; \quad (3,8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1 = & g_1 + v'_1 + \frac{\omega^2}{48} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) - \frac{1}{2} \mu'_0 B_1 - \frac{\mu'_1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{m^2 - \frac{1}{4}} - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (\mu'_{i-1} + \mu'_{i+1}) B_i + \frac{\omega}{8} \left\{ \left(2g_0 - g_1 + \frac{1}{2} \bar{v}_1 - \frac{1}{2} \bar{v}_3 \right) B_1 + \bar{v}_0 B_2 - \right. \\
& - \left(\bar{v}_0 + \frac{1}{2} \bar{v}_2 \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{m^2 - \frac{1}{4}} - \bar{v}_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m+1}}{m^2 + m} - \\
& \left. - \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{\bar{v}_{i+2}}{i+1} - \frac{2\bar{v}_i}{i^2-1} - \frac{\bar{v}_{i-2}}{i-1} \right) B_i \right\}; \quad (3,9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n = & g_n + v'_n - \frac{1}{2} \mu'_0 B_n - \frac{\mu'_n}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{m^2 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} (\mu'_{|i-n|} + \mu'_{i+n}) B_i + \\
& + \frac{\omega}{8} \left\{ (2g_0 - g_1) B_n - \frac{\bar{v}_0}{n} (B_{n-1} - B_{n+1}) - \frac{1}{2} (\bar{v}_{n-2} - 2\bar{v}_n + \bar{v}_{n+2}) B_1 - \right.
\end{aligned}$$

⁹⁾ Důkaz tohoto tvrzení je v dodatku III.

$$- \frac{1}{2} (\bar{v}_{n-1} + \bar{v}_{n+1}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{m^2 - \frac{1}{4}} - \bar{v}_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m+1}}{m^2 + m} - \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{\bar{v}_{i+n+1} + \bar{v}_{i-n+1}}{i+1} - \frac{\bar{v}_{i+n-1} + \bar{v}_{i-n-1}}{i-1} \right) B_i \Big\}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Systém (3,9) je nekonečný systém lineárních nehomogenních rovnic pro koeficienty B_n , $n = 1, 2, \dots$ a rovnice (3,8) určuje úhel nastavení α .

Prakticky postupujeme tak, že si zvolíme nějaký úhel nastavení α_0 . Pro tento úhel nastavení vypočítáme hodnoty koeficientů μ'_n , ν'_n a $\frac{\partial \mu'_n}{\partial \eta}$, $\frac{\partial \nu'_n}{\partial \eta}$.

Řešíme-li systém (3,9) s těmito hodnotami, dostaneme řešení, které označíme:

$$B_n^0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3,10)$$

Toto řešení nám však obecně nebude splňovat rovnici (3,8), protože úhel nastavení α_0 byl zvolen náhodně. Správný úhel nastavení nechť je:

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha, \quad (3,11)$$

kde $\Delta\alpha$ je malá veličina. O úhel $\Delta\alpha$ je nutno pootočit zvolený náhradní oblouk. Radiální a azimutální složka primární rychlosti budou potom:

$$\frac{V_r}{V_0} = \Delta\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\nu'_n + \frac{\partial \nu'_n}{\partial \eta} \eta + \left(\frac{\partial \nu'_n}{\partial \alpha} + \mu'_n \right) \Delta\alpha \right] \cos n\vartheta, \quad (3,12)$$

$$\frac{V_\tau}{V_0} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mu'_n + \frac{\partial \mu'_n}{\partial \eta} \eta + \left(\frac{\partial \mu'_n}{\partial \alpha} - \nu'_n \right) \Delta\alpha \right] \cos n\vartheta. \quad (3,13)$$

Dosadíme-li výrazy (3,12) a (3,13) do systému (3,9) a zanedbáme-li malé veličiny třetího a vyšších řádů, dostaneme:

$$B_n = B_n^0 + \left(\frac{\partial \nu'_n}{\partial \alpha} + \mu'_n \right) \Delta\alpha, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3,14)$$

Tyto hodnoty dosadíme do rovnice (3,8), z níž pak určíme hodnotu úhlu $\Delta\alpha$:

$$\Delta\alpha = \frac{P}{1+Q}, \quad (3,15)$$

kde

$$P = -v'_0 - g_0 + \frac{\omega^2}{96} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) + \frac{1}{4} (1 + \mu'_0) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}^0}{m^2 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \mu'_i B_i^0 - \frac{\omega}{8} \left\{ \left(\bar{v}_0 - \frac{1}{2} \bar{v}_2 \right) B_1^0 + \frac{1}{2} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 - \bar{v}_1 \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}^0}{m^2 - \frac{1}{4}} - \bar{v}_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m+1}^0}{m^2 + m} - \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{\bar{v}_{i+1}}{i+1} - \frac{\bar{v}_{i-1}}{i-1} \right) B_i^0 \right\}; \quad (3,16)$$

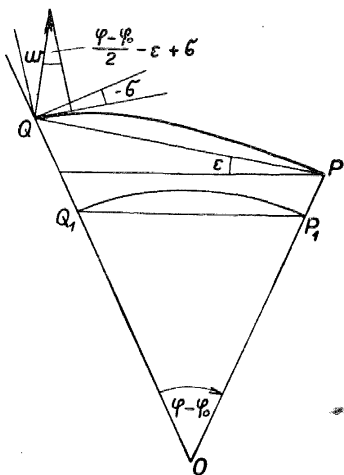
$$Q = \frac{\partial \nu'_0}{\partial \alpha} + \mu'_0 - \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\frac{\partial \nu'_{2m}}{\partial \alpha} + \mu'_{2m}}{m^2 - \frac{1}{4}} + \frac{\omega}{8} \left(B_1^0 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m+1}^0}{m^2 + m} \right).$$

Navrhujeme-li profil, požadujeme obvykle hladký vstup při provozních podmínkách. V našich vzorcích to znamená $g_0 = 0$. Dále se při výpočtech omezíme ve všech rozvojech na konečný a obvykle jen velmi malý počet členů. Jejich počet je dán charakterem úlohy a požadovanou přesností. Při řešení systému (3,9) se u vyšších koeficientů spokojíme první aproximací:

$$B_n \doteq g_n + v'_n, \quad n > N_0, \quad (3,17)$$

kdežto u nižších koeficientů počítáme ještě druhou, resp. třetí aproximaci.

4. Rozložení povrchové rychlosti na profilu



Obr. 4.

Pro posouzení funkce profilu je nutno znát průběh povrchové rychlosti potenciálního proudění, neboť na něm závisí chování mezní vrstvy.¹⁰⁾

Nejprve si odvodíme výraz pro tečnou složku indukované rychlosti. Element tečné složky rychlosti v bodě Q , indukované vírovým vláknem umístěným v bodě P (obr. 4), je

$$du = \pm dw \sin \left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2} - \varepsilon + \sigma \right), \quad (4,1)$$

kde znaménko + resp. - platí pro $\varphi > \varphi_0$ resp. $\varphi < \varphi_0$. Až na malé veličiny druhého řádu platí

$$\sigma = \operatorname{tg} \sigma = \frac{d\eta(\varphi_0)}{d\varphi_0}. \quad (4,2)$$

Do rovnice (4,1) dosadíme výrazy (1,6) a (1,7). Při zanedbání malých veličin třetího řádu dostaneme:

$$du = \frac{1}{4\pi} \left\{ 1 - \frac{1}{2} [\eta(\varphi) + \eta(\varphi_0)] - \left[\frac{1}{2} [\eta(\varphi) - \eta(\varphi_0)] \cotg \frac{\varphi - \varphi_0}{2} - \frac{d\eta(\varphi_0)}{d\varphi_0} \right] \cotg \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right\} \gamma(\varphi) d\varphi. \quad (4,3)$$

Integrací rovnice (4,3) dostaneme výraz pro tečnou složku indukované rych-

¹⁰⁾ Při návrhu lopatky musí se nakonec vycházet z rozložení povrchové rychlosti (především na podtlakové straně profilu), na základě něhož pak zvolíme rozložení cirkulace.

losti. Jako všechny rychlosti vyjádříme i tuto rychlost trigonometrickým rozvojem:¹¹⁾

$$\begin{aligned}
 \frac{u}{V_0} = & -\frac{\omega}{4} \left[1 - \frac{5}{6} \eta - \frac{\omega}{12} \cos \vartheta \frac{d\eta}{d\varphi} - \right. \\
 & - \frac{\omega}{24} \left(B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n-1} - B_{n+1}}{n} \right) \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) - \frac{\omega^2}{96} \frac{d\eta}{d\varphi} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) - \\
 & - \frac{\omega^2}{384} \left[(2B_0 - B_2) g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n-1} - B_{n+1}}{n} (g_{n-1} - g_{n+1}) \right] - \\
 & - \frac{1}{2} B_1 \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) - \frac{1}{3} B_2 \left[(1 + 4 \cos \vartheta) g_0 - 2g_1 \cos \vartheta - \frac{1}{2} g_2 \right] - \\
 & - \frac{1}{2} B_3 \left[(1 + 2 \cos \vartheta + 3 \cos 2\vartheta) g_0 - \frac{1}{4} (1 + 6 \cos 2\vartheta) g_1 - g_2 \cos \vartheta - \frac{1}{4} g_3 \right] - \\
 & - \sum_{n=4}^{\infty} B_n \left\{ g_0 \left[(1 + \cos \vartheta) \left(\frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta} + \frac{1}{n+1} \frac{\cos n\vartheta}{\sin^2 \vartheta} - \frac{1}{n^2-1} \frac{\sin(n-1)\vartheta}{\sin^3 \vartheta} \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \cos n\vartheta \right] - \frac{1}{n^2-1} \sum_{m=1}^{n-1} g_m \left[(n^2 - mn - 1) \cos(n-m)\vartheta + \right. \right. \\
 & \left. \left. + m \frac{\cos \vartheta \sin(n-m)\vartheta}{\sin \vartheta} \right] - \frac{g_n}{2(n+1)} \right\}. \quad (4,4)
 \end{aligned}$$

Povrchová rychlost U na profilu je pak dána výrazem:

$$U = V_\tau \cos \sigma + V_r \sin \sigma + u \pm \frac{1}{2} \frac{\gamma}{1 + \eta}, \quad (4,5)$$

kde znaménko $+$ platí pro podtlakovou a znaménko $-$ pro přetlakovou stranu profilu. Za $\cos \sigma$ a $\sin \sigma$ můžeme ve výrazu (4,5) dosadit přibližné vztahy:

$$\cos \sigma = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{d\eta}{d\varphi} \right)^2, \quad \sin \sigma = \frac{d\eta}{d\varphi}. \quad (4,6)$$

Hodnoty složek primární rychlosti V_r a V_τ , hustoty cirkulace γ a hodnoty funkcí $\frac{d\eta}{d\varphi}$ a η jsou (podle druhu úlohy) jednak dány, jednak určeny řešením rovnic (2,11) nebo (3,9) a vyčíslením řad (2,4), (2,5), (1,18), (2,6), (2,7).

5. Vliv profilu na proudění ve vzdálených bodech

Při vyšetřování rychlosti indukované profilem ve vzdálených bodech stačí nahradit profil jediným vírovým vláknem. Cirkulace Γ tohoto náhradního vlákna je rovna:

$$\Gamma = \int_0^l \bar{\gamma} ds, \quad (5,1)$$

¹¹⁾ Výpočet tečné složky indukované rychlosti je proveden v dodatku IV.

kde jsme označili délku profilu l a element jejího oblouku ds . Platí:

$$\bar{\gamma} ds = \gamma R d\varphi,^{12)}$$

takže

$$\Gamma = R \int_0^{\omega} \gamma d\varphi. \quad (5,2)$$

Dosadíme-li do rovnice (5,2) za $\gamma d\varphi$ výraz (1,20), dostaneme:

$$\Gamma = R \int_0^{\pi} \omega V_0 \{ -g_0(1 + \cos \chi) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} g_n [\cos(n-1)\chi - \cos(n+1)\chi] \} d\chi,$$

a tedy

$$\Gamma = \pi \omega R V_0 (-g_0 + \frac{1}{2} g_1). \quad (5,3)$$

(Pokračování.)

¹²⁾ Srov. pozn. 1) na str. 46.