

Zdeněk Hustý

Die höheren Ableitungen zusammengesetzter Funktion

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 40 (1990), No. 3, 528–533

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102405>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1990

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## DIE HÖHEREN ABLEITUNGEN ZUSAMMENGESETZTER FUNKTION

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

(Eingegangen am 23. Dezember 1988)

In der Arbeit wird die Formel für die explizite Berechnung der  $k$ -ten Ableitung zusammengesetzter Funktion nachgewiesen,  $k \geq 2$ .

## 1. DIE ERWEITERUNG DER FORMEL VON SCHLÖMILCH

Es sei  $z(t) \in \mathcal{C}^n(I_2)$ ,  $T(x) \in \mathcal{C}^n(I_1)$ , wobei  $I_1, I_2$  die Intervalle sind. Es sei ferner  $T(I_1) = I_2$ ,  $T' \neq 0$  in  $I_1$  und es haben die Funktionen  $z, T'$  die Dimension 0. (Der Begriff der Dimension ist in [1; I. Teil, S. 481] erklärt.)

**1.1 Satz.** Ist  $y = z \circ T$ , so ist

$$(1.1) \quad y^{(k)} = \sum_{j=0}^k \varphi_j^k(T') z^{(h-j)} \circ T,$$

wo  $\varphi_j^k$  das  $k$ -te Polynom des Elementes  $T'$  mit Dimension  $j$  ist; es ist die homogene Funktion  $(k-j)$ -tes Grades und befriedigt die Differenzgleichung

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \varphi_j^{k+1} &= T' \varphi_j^k + (\varphi_{j-1}^k), \quad \varphi_j^j = \begin{cases} 1 & \text{für } j=0 \\ 0 & \text{für } j>0 \end{cases} \\ \varphi_{k+v}^k &= \varphi_{-v}^k = 0, \quad k=0, 1, \dots, n; \quad j=0, 1, \dots, k; \quad v=1, 2, \dots \end{aligned}$$

Der Beweis wird mittels Induktion in bezug auf  $k$  durchgeführt.

**1.2. Die Formel von Schlömilch** (siehe [2; S. 4–5]).

$$(1.3) \quad \varphi_{k-j}^k = \frac{1}{j!} \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{d^k}{d\varrho^k} [T(x+\varrho) - T(x)]^j, \quad j=1, 2, \dots, k.$$

Beweis. Es sei  $z(t) = t^k$ ,  $k \geq 1$ , so dass  $y = T^k$ . Nach (1.1) ist

$$(1.4) \quad y^{(k)} = \sum_{j=1}^k k^{[j]} t^{k-j} \varphi_{k-j}^k(T') \circ T,$$

wo  $k^{[j]} = k(k-1)\dots(k-j+1)$ . Setzen wir  $T(x+\varrho) - T(x) = \alpha(x, \varrho)$ . Dann

$$y^{(k)} = \frac{d^k}{dx^k} [T(x)]^k = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{d^k}{d\varrho^k} [T(x+\varrho)]^k =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{d^k}{d\varrho^k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} T(x)^{k-j} \alpha(x, \varrho)^j = \\
&= \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} T^{k-j} \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{d^k}{d\varrho^k} \alpha(x, \varrho)^j \circ T.
\end{aligned}$$

Wenn wir diese Gleichung mit (1.4) vergleichen, erhalten wir (1.3).

**1.3. Bemerkung.** Laut (1.3) schliessen wir, dass für  $j > k$

$$(1.5) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{d^k}{d\varrho^k} [T(x + \varrho) - T(x)]^j = 0$$

gilt. Die Gleichung (1.5) lässt sich unabhängig von (1.3) mittels Induktion in bezug auf  $j$  beweisen.

**1.4. Es gilt**

$$(1.6) \quad \phi_{k-j}^k = \frac{1}{j!} \sum_{v=0}^j \binom{j}{v} (-1)^{j-v} T(x)^{j-v} [T(x)^v]^{(k)}.$$

**Beweis.** Es ist

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{d^k}{d\varrho^k} [T(x + \varrho) - T(x)]^j = \\
&= \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{d^k}{d\varrho^k} \sum_{v=0}^j \binom{j}{v} (-1)^{j-v} T(x)^{j-v} T(x + \varrho)^v = \\
&= \sum_{v=0}^j \binom{j}{v} (-1)^{j-v} T(x)^{j-v} \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{d^k}{d\varrho^k} T(x + \varrho)^v = \\
&= \sum_{v=0}^j \binom{j}{v} (-1)^{j-v} T(x)^{j-v} [T(x)^v]^{(k)}.
\end{aligned}$$

Wenn wir dieses Ergebnis in (1.3) einsetzen, erhalten wir (1.6).

**Bemerkungen.**

a) Beachten wir, dass die Funktion

$$\phi_j^k = \frac{1}{(k-j)!} \sum_{v=0}^{k-j} \binom{k-j}{v} (-1)^{k-j-v} T^{k-j-v} (T^v)^{(k)}$$

die partikuläre Lösung der Gleichung (1.2) mit der Anfangsbedingung  $\phi_j^j = 0$ ,  $j > 0$  ist.

b) Aus (1.6) ergibt sich für  $k \geq 1$ ,  $j = 0, 1, 2$   $\phi_k^k = 0$ ,  $\phi_{k-1}^k \approx T^{(k)}$ ,  $\phi_{k-2}^k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} T^{(k-j)} T^{(j)}$ . Wenn  $k = 2i$  resp.  $k = 2i + 1$ , dann  $\phi_{2(i-1)}^{2i} = \binom{2i-1}{i-1} \cdot [T^{(i)}]^2 + \sum_{s=1}^{i-1} \binom{2i}{i-s} T^{i-s} T^{(i+s)}$ ,  $\phi_{2i-1}^{2i+1} = \sum_{s=0}^{i-1} \binom{2i+1}{i-s} T^{(i-s)} T^{(i+s+1)}$ .

c) Für  $j = 0, 1, 2, 3$  erhalten wir aus (1.2) die folgenden Formeln

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \phi_0^k &= (T')^k, \\ \phi_1^k &= \binom{k}{1} (T')^{k-1} \left( \frac{k-1}{2} \frac{T''}{T'} \right), \\ \phi_2^k &= \binom{k}{2} (T')^{k-2} \left[ \frac{(k-2)^{[2]1}}{4} \left( \frac{T''}{T'} \right)^2 + \frac{k-2}{3} \frac{T'''}{T'} \right], \\ \phi_3^k &= \binom{k}{3} (T')^{k-3} \left[ \frac{(k-3)^{[3]1}}{8} \left( \frac{T''}{T'} \right)^3 + \frac{(k-3)^{[2]1}}{2} \frac{T''}{T'} \frac{T'''}{T'} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k-3}{4} \frac{T^{(4)}}{T'} \right]. \end{aligned}$$

## 2. DIE EXPLIZITE FORMEL

Laut (1.6), (1.7) schliessen wir, dass die Gleichung  $(T^k)^{(k)} = k! (T')^k + \sum_{v=0}^{k-1} \binom{k}{v} (-1)^{k-v+1} T^{k-v} (T^v)^{(k)}$  gilt. Wir verallgemeinern diese Gleichung.

2.1. Für  $j \geq 2, k \geq 2$  gelten die folgenden Formeln:

$$(2.1) \quad \sum_{v=\delta}^j \binom{j}{v} (-1)^{j-v} = \delta (-1)^{j+1} + \varepsilon - j, \quad \delta = 0, 1; \quad \varepsilon = j - 1, j.$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \sum_{s=1}^{k-1} \binom{k}{s} T^{(-s)} \sum_{v=1}^{j-1} \binom{j}{v} (-1)^{j+1-v} T^{j-v} (T^v)^{(s)} &= \\ = \sum_{v=1}^j \binom{j+1}{v} (-1)^{j+2-v} T^{j+1-v} (T^v)^{(k)} - T^{(k)} T^j - T(T^j)^{(k)}. \end{aligned}$$

Die Formel (2.1) ist klar. Die als  $f(T)$  bezeichnete Summe an der linken Seite der Formel (2.2) kann folgendermassen umformt werden:

$$\begin{aligned} f(T) &= \sum_{v=1}^{j-1} \binom{j}{v} (-1)^{j+1-v} T^{j-v} \sum_{s=1}^{k-1} \binom{k}{s} T^{(k-s)} (T^v)^{(s)} = \\ &= \sum_{v=1}^{j-1} \binom{j}{v} (-1)^{j+1-v} T^{j-v} [(T^{v+1})^{(k)} - T^{(k)} T^v - T(T^v)^{(k)}] = \\ &= \sum_{v=2}^j \binom{j}{v-1} (-1)^{j+2-v} T^{j+1-v} (T^v)^{(k)} + T^{(k)} T^j \sum_{v=1}^{j-1} \binom{j}{v} (-1)^{j-v} + \\ &\quad + \sum_{v=1}^{j-1} \binom{j}{v} (-1)^{j+2-v} T^{j+1-v} (T^v)^{(k)} = \\ &= \sum_{v=1}^j \left[ \binom{j}{v-1} + \binom{j}{v} \right] (-1)^{j+2-v} T^{j+1-v} (T^v)^{(k)} - T^{(k)} T^j - T(T^j)^{(k)}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich leicht (2.2).

2.2. Setzen wir für  $j \geq 2, k \geq 2$

$$(2.3) \quad S_1^{j-1}(s_i, k) = \begin{cases} 0 & \text{für } j > k, \\ \sum_{s_1=j-1}^{s_0-1} \sum_{s_2=j-2}^{s_1-1} \dots \sum_{s_{j-1}=1}^{s_{j-2}-1} \prod_{v=1}^j \binom{s_{v-1}}{s_v} T^{(s_{v-1}-s_v)} & \text{für } j \leq k, \\ s_0 = k, \quad s_j = 0. \end{cases}$$

Dann ist für  $j \leq k-1$

$$S_1^j(s_i, k) = \sum_{s_1=j}^{k-1} \binom{k}{s_1} T^{(k-s_1)} \sum_{s_2=j-1}^{s_1-1} \sum_{s_3=j-2}^{s_2-1} \dots \sum_{s_j=1}^{s_{j-1}-1} \prod_{v=2}^{j+1} \binom{s_{v-1}}{s_v} T^{(s_{v-1}-s_v)}$$

wobei  $s_{j+1} = 0$  gleichgesetzt wird. Wenn wir in den Summen  $s_{v-1}$  anstatt  $s_v$  schreiben, erhalten wir

$$S_1^j(s_i, k) = \sum_{s=j}^{k-1} \binom{k}{s} T^{(k-s)} \sum_{s_1=j-1}^{s-1} \sum_{s_2=j-2}^{s_1-1} \dots \sum_{s_{j-1}=1}^{s_{j-2}-1} \prod_{v=1}^j \binom{s_{v-1}}{s_v} T^{(s_{v-1}-s_v)}, \\ s_0 = s, \quad s_j = 0,$$

d.h.

$$(2.4) \quad S_1^j(s_i, k) = \begin{cases} 0 & \text{für } j > k-1, \\ \sum_{s=j}^{k-1} \binom{k}{s} T^{(k-s)} S_1^{j-1}(s_i, s) & \text{für } j \leq k-1. \end{cases}$$

2.3. **Hilfssatz.** Für  $j \geq 2, k \in N$  gilt

$$(2.5) \quad (T^j)^{(k)} = \sum_{v=1}^{j-1} \binom{j}{v} (-1)^{j+1-v} T^{j-v} (T^v)^{(k)} + S_{i=1}^{j-1}(s_i, k),$$

wobei für  $j > k$   $S_{i=1}^{j-1}(s_i, k) = 0$  gleichgesetzt wird.

Der Beweis wird mittels Induktion in bezug auf  $j$  durchgeführt. Nach (2.5) ist  $(T^2)' = 2TT'$ . Für  $k \geq 2$  erhalten wir aus (2.5)

$$(T^2)^{(k)} = 2TT^{(k)} + \sum_{s_1=1}^{k-1} \binom{k}{s_1} T^{(k-s_1)} T^{(s_1)} = \sum_{s_1=0}^k \binom{k}{s_1} T^{(k-s_1)} T^{(s_1)},$$

so dass (2.5) für  $j = 2, \forall k \in N$  in Kraft ist. Es gilt (2.5) für  $j = 2, \forall k \in N$ . Mit Hilfe der Berechnung überzeugt man sich leicht, dass die Gleichung

$$(T^{j+1})' = \sum_{v=1}^j \binom{j+1}{v} (-1)^{j+2-v} T^{j+1-v} (T^v)'$$

gilt. Es sei  $k \geq 2$ . Dann ist laut (2.5)

$$(T^{j+1})^{(k)} = T^{(k)} T^j + T^{(T^j)^{(k)}} + \sum_{s=1}^{k-1} \binom{k}{s} T^{(k-s)} (T^j)^{(s)} = \\ = T^{(k)} T^j + T^{(T^j)^{(k)}} + \sum_{s=1}^{k-1} \binom{k}{s} T^{(k-s)} \sum_{v=1}^{j-1} \binom{j}{v} (-1)^{j+1-v} (T^v)^{(s)} +$$

$$+ \sum_{s=j}^{k-1} \binom{k}{s} T^{(k-s)} S_1^{j-1}(s_i, s),$$

wobei die letzte Summe für  $j > k - 1$  Null gleicht.

Nach (2.2), (2.4) ist

$$(T^{j+1})^{(k)} = \sum_{v=1}^j \binom{j+1}{v} (-1)^{j+2-v} T^{j+1-v} (T^v)^k + S_1^j(s_i, k)$$

wobei für  $j+1 > k$   $S_1^j(s_i, k) = 0$  ist. Hilfssatz 2.3 ist bewiesen.

**2.4. Satz.** Es ist

$$(2.6) \quad \varphi_k^k = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k > 0 \end{cases}, \quad \varphi_{k-1}^k(T') = T^{(k)} \quad \text{für } k \geq 1.$$

Ist  $k \geq 2$ ,  $1 < j \leq k$ , dann

$$(2.7) \quad \varphi_{k-j}^k(T') = \frac{1}{j!} \sum_{i=1}^{j-1} S(s_i, k).$$

**Beweis.** Laut Bemerkung 1.4 b) gilt (2.6). Für  $k \geq 2$ ,  $1 < j \leq k$  ist gemäss (1.6)

$$\varphi_{k-j}^k = \frac{1}{j!} \left[ \sum_{v=1}^{j-1} \binom{j}{v} (-1)^{j-v} T^{j-v} (T^v)^{(k)} + (T^j)^{(k)} \right].$$

Nach (2.5) gilt (2.7).

**2.5.** Der Satz über die  $k$ -te Ableitung zusammengesetzter Funktion. Es sei  $z(t) \in \mathcal{C}^n(I_2)$ ,  $T(x) = \mathcal{C}^n(I_1)$ ,  $T(I_1) = I_2$ ,  $T' \neq 0$  in  $I_1$ . Dann ist für  $k \geq 2$

$$(z \circ T)^{(k)} = T^{(k)} z' \circ T + \sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \sum_{i=1}^{j-1} S(s_i, k) z^{(j)} \circ T.$$

Es folgt aus den Sätzen 1.1 and 2.4

**2.6.** Laut (2.4) ist  $2 < j \leq k - 1$

$$\begin{aligned} \varphi_{k-j}^k &= \frac{1}{j!} \sum_{s=j-1}^{k-1} \binom{k}{s} T^{(k-s)} S_{i=1}^{j-2}(s_i, s) = \frac{1}{j} \sum_{s=j-1}^{k-1} \binom{k}{s} T^{(k-s)} \varphi_{s-j+1}^s = \\ &= \frac{1}{j} \sum_{v=0}^{k-j} \binom{k}{j-1+v} T^{(k-j+1-v)} \varphi_v^{j-1+v} \end{aligned}$$

resp.

$$\varphi_j^k = \frac{1}{k-j} \sum_{v=0}^j \binom{k}{j+1-v} T^{(j+1-v)} \varphi_v^{k-j-1+v}.$$

**2.7.** Für  $j \leq k$  ist

$$S_{i=1}^{j-1}(s_i, k) = (T')^j \sum_{s_1=j-1}^{s_0-1} \dots \sum_{s_{j-1}=1}^{s_{j-2}-1} \prod_{v=1}^j \binom{s_{v-1}}{s_v} \frac{T^{(s_{v-1}-s_v)}}{T'}.$$

Setzen wir  $T''/T' = \eta$ . Dann ist für  $s \geq 2$   $T^{(s)}/T' = \varphi_{s-1}(\eta)$ , wobei  $\varphi_{s-1}(\eta)$  das Polynom des Elementes  $\eta$  mit Dimension  $s - 1$  ist. Die Funktion  $\varphi_{s-1}$  ist eine Lösung der Differenzgleichung  $\varphi_{s-1} = \eta\varphi_{s-2} + (\varphi_{s-2})'$ ,  $\varphi_0 = 1$ .

#### Literatur

- [1] *Hustý Z.*: Über die Transformation und Äquivalenz homogener linearer Differentialgleichungen von höheren als der zweiten Ordnung, I. Teil, *Czechoslovak Math. J.* 15 (90), 1965, 479—502.
- [2] *Schlömilch O.*: Compendium der höheren Analysis, II. Band, Braunschweig 1866.

*Anschrift des Verfassers*: 616 62 Brno, Žižkova 22, Tschechoslowakei (Ústav fyzikální metalurgie ČSAV).