Václav Dupač; Marcel Josífko

O jednom odhadu parametru σ normálního rozložení

Aplikace matematiky, Vol. 1 (1956), No. 1, 23–33

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102513

O JEDNOM ODHADU PARAMETRU σ NORMÁLNÍHO ROZLOŽENÍ

VÁCLAV DUPAČ, MARCEL JOSÍFKO

(Došlo dne 1. července 1955.) DT:519.25

Je navržen odhad parametru σ normálního rozložení z výběrů o velkém rozsahu pomocí prvního absolutního momentu kolem vhodně zvoleného počátku a nalezeny asymptotické vlastnosti tohoto odhadu.

1. Obsah článku.

Nechť $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou výběrové hodnoty normální náhodné proměnné ξ, jejíž distribuční funkce

$$\Phi(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx \tag{1}$$

závisí na dvou neznámých parametrech μ, σ.

Nejlepším („eficientním") odhadem parametru μ je — jak známo — výběrový průměr $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$; počítá se někdy pomocí vhodně zvoleného počátku: zvolíme nějaké okrouhlé číslo μ_0, „asi uprostřed" hodnot $x_1, \dots, x_n$, a utvoříme součty

$$\Sigma_+ = \sum_{x_i > \mu_0} (x_i - \mu_0) \, , \quad \Sigma_- = \sum_{x_i < \mu_0} (\mu_0 - x_i) \, ;$$

potom jest

$$\bar{x} = \mu_0 + \frac{\Sigma_+ - \Sigma_-}{n} \, .$$

Veličin Σ_+, Σ_- lze současně užít i k odhadu parametru σ. Odhadní funkcí jest

$$\tilde{s} = c_{\Sigma_+, \Sigma_-} \cdot \frac{\Sigma_+ + \Sigma_-}{n} \, ,$$

kde hodnotu součinitele c_{Σ_+, Σ_-} nalezneme z tabulky.

Pro výběry velkého rozsahu má odhad $\tilde{s}$ uspokojivé theoretické vlastnosti; přitom počet úkonů, potřebných k jeho výpočtu, je zřejmě minimální.

(Připomeňme, že výpočet $\tilde{s}$ je na př. podstatně jednodušší než výpočet odhadu σ pomocí průměrné odchylky $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|$, který je znesnadněn tím, že neplatí analogie vztahu $\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = \Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2$, takže $\bar{x}$ je třeba skutečně odečítat od každé hodnoty x_i zvlášť.)

Přesná definice a asymptotické vlastnosti odhadu $\tilde{s}$ jsou uvedeny v odst. 4. (Předchozí odstavce obsahují výsledky pomocné.) V odst. 5 jsou odvozeny opravy na třídění, odst. 6 obsahuje tabulky a numerický příklad.

2. Momenty kladné a záporné části normální náhodné proměnné.

Nechť η je náhodná proměnná s distribuční funkcí (1), nechť $\eta_+ = \text{Max}\,(0, \eta)$ a $\eta_- = \text{Max}(0, -\eta)$ značí kladnou a zápornou část náhodné proměnné η.

Střední hodnota náhodné proměnné η_+ jest

$$\mathsf{E}(\eta_+) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty y e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^\infty (\sigma t + \mu)\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}^\infty e^{-u}\,\mathrm{d}u + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sigma\varphi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + \mu\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right),$$

kde byly postupně provedeny substituce $\frac{y-\mu}{\sigma} = t$, $t^2 = 2u$ a užito běžného označení $\Phi(x; 0, 1) = \Phi(x)$, $\Phi'(x) = \varphi(x)$.

Výpočet ostatních momentů je zcela obdobný. Integrály typu $\int_a^\infty t^2\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ nalezneme s použitím vztahu $t^2\varphi(t)\,\mathrm{d}t = -\,t\,\mathrm{d}\varphi(t)$. Píšeme-li ještě $\delta = \frac{\mu}{\sigma}$, dostáváme tyto výrazy pro momenty 1. a 2. řádu:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(\eta_+) &= \sigma\{\varphi + \delta\Phi\}\,, \\ \mathsf{E}(\eta_-) &= \sigma\{\varphi + \delta\Phi - \delta\}\,, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{var}(\eta_+) &= \sigma^2\{\Phi + \delta^2\Phi + \delta\varphi - (\varphi + \delta\Phi)^2\}\,, \\ \mathsf{var}(\eta_-) &= \sigma^2\{1 - \Phi + \delta^2\Phi + \delta\varphi - (\varphi + \delta\Phi)^2\}\,, \\ \mathsf{cov}(\eta_+, \eta_-) &= -\,\sigma^2\{\varphi + \delta\Phi\}\{\varphi + \delta\Phi - \delta\}\,, \end{aligned} \tag{3}$$

kde za φ, Φ jest všude dosaditi $\varphi(\delta)$, $\Phi(\delta)$. (Jest $\mathsf{cov}(\eta_+, \eta_-) = -\,\mathsf{E}(\eta_+)\,\mathsf{E}(\eta_-)$, neboť $\eta_+ \,.\, \eta_- = 0$.)

3. Některé pomocné funkce.

Tvrzení tohoto odstavce budou vyslovena bez podrobných důkazů. Buďto je lze ověřit přímým výpočtem, nebo jde o snadné důsledky známých vět matematické analysy. (Viz na př. [1], díl II., kap. XII., § 4.)

Položme

$$f_1(x) = 2\varphi(x) + 2x\Phi(x) - x\,, \quad -\infty < x < \infty\,.$$

Funkce $f_1(x)$ je sudá, kladná a analytická v celém svém definičním oboru; koeficienty Maclaurinovy řady jsou dány výrazy

$$a_{2k}^{(1)} = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)\,2^k k!}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Položme

$$f_2(x) = \frac{x}{f_1(x)}\,, \quad -\infty < x < \infty\,.$$

Funkce $f_2(x)$ zobrazuje reálnou přímku na otevřený interval $(-1, 1)$, je lichá, rostoucí, má derivace všech řádů, první derivace je všude kladná; mimo to $f_2(x)$ je analytická (aspoň) v nějakém okolí nuly, koeficienty Maclaurinova rozvoje jsou

$$a_1^{(2)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,; \quad a_3^{(2)} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,; \quad a_5^{(2)} = \frac{7}{24}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,; \quad a_7^{(2)} = -\frac{41}{240}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,; \dots$$

Existuje tedy pro $x \in (-1, 1)$ funkce $f_3(x)$, inversní k $f_2(x)$ — t. j. $f_3(f_2(x)) = x$ pro všechna x —, která je rovněž lichá a má derivace všech řádů, při čemž první derivace je všude kladná; mimo to $f_3(x)$ je analytická v nějakém okolí nuly s koeficienty Maclaurinovy řady

$$a_1^{(3)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad a_3^{(3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}; \quad a_5^{(3)} = \frac{11}{24}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{5}{2}}; \quad a_7^{(3)} = \frac{121}{240}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{7}{2}}; \dots$$

Dále pro $x \in (-1, 1)$ definujme

$$f_4(x) = \frac{f_3(x)}{x}\,, \quad x \neq 0\,,$$

$$f_4(0) = \lim_{x \to 0} f_4(x)$$

(tato limita existuje).

Funkce $f_4(x)$ je sudá, kladná, má derivace všech řádů; v nějakém okolí nuly je analytická — přitom

$$a_k^{(4)} = a_{k+1}^{(3)}\,, \quad k = 0, 1, 2, \dots\,.$$

Konečně položme pro $x \in (-1, 1)$

$$f_5(x) = \frac{1}{f_4(x)}\,.$$

Funkce $f_5(x)$ je opět sudá, kladná a má derivace všech řádů, mimo to je analytická v nějakém okolí nuly, s koeficienty

$$a_0^{(5)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}; \quad a_2^{(5)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad a_4^{(5)} = -\frac{5}{24}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}; \quad a_6^{(5)} = -\frac{41}{240}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{5}{2}}; \ldots$$

Pro $u > 0$, $v > 0$ definujme nyní funkci dvou proměnných

$$H(u, v) = (u + v) \,.\, f_5(w)\,, \tag{4}$$

kde značí $w = \dfrac{u - v}{u + v}$.

Zřejmě H je kladná a má spojité parciální derivace všech řádů v celém svém definičním oboru. Značí-li $H_1 = \dfrac{\partial H}{\partial u}$, $H_2 = \dfrac{\partial H}{\partial v}$, jest

$$\begin{aligned} H_1(u, v) &= f_5(w) + (1 - w)\, f_5'(w) = \frac{1}{(f_3(w))^2}\,(f_3(w) - w(1 - w)\, f_3'(w)) \\ H_2(u, v) &= f_5(w) - (1 + w)\, f_5'(w) = \frac{1}{(f_3(w))^2}\,(- f_3(w) + w(1 + w)\, f_3'(w))\,. \end{aligned} \tag{5}$$

4. Definice a vlastnosti odhadní funkce $\tilde{s}$.

Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou výběrové hodnoty náhodné proměnné ξ s distribuční funkcí (1). Zvolme číslo μ_0 (takové, že $x_{\min} < \mu_0 < x_{\max}$) a položme

$$\eta = \xi - \mu_0\,, \quad y_k = x_k - \mu_0\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Utvořme dále výrazy

$$\bar{y}_+ = \frac{1}{n} \sum\nolimits_+ = \frac{1}{n} \sum_{y_k > 0} y_k\,; \quad \bar{y}_- = \frac{1}{n} \sum\nolimits_- = -\frac{1}{n} \sum_{y_k < 0} y_k\,.$$

Zřejmě $\bar{y}_+$, $\bar{y}_-$ jsou výběrové průměry náhodných proměnných η_+, η_-. Jejich momenty známe z odstavce 2, kde je ovšem třeba místo μ psáti $\mu - \mu_0$, a kde δ značí $\dfrac{\mu - \mu_0}{\sigma}$.

Definujme nyní výběrovou charakteristiku $\tilde{s}$ vztahem

$$\tilde{s} = H(\bar{y}_+, \bar{y}_-) = c_{\Sigma_+, \Sigma_-} \,.\, \frac{\Sigma_+ + \Sigma_-}{n}\,, \tag{6}$$

kde

$$c_{\Sigma_+ \Sigma_-} = f_5\left(\frac{\Sigma_+ - \Sigma_-}{\Sigma_+ + \Sigma_-}\right).$$

Podle věty Cramérovy ([2], str. 366), jejíž předpoklady — jak vyplývá z odst. 2 — jsou splněny, je výběrová charakteristika

$$\sqrt{n}[H(\bar{y}_+, \bar{y}_-) - H(\mathsf{E}(\eta_+), \mathsf{E}(\eta_-))] \tag{7}$$

asymptoticky normální, při čemž střední hodnota limitního normálního rozložení je 0 a jeho rozptyl je dán výrazem

$$\mathsf{var}(\eta_+) \, . \, H_1^2(\mathsf{E}(\eta_+), \mathsf{E}(\eta_-)) + 2\mathsf{cov}(\eta_+, \eta_-) \, . \, H_1(\mathsf{E}(\eta_+), \mathsf{E}(\eta_-)) \times \times H_2(\mathsf{E}(\eta_+), \mathsf{E}(\eta_-)) + \mathsf{var}(\eta_-) \, . \, H_2^2(\mathsf{E}(\eta_+), \mathsf{E}(\eta_-)) \, . \tag{8}$$

Dosazujeme-li do vzorců (4), (5) dle (2) za

$$u = \mathsf{E}(\eta_+) = \sigma\{\varphi + \delta\Phi\} \, , \quad v = \mathsf{E}(\eta_-) = \sigma\{\varphi + \delta\Phi - \delta\} \, ,$$

jest

$$w = f_2(\delta) \, , \quad f_3(w) = \delta \, , \quad f_3'(w) = \frac{1}{f_2'(\delta)} \, .$$

Jednoduchým výpočtem pak dostáváme

$$H(\mathsf{E}(\eta_+), \mathsf{E}(\eta_-)) = \sigma \, ,$$

$$H_1(\mathsf{E}(\eta_+), \mathsf{E}(\eta_-)) = \frac{1 - \Phi}{\varphi} \, , \quad H_2(\mathsf{E}(\eta_+), \mathsf{E}(\eta_-)) = \frac{\Phi}{\varphi} \, ;$$

dosazením těchto hodnot do (7) a (8) plyne výsledek:

Výběrová charakteristika $\tilde{s}$ — definovaná vzorcem (6) — je konsistentním, asymptoticky normálním odhadem parametru σ; jeho směrodatná chyba $\mathsf{d}(\tilde{s})$ je dána výrazem

$$\mathsf{d}(\tilde{s}) = \frac{\tilde{s}}{\sqrt{n}} \left[\frac{(1 + \delta'^2) \, \Phi(1 - \Phi)}{\varphi^2} + \frac{\delta'(1 - 2\Phi)}{\varphi} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \, ,$$

kde

$$\varphi = \varphi(\delta') \, , \quad \Phi = \Phi(\delta') \, , \quad \delta' = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \, ,$$

a jeho asymptotická vydatnost

$$\mathsf{e}(\tilde{s}) = \frac{\frac{1}{2}\varphi^2}{(1 + \delta^2) \, \Phi(1 - \Phi) + \delta\varphi(1 - 2\Phi) - \varphi^2}$$

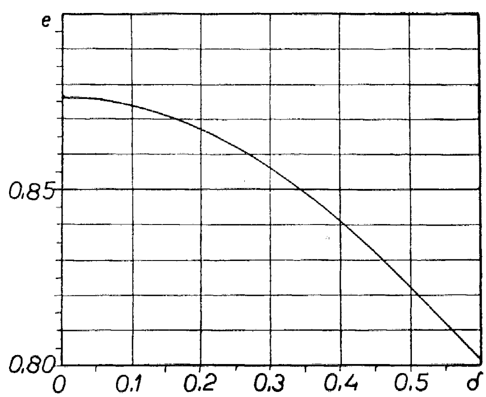
závisí (jen) na $|\delta|$.

Zaokrouhleno na 2 desetinná místa, jest

$$\mathsf{d}(\tilde{s}) = \begin{cases} \dfrac{0{,}76 \, . \, \tilde{s}}{\sqrt{n}} & \textit{pro} \quad |\delta'| \leq 0{,}3 \\[2ex] \dfrac{0{,}77 \, . \, \tilde{s}}{\sqrt{n}} & \textit{pro} \quad |\delta'| = 0{,}4 \\[2ex] \dfrac{0{,}78 \, . \, \tilde{s}}{\sqrt{n}} & \textit{pro} \quad |\delta'| = 0{,}5 \end{cases}$$

a

$$0{,}82 < \mathsf{e}(\tilde{s}) < 0{,}88 \quad \textit{pro} \quad |\delta| \leq 0{,}5 \, .$$



Obr. 1. Asymptotická vydatnost $\mathsf{e}(\tilde{s})$ v závislosti na δ.

5. Opravy na třídění.

V případě, že výběrové hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou seskupeny do tříd o šířce h'; je třeba uvažovat místo náhodné proměnné ξ s distribuční funkcí (1), náhodnou proměnnou ξ^0, která nabývá pouze hodnot

$$\mu_0 + \nu h' \,, \quad \nu = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

s pravděpodobnostmi

$$\mathsf{P}(\xi^0 = \mu_0 + \nu h') = \mathsf{P}\left(\mu_0 + \nu h' - \frac{1}{2}h' < \xi \leq \mu_0 + \nu h + \frac{1}{2}h'\right) =$$

$$= \Phi\left(-\frac{\mu - \mu_0}{\sigma} + \nu\frac{h'}{\sigma} + \frac{1}{2}\frac{h'}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\mu - \mu_0}{\sigma} + \nu\frac{h'}{\sigma} - \frac{1}{2}\frac{h'}{\sigma}\right).$$

(Předpokládáme, že μ_0 je půlícím bodem některého z třídních intervalů.) Položme $\eta^0 = \xi^0 - \mu_0$, $h = \frac{h'}{\sigma}$, $\delta = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}$; potom $\mathsf{E}(\eta^0_+) = \sigma \sum_{\nu=0}^{\infty} g(h\nu)$, kde $g(x) = x \int_{x-\delta-\frac{1}{2}h}^{x-\delta+\frac{1}{2}h} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$, a $\mathsf{E}(\eta^0_-)$ je dáno týmtéž výrazem, změníme-li $-\delta$ na $+\delta$.

Podle Euler-Maclaurinova sumačního vzorce (viz na př. [2], str. 124), jehož předpoklady jsou zřejmě splněny, jest

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} g(h\nu) = \int_0^\infty g(hx)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{12}h\,g'(0) + \frac{1}{720}h^3 g^{(3)}(0) - h^5 \int_0^\infty P_5(x)\, g^{(5)}(hx)\,\mathrm{d}x\,. \quad (9)$$

Snadno se vypočte, že

$$\int_0^\infty g(hx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{h}\int_0^\infty g(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^\infty z\,\varphi(z-\delta)\,\mathrm{d}z +$$

$$+ \frac{1}{24}h^2 \int_0^\infty z\varphi''(z-\delta)\,\mathrm{d}z + O(h^4) = \varphi(\delta) + \delta\Phi(\delta) + \frac{1}{24}h^2\varphi(\delta) + O(h^4)$$

dále, že

$$-\tfrac{1}{12}h\,g'(0) = -\tfrac{1}{12}h^2\varphi(\delta) + O(h^4)\,,$$

a že poslední dva členy v (9) jsou rovněž $O(h^4)$; zanedbáme-li členy řádu h^4, dostáváme

$$\mathsf{E}(\eta^0_+) = \mathsf{E}(\eta_+) - \frac{\varphi(\delta)}{24\sigma}h'^2\,, \quad \mathsf{E}(\eta^0_-) = \mathsf{E}(\eta_-) - \frac{\varphi(\delta)}{24\sigma}h'^2\,.$$

Označíme-li $\sigma^0 = H(\mathsf{E}(\eta^0_+), \mathsf{E}(\eta^0_-))$, jest

$$\sigma^0 = H(\mathsf{E}(\eta_+), \mathsf{E}(\eta_-)) + [\mathsf{E}(\eta^0_+) - \mathsf{E}(\eta_+)]\,.\,H_1(\mathsf{E}(\eta_+), \mathsf{E}(\eta_-)) +$$

$$+ [\mathsf{E}(\eta^0_-) - \mathsf{E}(\eta_-)]\,.\,H_2(\mathsf{E}(\eta_+), \mathsf{E}(\eta_-)) + O(h^4) = \sigma - \frac{1}{24\sigma}h'^2 + O(h^4)\,.$$

Zanedbáme-li opět členy řádu h^4, máme konečně

$$\sigma = \sigma^0 + \frac{1}{24\sigma^0} h'^2 , \tag{10}$$

nezávisle na δ.

Připojme ještě poznámku, že v případě roztříděného výběru (obvykle) položíme $y_k = \frac{x_k - \mu_0}{h'}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\Sigma_+ = \sum_{y_k > 0} y_k$ atd., a počítáme $\tilde{s}$ podle vzorce

$$\tilde{s} = h' \,.\, c_{\Sigma_+\Sigma_-} \,.\, \frac{\Sigma_+ + \Sigma_-}{n} + \text{oprava.}$$

6. Numerický příklad. Tabulka.

Výpočet $\tilde{s}$ je obzvláště jednoduchý, lze-li volit $\mu_0 = 0$; to lze zejména tehdy, kdy hodnoty x_i náhodného výběru představují už odchylky od nějaké pevné hodnoty.

Mějme na příklad tyto výběrové hodnoty ($n = 100$):

—0,84	0,68	—0,03	0,46	—0,32	—0,85	0,27	1,00
1,37	—0,77	—0,41	—0,77	0,18	—0,46	1,39	—0,51
—0,18	—1,39	0,62	0,00	0,08	0,35	—0,14	0,05
0,35	—1,91	0,83	1,01	1,98	0,23	—0,76	—0,69
2,82	0,05	—0,78	—0,92	0,91	0,20	0,37	—0,58
2,12	1,32	0,03	0,98	—0,32	—0,17	—2,28	—0,69
—0,99	—0,67	—2,30	0,24	—1,77	0,12	0,36	—1,41
0,34	—0,81	0,78	1,01	0,16	—1,48	1,37	0,24
0,64	0,96	0,66	1,49	0,79	0,52	1,04	0,41
0,11	—0,24	—0,34	1,16	0,20	1,56	—0,67	0,15
—0,02	—0,66	1,16	0,48	1,31	1,04	0,39	—0,24
—0,86	1,08	0,76	0,40	0,35	—0,18		
0,01	0,27	—1,00	—0,12	0,74	—0,26		

(Jsou to první dva sloupce z tabulek náhodných normálních odchylek [3].)

Sečtením kladných a sečtením záporných čísel dostáváme

$$\Sigma_+ = 41{,}95 , \quad \Sigma_- = 29{,}79 ;$$

odtud postupně

$$\frac{\Sigma_+ - \Sigma_-}{100} = 0{,}1216 = \bar{x} ; \quad \frac{\Sigma_+ + \Sigma_-}{100} = 0{,}7174 ;$$

$$\frac{\Sigma_+ - \Sigma_-}{\Sigma_+ + \Sigma_-} = \frac{1216}{7174} \doteq 0{,}1695 ;$$

Z tabulky:

$$c_{\Sigma_+\Sigma_-} \doteq 1{,}2418 ;$$

podle vzorce (6):

$$\tilde{s} \doteq 1{,}2418 \,.\, 0{,}7174 \doteq 0{,}891\,,$$

$$\mathsf{d}(\tilde{s}) \doteq 0{,}067\,.$$

Přitom $c_{\Sigma_+\Sigma_-}$ lze určit (s přesností na 3 desetinná místa) rovněž z nomogramu — bez výpočtu zlomku $\dfrac{\Sigma_+ - \Sigma_-}{\Sigma_+ + \Sigma_-}$.

Uveďme pro srovnání odhad σ pomocí průměrné odchylky:

$$s_0 = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi} \cdot \tfrac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} |x_i - x| \doteq 0{,}882\,;$$

$$\mathsf{d}(s_0) \doteq 0{,}067\,;$$

Tabulka hodnot $c_{\Sigma_+\Sigma_-} = f_5(w)$ pro $w = \dfrac{|\Sigma_+ - \Sigma_-|}{\Sigma_+ + \Sigma_-}$

w	$f_5(w)$	w	$f_5(w)$	w	$f_5(w)$
0,000	1,2533	0,185	1,2395	0,370	1,1966
0,005	1,2533	0,190	1,2388	0,375	1,1950
0,010	1,2533	0,195	1,2380	0,380	1,1933
0,015	1,2532	0,200	1,2372	0,385	1,1917
0,020	1,2532	0,205	1,2364	0,390	1,1900
0,025	1,2531	0,210	1,2355	0,395	1,1883
0,030	1,2530	0,215	1,2347	0,400	1,1865
0,035	1,2528	0,220	1,2338	0,405	1,1848
0,040	1,2527	0,225	1,2328	0,410	1,1830
0,045	1,2525	0,230	1,2319	0,415	1,1812
0,050	1,2523	0,235	1,2310	0,420	1,1793
0,055	1,2521	0,240	1,2300	0,425	1,1774
0,060	1,2519	0,245	1,2290	0,430	1,1755
0,065	1,2516	0,250	1,2280	0,435	1,1736
0,070	1,2514	0,255	1,2269	0,440	1,1717
0,075	1,2511	0,260	1,2258	0,445	1,1697
0,080	1,2508	0,265	1,2247	0,450	1,1677
0,085	1,2504	0,270	1,2236	0,455	1,1656
0,090	1,2501	0,275	1,2225	0,460	1,1636
0,095	1,2497	0,280	1,2214	0,465	1,1615
0,100	1,2493	0,285	1,2202	0,470	1,1593
0,105	1,2489	0,290	1,2190	0,475	1,1572
0,110	1,2485	0,295	1,2178	0,480	1,1550
0,115	1,2480	0,300	1,2165	0,485	1,1528
0,120	1,2475	0,305	1,2152	0,490	1,1505
0,125	1,2470	0,310	1,2139	0,495	1,1482
0,130	1,2465	0,315	1,2126	0,500	1,1459
0,135	1,2460	0,320	1,2113	0,505	1,1436
0,140	1,2455	0,325	1,2099	0,510	1,1412
0,145	1,2449	0,330	1,2085	0,515	1,1388
0,150	1,2443	0,335	1,2071	0,520	1,1364
0,155	1,2437	0,340	1,2057	0,525	1,1339
0,160	1,2430	0,345	1,2042	0,530	1,1314
0,165	1,2424	0,350	1,2027	0,535	1,1289
0,170	1,2417	0,355	1,2012	0,540	1,1263
0,175	1,2410	0,360	1,1997	0,545	1,1237
0,180	1,2403	0,365	1,1981	0,550	1,1210

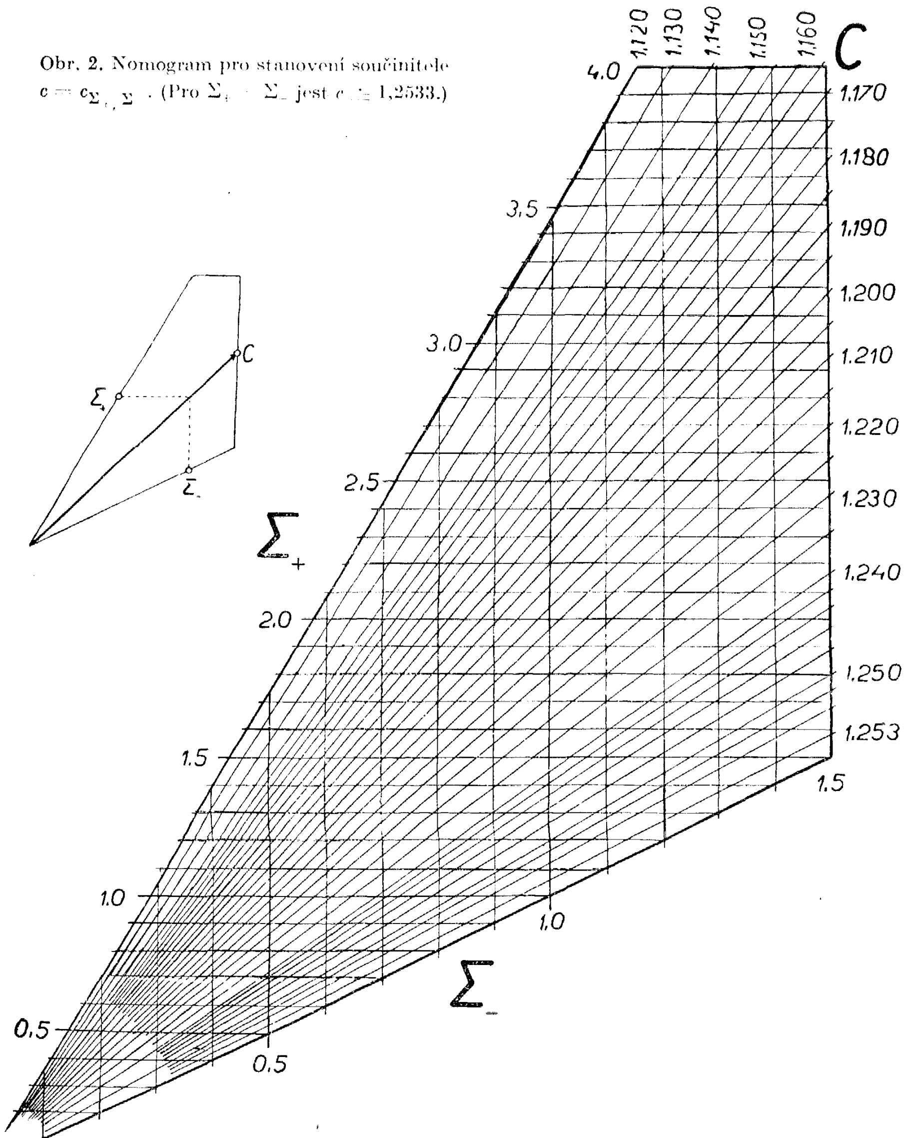
a pomocí směrodatné odchylky:

$$s = \sqrt{\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (x_i - x)^2} \doteq 0{,}911 \; ;$$

$$\mathrm{d}(s) \doteq 0{,}064 \; .$$

Poznámka: Při určování hodnoty c_{Σ_+, Σ_-} z nomogramu lze zaměniti stupnice pro Σ_+ a Σ_-; rovněž lze vynásobit oba součty Σ_+ a Σ_- týmž číslem.

Obr. 2. Nomogram pro stanovení součinitele $c = c_{\Sigma_+, \Sigma_-}$. (Pro $\Sigma_+ = \Sigma_-$ jest $c \doteq 1{,}2533$.)



LITERATURA

[1] *Г. М. Фихтенгольц:* Курс дифференциального и интегрального исчисления, 1951.
[2] *H. Cramér:* Mathematical Methods of Statistics, Princeton University Press, 1946.
[3] *H. Wold:* Random normal deviates, Tracts for computers No XXV, Cambridge, 1948.

Резюме

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРА σ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

ВАЦЛАВ ДУПАЧ, МАРЦЕЛ ИОСИФКО (Václav Dupač, Marcel Josífko)

(Поступило в редакцию 1/VII 1955 г.)

Лучшей оценкой параметра μ по n наблюдениям над нормально — $N(\mu, \sigma)$ — распределенной случайной величиной является их среднее арифметическое $\bar{x} = \frac{1}{n} \Sigma x_i$. Оно вычисляется иногда следующим образом: выберется подходящее число μ_0, образуются суммы $\Sigma_+ = \sum_{x_i > \mu_0} (x_i - \mu_0)$, $\Sigma_- = \sum_{x_i < \mu_0} (\mu_0 - x_i)$, и $\bar{x}$ найдется по формуле

$$\bar{x} = \mu_0 + \frac{\Sigma_+ - \Sigma_-}{n} .$$

В статье доказывается, что величинами Σ_+, Σ_- можно воспользоваться одновременно и для оценки параметра σ, а именно при помощи статистики

$$\tilde{s} = c_{\Sigma_+\Sigma_-} \frac{\Sigma_+ + \Sigma_-}{n} ,$$

причем функция $c_{\Sigma_+\Sigma_-} = f_5 \left(\frac{\Sigma_+ - \Sigma_-}{\Sigma_+ + \Sigma_-} \right)$ определена в § 3-ем и значения ее найдутся в таблице или по номограмме.

Статистика $\tilde{s}$ является состоятельной и асимптотически-нормальной оценкой параметра σ, асимптотическая эффективность которой зависит от $\delta = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}$ и удовлетворяет неравенствам $0{,}82 < \mathbf{e}(\tilde{s}) < 0{,}88$ для $|\delta| \leqq 0{,}5$.

Summary

ON AN ESTIMATE OF THE PARAMETER σ FROM NORMAL POPULATION

VÁCLAV DUPAČ, MARCEL JOSÍFKO

(Received July 1, 1955.)

Let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be the sample values of a normal — $N(\mu, \sigma)$ — random variable. Evaluating the sample mean $\bar{x}$ (which is an efficient estimate of μ), we proceed sometimes as follows: we choose a suitable round number μ_0, calculate the sums $\Sigma_+ = \sum\limits_{x_i > \mu_0} (x_i - \mu_0)$, $\Sigma_- = \sum\limits_{x_i < \mu_0} (\mu_0 - x_i)$ and find $\bar{x}$ according to the formula

$$\bar{x} = \mu_0 + \frac{\Sigma_+ - \Sigma_-}{n}.$$

In the present paper, it is shown that the sums Σ_+, Σ_- can be used at the same time in order to estimate σ — namely, by means of the statistic

$$\tilde{s} = c_{\Sigma_+\Sigma_-} \frac{\Sigma_+ + \Sigma_-}{n},$$

where the function $c_{\Sigma_+\Sigma_-} = f_5\left(\frac{\Sigma_+ - \Sigma_-}{\Sigma_+ + \Sigma_-}\right)$ is defined in § 3 and tabulated in a table and a nomograph.

The statistic $\tilde{s}$ is a consistent, asymptotically normal estimate of the parameter σ, its asymptotic efficiency being a function of $\delta = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}$ only, and taking on values $0{,}82 < \mathsf{e}(\tilde{s}) < 0{,}88$ for $|\delta| \leq 0{,}5$.