Czechoslovak Mathematical Journal

Wolfgang J. Marik

Monoidwertige Integrale

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 37 (1987), No. 3, 351–375

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102164

Czechoslovak Mathematical Journal, 37 (112) 1987, Praha

MONOIDWERTIGE INTEGRALE

WOLFGANG J. MARIK, Dortmund

(Eingegangen am 20. Juli 1983, in überarbeiteter Form am 14. August 1985)

Zusammenfassung. Gegeben sind eine nicht-leere Menge M, ein Ring $\mathscr{R}$ auf M, ein uniformer Raum G_1 mit einem ausgezeichneten Punkt, ein topologisches abelsches Monoid G_2, ein Hausdorffsches vollständiges uniformes abelsches Monoid G_3, eine in der zweiten Komponente sowohl stetige als auch homomorphe Abbildung von $G_1 \times G_2$ in G_3 und ein G_2-wertiges (additives $\emptyset$-treues) Maß auf $\mathscr{R}$, das lokal von endlicher Semivariation ist. In Verallgemeinerung des Bartle-Integrals [1] nennen wir eine Abbildung f von M in G_1 (erweitert-)integrierbar, wenn es ein Netz einfacher Abbildungen von M in G_1 gibt, das im Mittel Cauchy ist und (lokal) nach Maß gegen f konvergiert.

Wir beweisen Versionen der üblichen Konvergenzsätze der Integrationstheorie, insbesondere des Vitalischen Konvergenzsatzes und der Lebesgueschen Sätze von der dominierten und der beschränkten Konvergenz, und zeigen, daß die (lokale) Definitheit des Maßes für die Umkehrung des Vitalischen Konvergenzsatzes hinreichend und im Gruppenfall auch notwending ist. Wir untersuchen die Besonderheiten des Gruppen- und des Vektorraumfalls und zeigen, daß Bartle-Integrierbarkeit zwar hinreichend, aber nicht notwendig für Integrierbarkeit ist. Die stetige Fortsetzung eines Maßes, die Summe summierbarer Familien und der Limes konvergenter Netze ergeben sich als einfache Beispiele von Integralen.

Im σ-additiven Fall ersetzen wir „(lokal) nach Maß" durch „(lokal) nach σ-Maß" und erhalten so den Begriff der (erweiterten) σ-Integrierbarkeit, für den die ganze Theorie analog gilt. Allerdings erweist sich (erweiterte) σ-Integrierbarkeit bzgl. eines s-beschränkten σ-additiven Maßes mit Werten in einem Hausdorffschen vollständigen uniformen abelschen Monoid als äquivalent mit (erweiterter) Integrierbarkeit bzgl. seiner s-beschränkten σ-additiven Fortsetzung auf den von $\mathscr{R}$ erzeugten σ-Ring, falls diese lokal von endlicher Semivariation ist.

In einer abschließenden Anwendung zeigen wir, daß und wie sich schwache Integrale (vektorwertiger Abbildungen bzgl. skalarwertiger Maße und skalarwertiger Abbildungen bzgl. vektorwertiger Maße) als vektorwertige Integrale darstellen lassen. Hier wie in den obigen Beispielen erweist sich die Verwendung von Netzen in der Definition der (erweiterten) Integrierbarkeit als von entscheidender Bedeutung.

1. Einfache Abbildungen und ihr Integral. Im folgenden sei M eine nicht-leere Menge, $\mathscr{R}$ ein Ring auf M, G_1 ein uniformer Raum mit einem ausgezeichneten Punkt 0, G_2 ein topologisches abelsches Monoid mit additiv geschriebener Verknüpfung, G_3 ein Hausdorffsches vollständiges uniformes abelsches Monoid[1]) mit additiv geschriebener Verknüpfung, β eine multiplikativ geschriebene in der zweiten Komponente sowohl stetige als auch homomorphe Abbildung von $G_1 \times G_2$ in G_3 und μ ein G_2-wertiges Maß (d.h. additive $\emptyset$-treue Mengenfunktion) auf $\mathscr{R}$.

Mit $\mathfrak{U}_1$ sei die Uniformität auf G_1, mit $\mathfrak{V}_2$ der Nullumgebungsfilter von G_2 und mit $\mathfrak{U}_3$ die Uniformität auf G_3 bezeichnet.

Die Mengen aus $\mathscr{R}$ nennen wir die *meßbaren* Teilmengen von M. Eine Teilmenge A von M heißt dann *lokal-meßbar*, wenn $A \cap X$ für alle $X \in \mathscr{R}$ meßbar ist; mit $\mathscr{R}_{\text{lok}}$ sei die Gesamtheit aller lokal-meßbaren Teilmengen von M bezeichnet. $\mathscr{R}_{\text{lok}}$ ist eine Algebra auf M mit $\mathscr{R} \subset \mathscr{R}_{\text{lok}}$.

(1) Definition. Eine Abbildung f von M in G_1 heißt *einfach*, wenn $f(M)$ endlich und $f^{-1}(x)$ für alle $x \in G_1 \setminus \{0\}$ meßbar ist.

Mit $\mathscr{E}(M, \mathscr{R}, G_1)$ – kurz $\mathscr{E}$ – bezeichnen wir die Gesamtheit aller einfachen Abbildungen von M in G_1.

(2) Definition. Sei $f \in \mathscr{E}$ und $A \in \mathscr{R}_{\text{lok}}$. Dann heißt

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \sum_{x \in f(M) \setminus \{0\}} x\mu(A \cap f^{-1}(x))$$

das *Integral von f über A* und

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \int_M f \,\mathrm{d}\mu$$

das *Integral von f*.

Für $f \in \mathscr{E}$ und $A \in \mathscr{R}_{\text{lok}}$ haben wir $Af \in \mathscr{E}$[2]) und

$$\int_B Af \,\mathrm{d}\mu = \int_{B \cap A} f \,\mathrm{d}\mu \quad \text{für alle } B \in \mathscr{R}_{\text{lok}},$$

insbesondere

$$\int Af \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu .$$

Ferner ist für $f \in \mathscr{E}$ die Abbildung

$$\mathscr{R}_{\text{lok}} \ni X \mapsto \int_X f \,\mathrm{d}\mu \in G_3$$

ein G_3-wertiges Maß auf $\mathscr{R}_{\text{lok}}$. Wir bezeichnen dieses Maß mit μ_f und nennen es das *zu f gehörige unbestimmte Integral.*

---

[1]) Ein uniformes Monoid ist ein mit einer Uniformität versehenes Monoid mit gleichmäßig stetiger Verknüpfung.

[2]) Für eine Teilmenge A von M und eine Abbildung f von M in G_1 bezeichnen wir mit Af diejenige Abbildung von M in G_1, die jedem $s \in A$ $f(s)$ und jedem $s \in M \setminus A$ 0 zuordnet.

(3) Definition. Sei $(f_i)_{i\in I}$ ein Netz[3]) in $\mathscr{E}$ und $f \in \mathscr{E}$. Dann heißt $(f_i)_{i\in I}$ *im Mittel konvergent gegen* f – in Zeichen $f_i \to_{\mathrm{i.M.}} f$ – bzw. *im Mittel Cauchy*, wenn $(f_i)_{i\in I}$ konvergent gegen f bzw. Cauchy bzgl. der von der Abbildung

$$\mathscr{E} \ni g \mapsto \mu_g \in G_3^{\mathscr{R}_{\mathrm{lok}}}\ {}^{4})$$

auf $\mathscr{E}$ erzeugten initialen Uniformität ist, wobei auf $G_3^{\mathscr{R}_{\mathrm{lok}}}$ die Uniformität der gleichmäßigen Konvergenz gegeben ist. Wir nennen daher diese initiale Uniformität bzw. die zugehörige Topologie die *Uniformität* bzw. die *Topologie der Konvergenz im Mittel auf* $\mathscr{E}$.

Man sieht leicht, daß die Uniformität der Konvergenz im Mittel auf $\mathscr{E}$ gleich der von der Abbildung

$$\mathscr{E} \ni f \mapsto \mu_f / \mathscr{R} \in G_3^{\mathscr{R}}$$

auf $\mathscr{E}$ erzeugten initialen Uniformität ist, wobei auf $G_3^{\mathscr{R}}$ die Uniformität der gleichmäßigen Konvergenz gegeben ist.

Ebenso leicht sieht man, daß die Abbildungen

$$\mathscr{E} \ni f \mapsto \int_A f \, d\mu \in G_3\,, \quad A \in \mathscr{R}_{\mathrm{lok}}\,,$$

und

$$\mathscr{E} \ni f \mapsto Af \in \mathscr{E}\,, \quad A \in \mathscr{R}_{\mathrm{lok}}\,,$$

bzgl. der Uniformität der Konvergenz im Mittel auf $\mathscr{E}$ gleichmäßig stetig sind.

2. Konvergenz nach Maß und Konvergenz lokal nach Maß.

(4) Definition. Sei $V_2 \subset G_2$. Dann heißt eine Teilmenge A von M eine *V_2-Menge*, wenn es ein $B \in \mathscr{R}$ gibt, so daß $A \subset B$ und $\mu(C) \in V_2$ für alle meßbaren Teilmengen C von B gilt, und eine *lokale V_2-Menge*, wenn $A \cap X$ für alle $X \in \mathscr{R}$ eine V_2-Menge ist.

(5) Satz. $\{\{(f,g) \in G_1^M \times G_1^M : \{(f,g) \notin U_1\}\ {}^{5})$ *ist* V_2*-Menge*$\} : U_1 \in \mathfrak{U}_1$ *und* $V_2 \in \mathfrak{B}_2\}$ *ist Basis einer Uniformität auf* G_1^M.

Der Beweis dieses Satzes ist trivial.

(6) Definition. Sei $(f_i)_{i\in I}$ ein Netz in G_1^M und $f \in G_1^M$. Dann heißt $(f_i)_{i\in I}$ *nach Maß konvergent gegen* f – in Zeichen $f_i \to_{\mathrm{n.M.}} f$ – bzw. *nach Maß Cauchy*, wenn $(f_i)_{i\in I}$ konvergent gegen f bzw. Cauchy bzgl. der Uniformität aus Satz (5) ist. Wir nennen daher diese Uniformität bzw. die zugehörige Topologie die *Uniformität* bzw. die *Topologie der Konvergenz nach Maß*.

---

[3]) Ein Netz in der Menge X ist eine nicht-leere Familie von Elementen von X, deren Indexmenge mit einer nach oben gerichteten Ordnung $\leq$ versehen ist.

[4]) Mit Y^X bezeichnen wir die Gesamtheit aller Abbildungen der Menge X in die Menge Y.

[5]) Wir schreiben $\{(f,g) \notin U_1\}$ abkürzend für $\{s \in M : (f(s), g(s)) \notin U_1\}$. Ähnliche Schreibweisen sind analog zu verstehen.

(7) Definition. Sei $(f_i)_{i\in I}$ ein Netz in G_1^M und $f \in G_1^M$. Dann heißt $(f_i)_{i\in I}$ *lokal nach Maß konvergent gegen f* – in Zeichen $f_i \to_{\mathrm{l.n.M.}} f$ – bzw. *lokal nach Maß Cauchy*, wenn $(f_i)_{i\in I}$ konvergent gegen f bzw. Cauchy bzgl. der von der Familie der Abbildungen

$$G_1^M \ni g \mapsto Ag \in G_1^M\,, \quad A \in \mathscr{R}\,,$$

auf G_1^M erzeugten initialen Uniformität ist, wobei auf G_1^M die Uniformität der Konvergenz nach Maß gegeben ist. Wir nennen daher diese initiale Uniformität bzw. die zugehörige Topologie die *Uniformität* bzw. die *Topologie der Konvergenz lokal nach Maß.*

Auf G_1^M ist die Uniformität der gleichmäßigen Konvergenz feiner als die Uniformität der Konvergenz nach Maß, die wiederum feiner als die Uniformität der Konvergenz lokal nach Maß ist. Bzgl. jeder dieser drei Uniformitäten sind die Abbildungen

$$G_1^M \ni f \mapsto Af \in G_1^M\,, \quad A \subset M\,,$$

gleichmäßig stetig.

(8) Definition. Eine Abbildung f von M in G_1 heißt *meßbar*, wenn sie in der abgeschlossenen Hülle von $\mathscr{E}$ bzgl. der Topologie der Konvergenz nach Maß liegt, und *lokal-meßbar*, wenn Xf für alle $X \in \mathscr{R}$ meßbar ist.

Mit $\mathfrak{F}(M, \mathscr{R}, \mu, G_1)$ – kurz $\mathfrak{F}$ – bzw. $\mathfrak{F}_{\mathrm{lok}}(M, \mathscr{R}, \mu, G_1)$ – kurz $\mathfrak{F}_{\mathrm{lok}}$ – bezeichnen wir die Gesamtheit aller meßbaren bzw. lokal-meßbaren Abbildungen von M in G_1.

Für $A \in \mathscr{R}_{\mathrm{lok}}$ und $f \in \mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{F}_{\mathrm{lok}}$ haben wir $Af \in \mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{F}_{\mathrm{lok}}$.

(9) Satz. *Sei $f \in G_1^M$. Dann gilt:*

(i) *f ist genau dann meßbar, wenn f lokal-meßbar ist und das Netz $(Af)_{A\in\mathscr{R}}$*[6]) *nach Maß gegen f konvergiert.*

(ii) *f ist genau dann lokal-meßbar, wenn f in der abgeschlossenen Hülle von $\mathscr{E}$ bzgl. der Topologie der Konvergenz lokal nach Maß liegt.*

Der Beweis dieses Satzes ist trivial.

3. Integrierbare Abbildungen und ihr Integral.

(10) Definition. Sei G ein topologisches abelsches Monoid mit additiv geschriebener Verknüpfung und $\mathfrak{V}$ der Nullumgebungsfilter von G. Dann heißt ein G-wertiges Maß ν auf $\mathscr{R}$ bzw. $\mathscr{R}_{\mathrm{lok}}$ *absolut-stetig*, wenn es zu jedem $V \in \mathfrak{V}$ ein $V_2 \in \mathfrak{V}_2$ gibt, so daß $\nu(A) \in V$ für alle meßbaren V_2-Mengen bzw. lokal-meßbaren lokalen V_2-Mengen A gilt, und ein Netz $(\nu_i)_{i\in I}$ G-wertiger Maße auf $\mathscr{R}$ bzw. $\mathscr{R}_{\mathrm{lok}}$ *terminal gleichmäßig absolut-stetig*, wenn es zu jedem $V \in \mathfrak{V}$ ein $i_0 \in I$ und ein $V_2 \in \mathfrak{V}_2$ gibt, so daß $\nu_i(A) \in V$ für alle $i \geqq i_0$ und alle meßbaren V_2-Mengen bzw. lokal-meßbaren lokalen V_2-Mengen A gilt.

Da die Abbildungen $G_2 \ni y \mapsto xy \in G_3$, $x \in G_1$, in 0 stetig sind, ergibt sich für

[6]) Als Indexmenge eines Netzes ist $\mathscr{R}$ mit der Ordnung $\subset$ versehen.

$f \in \mathscr{E}$ die absolute Stetigkeit von μ_f und damit für ein Netz $(f_\iota)_{\iota \in I}$ in $\mathscr{E}$, das im Mittel Cauchy ist, die terminale gleichmäßige absolute Stetigkeit von $(\mu_{f_\iota})_{\iota \in I}$.

(11) Definition. μ heißt *von endlicher Semivariation auf einer Teilmenge A von M*, wenn die Abbildung

$$\{f \in \mathscr{E} \colon Af = f\} \ni f \mapsto \int f \, \mathrm{d}\mu \in G_3$$

bzgl. der Uniformität der gleichmäßigen Konvergenz auf $\{f \in \mathscr{E} \colon Af = f\}$ gleichmäßig stetig ist, *lokal von endlicher Semivariation*, wenn μ von endlicher Semivariation auf jedem $A \in \mathscr{R}$ ist, und *von endlicher Semivariation*, wenn μ von endlicher Semivariation auf M ist.

μ ist genau dann von endlicher Semivariation auf einer Teilmenge A von M, wenn auf $\{f \in \mathscr{E} \colon Af = f\}$. die Uniformität der gleichmäßigen Konvergenz feiner als die Uniformität der Konvergenz im Mittel ist. μ ist genau dann von endlicher Semivariation auf einer lokal-meßbaren Teilmenge A von M, wenn die Abbildung

$$\mathscr{E} \ni f \mapsto \int_A f \, \mathrm{d}\mu \in G_3$$

bzgl. der Uniformität der gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathscr{E}$ gleichmäßig stetig ist.

Von nun an sei μ lokal von endlicher Semivariation.

(12) Definition. Eine Abbildung f von M in G_1 heißt *integrierbar* bzw. *erweitert-integrierbar*, wenn es ein Netz in $\mathscr{E}$ gibt, das im Mittel Cauchy ist und nach Maß bzw. lokal nach Maß gegen f konvergiert, und *lokal-integrierbar*, wenn Xf für alle $X \in \mathscr{R}$ integrierbar ist.

Mit $\mathscr{L}(M, \mathscr{R}, \mu, G_1, G_3)$ – kurz $\mathscr{L}$ – bzw. $\mathscr{L}_{\mathrm{erw}}(M, \mathscr{R}, \mu, G_1, G_3)$ – kurz $\mathscr{L}_{\mathrm{erw}}$ – bzw. $\mathscr{L}_{\mathrm{lok}}(M, \mathscr{R}, \mu, G_1, G_3)$ – kurz $\mathscr{L}_{\mathrm{lok}}$ – bezeichnen wir die Gesamtheit aller integrierbaren bzw. erweitert-integrierbaren bzw. lokal-integrierbaren Abbildungen von M in G_1.

Wenn $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{V}_2$ und $\mathfrak{U}_3$ abzählbare Basen besitzen, dann kann man sich in der Definition der Integrierbarkeit auf Folgen beschränken.

Es gilt $\mathscr{E} \subset \mathscr{L} \subset \mathscr{L}_{\mathrm{erw}} \subset \mathscr{L}_{\mathrm{lok}}$.

(13) Lemma. *Sei $f \in \mathscr{L}_{\mathrm{erw}}$ und $A \in \mathscr{R}_{\mathrm{lok}}$. Dann gilt für zwei Netze $(f_i)_{i \in I}$ und $(g_j)_{j \in J}$ in $\mathscr{E}$, die im Mittel Cauchy sind und lokal nach Maß gegen f konvergieren,*

$$\lim \int_A f_i \, \mathrm{d}\mu = \lim \int_A g_j \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß es zu jedem $U_3 \in \mathfrak{U}_3$ ein $i_0 \in I$ und ein $j_0 \in J$ gibt, so daß

$$\left(\int_A f_i \, \mathrm{d}\mu, \int_A g_j \, \mathrm{d}\mu\right) \in U_3 \circ U_3 \circ U_3 \text{ [7]}$$

für alle $i \geqq i_0$ und alle $j \geqq j_0$ gilt.

[7]) Sei G eine Menge; dann wird für zwei Teilmengen A und B von $G \times G$ $A \circ B := \{(x, y) \in G \times G$: es existiert ein $z \in G$ mit $(x, z) \in B$ und $(z, y) \in A\}$ gesetzt.

Seien also $U_3, U_{30} \in \mathfrak{U}_3$ mit $U_{30} + U_{30} \subset U_3$.

Da $(f_i)_{i\in I}$ und $(g_j)_{j\in J}$ im Mittel Cauchy sind, gibt es ein $i_0 \in I$ und ein $j_0 \in J$, so daß

$$\left(\int_X f_i \,\mathrm{d}\mu, \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu\right) \in U_3 \quad \text{und} \quad \left(\int_X g_j \,\mathrm{d}\mu, \int_X g_l \,\mathrm{d}\mu\right) \in U_3$$

für alle $i, k \geqq i_0$, alle $j, l \geqq j_0$ und alle $X \in \mathscr{R}$ gilt.

Wir wählen nun ein $m \geqq i_0$ und ein $n \geqq j_0$ und setzen

$$B := A \cap (\{f_m \neq 0\} \cup \{g_n \neq 0\}).$$

Da μ von endlicher Semivariation auf B ist, gibt es ein $U_1 \in \mathfrak{U}_1$, so daß

$$\left(\int_B h_1 \,\mathrm{d}\mu, \int_B h_2 \,\mathrm{d}\mu\right) \in U_{30}$$

für alle $h_1, h_2 \in \mathscr{E}$ mit $(h_1, h_2)(M) \subset U_1$ gilt.

Da $(\mu_{f_i})_{i\in I}$ und $(\mu_{g_j})_{j\in J}$ terminal gleichmäßig absolut-stetig sind, gibt es ein $i_1 \geqq i_0$, ein $j_1 \geqq j_0$ und ein $V_2 \in \mathfrak{V}_2$, so daß

$$\left(\int_X f_i \,\mathrm{d}\mu, \int_X g_j \,\mathrm{d}\mu\right) \in U_{30}$$

für alle $i \geqq i_1$, alle $j \geqq j_1$ und alle meßbaren V_2-Mengen X gilt.

Da $(Bf_i)_{i\in I}$ und $(Bg_j)_{j\in J}$ nach Maß gegen Bf konvergieren, gibt es ein $i_2 \geqq i_1$ und ein $j_2 \geqq j_1$, so daß $B \cap \{(f_{i_2}, g_{j_2}) \notin U_1\}$ eine V_2-Menge ist.

Nunmehr erhalten wir zunächst

$$\left(\int_B f_{i_2} \,\mathrm{d}\mu, \int_B g_{j_2} \,\mathrm{d}\mu\right) \in U_3$$

und schließlich

$$\left(\int_A f_m \,\mathrm{d}\mu, \int_A g_n \,\mathrm{d}\mu\right) \in U_3 \circ U_3 \circ U_3 . \quad \text{Q.E.D.}$$

(14) Definition. Sei $f \in \mathscr{L}_{\text{erw}}$, $A \in \mathscr{R}_{\text{lok}}$ und $(f_i)_{i\in I}$ ein Netz in $\mathscr{E}$, das im Mittel Cauchy ist und lokal nach Maß gegen f konvergiert. Dann heißt

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \lim \int_A f_i \,\mathrm{d}\mu$$

das *Integral von f über A* und

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \int_M f \,\mathrm{d}\mu$$

das *Integral von f*.

Für $f \in \mathscr{E}$ und $A \in \mathscr{R}_{\text{lok}}$ ist das Integral von f über A im Sinne von Definition (2) gleich dem Integral von f über A im Sinne von Definition (14).

Für $A \in \mathscr{R}_{\text{lok}}$ und $f \in \mathscr{L}$ bzw. $\mathscr{L}_{\text{erw}}$ haben wir $Af \in \mathscr{L}$ bzw. $\mathscr{L}_{\text{erw}}$ und

$$\int_B Af \,\mathrm{d}\mu = \int_{B\cap A} f \,\mathrm{d}\mu \quad \text{für alle} \quad B \in \mathscr{R}_{\text{lok}},$$

insbesondere

$$\int Af\,\mathrm{d}\mu = \int_A f\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Ferner ist für $f \in \mathscr{L}_{\mathrm{erw}}$ bzw. $\mathscr{L}_{\mathrm{lok}}$ die Abbildung

$$\mathscr{R}_{\mathrm{lok}} \ni X \mapsto \int_X f\,\mathrm{d}\mu \in G_3$$

bzw.

$$\mathscr{R} \ni X \mapsto \int Xf\,\mathrm{d}\mu \in G_3$$

ein G_3-wertiges Maß auf $\mathscr{R}_{\mathrm{lok}}$ bzw. $\mathscr{R}$. Wir bezeichnen dieses Maß mit μ_f bzw. μ_f^{lok} und nennen es das *zu f gehörige unbestimmte Integral* bzw. *unbestimmte lokale Integral.*

(15) Definition. Sei $(f_i)_{i\in I}$ ein Netz in $\mathscr{L}_{\mathrm{erw}}$ und $f \in \mathscr{L}_{\mathrm{erw}}$. Dann heißt $(f_i)_{i\in I}$ *im Mittel konvergent gegen f* – in Zeichen $f_i \to_{\mathrm{i.M.}} f$ – bzw. *im Mittel Cauchy,* wenn $(f_i)_{i\in I}$ konvergent gegen f bzw. Cauchy bzgl. der von der Abbildung

$$\mathscr{L}_{\mathrm{erw}} \ni g \mapsto \mu_g \in G_3^{\mathscr{R}_{\mathrm{lok}}}$$

auf $\mathscr{L}_{\mathrm{erw}}$ erzeugten initialen Uniformität ist, wobei auf $G_3^{\mathscr{R}_{\mathrm{lok}}}$ die Uniformität der gleichmäßigen Konvergenz gegeben ist. Wir nennen daher diese initiale Uniformität bzw. die zugehörige Topologie die *Uniformität* bzw. die *Topologie der Konvergenz im Mittel.*

Die Uniformität der Konvergenz im Mittel induziert auf $\mathscr{E}$ trivialerweise die in Definition (3) definierte Uniformität der Konvergenz im Mittel auf $\mathscr{E}$.

Bzgl. der Topologie der Konvergenz im Mittel liegt $\mathscr{E}$ dicht in $\mathscr{L}_{\mathrm{erw}}$.

Bzgl. der Uniformität der Konvergenz im Mittel sind die Abbildungen

$$\mathscr{L}_{\mathrm{erw}} \ni f \mapsto \int_A f\,\mathrm{d}\mu \in G_3\,, \quad A \in \mathscr{R}_{\mathrm{lok}}\,,$$

und

$$\mathscr{L}_{\mathrm{erw}} \ni f \mapsto Af \in \mathscr{L}_{\mathrm{erw}}\,, \quad A \in \mathscr{R}_{\mathrm{lok}}\,,$$

gleichmäßig stetig.

(16) Definition. Sei G ein topologisches abelsches Monoid mit additiv geschriebener Verknüpfung und $\mathfrak{B}$ der Nullumgebungsfilter von G. Dann heißt ein G-wertiges Maß v auf $\mathscr{R}$ bzw. $\mathscr{R}_{\mathrm{lok}}$ *im Unendlichen stetig,* wenn es zu jedem $V \in \mathfrak{B}$ ein $A \in \mathscr{R}$ gibt, so daß $v(B) \in V$ für alle meßbaren bzw. lokal-meßbaren Teilmengen B von $M \setminus A$ gilt, und ein Netz $(v_i)_{i\in I}$ G-wertiger Maße auf $\mathscr{R}$ bzw. $\mathscr{R}_{\mathrm{lok}}$ *terminal gleichmäßig im Unendlichen stetig,* wenn es zu jedem $V \in \mathfrak{B}$ ein $i_0 \in I$ und ein $A \in \mathscr{R}$ gibt, so daß $v_i(B) \in V$ für alle $i \geqq i_0$ und alle meßbaren bzw. lokal-meßbaren Teilmengen B von $M \setminus A$ gilt.

Wie man leicht sieht, ist für $f \in \mathscr{L}_{\mathrm{erw}}$ μ_f absolut-stetig und im Unendlichen stetig und damit für ein Netz $(f_i)_{i\in I}$ in $\mathscr{L}_{\text{erw}}$, das im Mittel Cauchy ist, $(\mu_{f_i})_{i\in I}$ terminal gleichmäßig absolut-stetig und terminal gleichmäßig im Unendlichen stetig.

Für $f \in \mathscr{L}_{\text{erw}}$ ergibt sich mit Hilfe der Stetigkeit im Unendlichen von μ_f, daß das Netz $(Af)_{A\in\mathfrak{R}}$ im Mittel gegen f konvergiert. Hieraus erhält man, daß die Uniformität der Konvergenz im Mittel gleich der von der Abbildung

$$\mathscr{L}_{\text{erw}} \ni f \mapsto \mu_f|\mathscr{R} \in G_3^{\mathfrak{R}}$$

auf $\mathscr{L}_{\text{erw}}$ erzeugten initialen Uniformität ist, wobei auf $G_3^{\mathfrak{R}}$ die Uniformität der gleichmäßigen Konvergenz gegeben ist.

4. Konvergenzsätze.

(17) Satz. *Sei $(f_i)_{i\in I}$ ein Netz in $\mathscr{L}$ bzw. $\mathscr{L}_{\text{erw}}$ und $f \in G_1^M$. Dann gilt:*
Wenn $(f_i)_{i\in I}$ im Mittel Cauchy ist und nach Maß bzw. lokal nach Maß gegen f konvergiert, dann ist f integrierbar bzw. erweitert-integrierbar und $(f_i)_{i\in I}$ konvergiert im Mittel gegen f.

Beweis. Sei für $i \in I$ $(f_{ij})_{j\in J_i}$ ein Netz in $\mathscr{E}$, das im Mittel Cauchy ist und nach Maß bzw. lokal nach Maß gegen f_i konvergiert. Dann ist

$$I \times \prod_{i\in I} J_i \ni (k, (j_i)_{i\in I}) \mapsto f_{kj_k} \in \mathscr{E}$$

ein Netz[8]) in $\mathscr{E}$, das im Mittel Cauchy ist und nach Maß bzw. lokal nach Maß gegen f konvergiert. Also ist $f \in \mathscr{L}$ bzw. $\mathscr{L}_{\text{erw}}$ und das gerade definierte Netz in $\mathscr{E}$ konvergiert im Mittel gegen f, womit sich leicht ergibt, daß auch $(f_i)_{i\in I}$ im Mittel gegen f konvergiert. Q.E.D.

Mit Hilfe des eben bewiesenen Satzes erhalten wir den nächsten.

(18) Satz. *Sei $f \in G_1^M$. Dann gilt:*
(i) *f ist genau dann integrierbar, wenn f erweitert-integrierbar und meßbar ist.*
(ii) *f ist genau dann erweitert-integrierbar, wenn f lokal-integrierbar und μ_f^{lok} im Unendlichen stetig ist.*

(19) Satz. *Sei $A \in \mathscr{R}_{\text{lok}}$ und μ von endlicher Semivariation auf A. Dann ist auf $\{f \in \mathscr{L}_{\text{erw}}: Af = f\}$ die Uniformität der gleichmäßigen Konvergenz feiner als die Uniformität der Konvergenz im Mittel.*

Beweis. Seien $U_3, U_{30}, U_{31} \in \mathfrak{U}_3$ mit $U_{30} \circ U_{30} \circ U_{30} \subset U_3$ und $U_{31} + U_{31} \subset \subset U_{30}$.

Da μ von endlicher Semivariation auf A ist, gibt es ein $U_1 \in \mathfrak{U}_1$, so daß

$$\left(\int_A h_1 \, d\mu, \int_A h_2 \, d\mu\right) \in U_{31}$$

für alle $h_1, h_2 \in \mathscr{E}$ mit $(h_1, h_2)(M) \subset U_1$ gilt.

---

[8]) Das Produkt einer Familie geordneter Mengen ist mit der Produktordnung versehen.

Sei $U_{10} \in \mathfrak{U}_1$ mit $U_{10} \circ U_{10} \circ U_{10} \subset U_1$. Dann gilt:

$$\{(f, g) \in \mathscr{L}_{\text{erw}} \times \mathscr{L}_{\text{erw}}: Af = f,\ Ag = g,\ (f, g)(M) \subset U_{10}\} \subset$$

$$\subset \left\{(f, g) \in \mathscr{L}_{\text{erw}} \times \mathscr{L}_{\text{ew}}: Af = f,\ Ag = g,\ \left(\int_B f\,\mathrm{d}\mu, \int_B g\,\mathrm{d}\mu\right) \in U_3 \text{ für alle } B \in \mathscr{R}\right\}.$$

Zum Nachweis dieser Inklusion sei (f, g) ein Element der linken Menge und $B \in \mathscr{R}$. Dann sei $(f_i)_{i\in I}$ bzw. $(g_j)_{j\in J}$ ein Netz in $\mathscr{E}$, das im Mittel Cauchy ist und lokal nach Maß gegen f bzw. g konvergiert; ohne Einschränkung kann $Af_i = f_i$ und $Ag_j = g_j$ für alle $i \in I$ und alle $j \in J$ angenommen werden.

Wegen $f_i \to_{\text{i.M.}} f$ und $g_j \to_{\text{i.M.}} g$ gibt es ein $i_0 \in I$ und ein $j_0 \in J$, so daß

$$\left(\int_B f\,\mathrm{d}\mu, \int_B f_i\,\mathrm{d}\mu\right) \in U_{30} \quad \text{und} \quad \left(\int_B g_j\,\mathrm{d}\mu, \int_B g\,\mathrm{d}\mu\right) \in U_{30}$$

für alle $i \geqq i_0$ und alle $j \geqq j_0$ gilt.

Da $(\mu_{f_i})_{i\in I}$ und $(\mu_{g_j})_{j\in J}$ terminal gleichmäßig absolut-stetig sind, gibt es ein $i_1 \geqq i_0$, ein $j_1 \geqq j_0$ und ein $V_2 \in \mathfrak{V}_2$, so daß

$$\left(\int_X f_i\,\mathrm{d}\mu, \int_X g_j\,\mathrm{d}\mu\right) \in U_{31}$$

für alle $i \geqq i_1$, alle $j \geqq j_1$ und alle meßbaren V_2-Mengen X gilt.

Sei $V_{20} \in \mathfrak{V}_2$ mit $V_{20} + V_{20} \subset V_2$. Wegen $Bf_i \to_{\text{n.M.}} Bf$ und $Bg_j \to_{\text{n.M.}} Bg$ gibt es ein $i_2 \geqq i_1$ und ein $j_2 \geqq j_1$, so daß $B \cap \{(f_{i_2}, f) \notin U_{10}\}$ und $B \cap \{(g, g_{j_2}) \notin U_{10}\}$ V_{20}-Mengen sind. Also ist $B \cap \{(f_{i_2}, g_{j_2}) \notin U_1\}$ eine V_2-Menge.

Nunmehr erhalten wir zunächst

$$\left(\int_B f_{i_2}\,\mathrm{d}\mu, \int_B g_{j_2}\,\mathrm{d}\mu\right) \in U_{30}$$

und schließlich

$$\left(\int_B f\,\mathrm{d}\mu, \int_B g\,\mathrm{d}\mu\right) \in U_3. \quad \text{Q.E.D.}$$

Mittels Satz (19) ergibt sich

(20) Satz. *Sei $A \in \mathscr{R}_{\text{lok}}$ und μ von endlicher Semivariation auf A. Dann ist die Abbildung*

$$\mathscr{L}_{\text{erw}} \ni f \mapsto \int_A f\,\mathrm{d}\mu \in G_3$$

bzgl. der Uniformität der gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathscr{L}_{\text{erw}}$ gleichmäßig stetig.

Aus den Sätzen (17) und (19) folgt

(21) Satz. *Sei $A \in \mathscr{R}_{\text{lok}}$, μ von endlicher Semivariation auf A, $(f_i)_{i\in I}$ ein Netz in $\mathscr{L}$ bzw. $\mathscr{L}_{\text{erw}}$ mit $Af_i = f_i$ für alle $i \in I$ und $f \in G_1^M$. Dann gilt:*

Wenn $(f_i)_{i\in I}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, dann ist f integrierbar bzw. erweitert-integrierbar und $(f_i)_{i\in I}$ konvergiert im Mittel gegen f.

Der folgende Satz ist eine Version des Vitalischen Konvergenzsatzes.

(22) Satz. *Sei* $(f_i)_{i\in I}$ *ein Netz in* $\mathscr{L}$ *bzw.* $\mathscr{L}_{\mathrm{erw}}$ *und* $f \in G_1^M$. *Dann gilt*:
Wenn $(f_i)_{i\in I}$ *nach Maß bzw. lokal nach Maß gegen* f *konvergiert und* $(\mu_{f_i}^{\mathrm{lok}})_{i\in I}$ *terminal gleichmäßig absolut-stetig und terminal gleichmäßig im Unendlichen stetig ist, dann ist* f *integrierbar bzw. erweitert-integrierbar und* $(f_i)_{i\in I}$ *konvergiert im Mittel gegen* f.

Beweis. Wie man sich leicht überlegt, kann man sich auf den Fall, daß jedes f_i einfach ist, beschränken. Dann bleibt nur noch zu zeigen, daß $(f_i)_{i\in I}$ im Mittel Cauchy ist.

Seien $U_3, U_{30} \in \mathfrak{U}_3$ mit $U_{30} + U_{30} + U_{30} \subset U_3$.

Da $(\mu_{f_i}^{\mathrm{lok}})_{i\in I}$ terminal gleichmäßig im Unendlichen stetig ist, gibt es ein $i_0 \in I$ und ein $A \in \mathscr{R}$, so daß

$$\left(\int_{X\setminus A} f_i \,\mathrm{d}\mu, \int_{X\setminus A} f_j \,\mathrm{d}\mu\right) \in U_{30}$$

für alle $i, j \geqq i_0$ und alle $X \in \mathscr{R}$ gilt.

Da μ von endlicher Semivariation auf A ist, gibt es ein $U_1 \in \mathfrak{U}_1$, so daß

$$\left(\int_A h_1 \,\mathrm{d}\mu, \int_A h_2 \,\mathrm{d}\mu\right) \in U_{30}$$

für alle $h_1, h_2 \in \mathscr{E}$ mit $(h_1, h_2)(M) \subset U_1$ gilt.

Da $(\mu_{f_i}^{\mathrm{lok}})_{i\in I}$ terminal gleichmäßig absolut-stetig ist, gibt es ein $i_1 \geqq i_0$ und ein $V_2 \in \mathfrak{B}_2$, so daß

$$\left(\int_X f_i \,\mathrm{d}\mu, \int_X f_j \,\mathrm{d}\mu\right) \in U_{30}$$

für alle $i, j \geqq i_1$ und alle meßbaren V_2-Mengen X gilt.

Wegen $Af_i \to_{\mathrm{n.M.}} Af$ gibt es ein $i_2 \geqq i_1$, so daß $A \cap \{(f_i, f_j) \notin U_1\}$ eine V_2-Menge für alle $i, j \geqq i_2$ ist.

Seien nun $i, j \geqq i_2$ und $X \in \mathscr{R}$. Dann erhalten wir zunächst

$$\left(\int_{X\cap A} f_i \,\mathrm{d}\mu, \int_{X\cap A} f_j \,\mathrm{d}\mu\right) \in U_{30} + U_{30}$$

und schließlich

$$\left(\int_X f_i \,\mathrm{d}\mu, \int_X f_j \,\mathrm{d}\mu\right) \in U_3 . \quad \text{Q.E.D.}$$

Mittels Satz (22) ergibt sich

(23) Satz. *Sei* $f \in G_1^M$. *Dann gilt*:
f *ist genau dann integrierbar bzw. erweitert-integrierbar, wenn es ein Netz* $(f_i)_{i\in I}$ *in* $\mathscr{E}$ *gibt, das nach Maß bzw. lokal nach Maß gegen* f *konvergiert und so daß* $(\mu_{f_i}^{\mathrm{lok}})_{i\in I}$ *terminal gleichmäßig absolut-stetig und terminal gleichmäßig im Unendlichen stetig ist.*

Mittels Satz (22) erhalten wir auch die folgende Version des Lebesgueschen Satzes von der dominierten Konvergenz.

(24) Satz. *Sei $(f_i)_{i\in I}$ ein Netz in $\mathscr{L}$ bzw. $\mathscr{L}_{\text{erw}}$, $g \in \mathscr{L}_{\text{erw}}$ und $f \in G_1^M$. Dann gilt: Wenn $(f_i)_{i\in I}$ nach Maß bzw. lokal nach Maß gegen f konvergiert und $(\mu_{f_i}^{\text{lok}})_{i\in I}$ terminal gleichmäßig absolut-stetig bzgl. μ_g^{lok}* [9]*) ist, dann ist f integrierbar bzw. erweitert-integrierbar und $(f_i)_{i\in I}$ konvergiert im Mittel gegen f.*

(25) Definition. μ heißt *definit auf einer Teilmenge A von M*, wenn es zu jedem $U_1 \in \mathfrak{U}_1$ und jedem $V_2 \in \mathfrak{V}_2$ ein $U_3 \in \mathfrak{U}_3$ gibt, so daß zu je zwei Abbildungen $f, g \in \mathscr{E}$ mit $Af = f$, $Ag = g$,

$$(f, g)(\{f \neq 0\} \cup \{g \neq 0\}) \subset (G_1 \times G_1) \setminus U_1 \quad \text{und} \quad \mu(\{f \neq 0\} \cup \{g \neq 0\}) \notin V_2$$

ein $B \in \mathscr{R}$ mit $(\int_B f \,\mathrm{d}\mu, \int_B g \,\mathrm{d}\mu) \notin U_3$ existiert, *lokal definit*, wenn μ definit auf jedem $A \in \mathscr{R}$ ist, und definit, wenn μ *definit* auf M ist.

Man überlegt sich leicht: μ ist genau dann definit auf einer Teilmenge A von M, wenn auf $\{f \in \mathscr{E}\colon Af = f\}$ die Uniformität der Konvergenz im Mittel feiner als die Uniformität der Konvergenz nach Maß ist. Darüber hinaus gilt

(26) Satz. *Sei $A \in \mathscr{R}_{\text{lok}}$. Dann gilt:*
μ ist genau dann definit auf A, wenn auf $\{f \in \mathscr{L}\colon Af = f\}$ die Uniformität der Konvergenz im Mittel feiner als die Uniformität der Konvergenz nach Maß ist.

Beweis. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß auf $\{f \in \mathscr{L}\colon Af = f\}$ die Uniformität der Konvergenz im Mittel feiner als die Uniformität der Konvergenz nach Maß ist, wenn μ definit auf A ist.

Sei also μ definit auf A und seien $U_1, U_{10} \in \mathfrak{U}_1$ mit $U_{10} \circ U_{10} \circ U_{10} \subset U_1$ und $V_2, V_{20} \in \mathfrak{V}_2$ mit $V_{20} + V_{20} + V_{20} \subset V_2$. Dann gibt es ein $U_3 \in \mathfrak{U}_3$ mit

$$\left\{(f, g) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}\colon Af = f,\ Ag = g,\ \left(\int_X f \,\mathrm{d}\mu, \int_X g \,\mathrm{d}\mu\right) \in U_3 \text{ für alle } X \in \mathscr{R}\right\} \subset$$
$$\subset \{(f, g) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}\colon Af = f,\ Ag = g,\ \{(f, g) \notin U_{10}\} \text{ ist } V_{20}\text{-Menge}\}\,.$$

Sei $U_{30} \in \mathfrak{U}_3$ mit $U_{30} \circ U_{30} \circ U_{30} \subset U_3$. Dann gilt:

$$\left\{(f, g) \in \mathscr{L} \times \mathscr{L}\colon Af = f,\ Ag = g,\ \left(\int_X f \,\mathrm{d}\mu, \int_X g \,\mathrm{d}\mu\right) \in U_{30} \text{ für alle } X \in \mathscr{R}\right\} \subset$$
$$\subset \{(f, g) \in \mathscr{L} \times \mathscr{L}\colon Af = f,\ Ag = g,\ \{(f, g) \notin U_1\} \text{ ist } V_2\text{-Menge}\}\,.$$

Zum Nachweis dieser Inklusion sei (f, g) ein Element der linken Menge und sei $(f_i)_{i\in I}$ bzw. $(g_j)_{j\in J}$ ein Netz in $\mathscr{E}$, das im Mittel Cauchy ist und nach Maß gegen f bzw. g konvergiert; ohne Einschränkung kann $Af_i = f_i$ und $Ag_j = g_j$ für alle $i \in I$ und alle $j \in J$ angenommen werden.

Wegen $f_i \to_{\text{i.M.}} f$ und $g_j \to_{\text{i.M.}} g$ gibt es ein $i_0 \in I$ und ein $j_0 \in J$, so daß

$$\left(\int_X f_i \,\mathrm{d}\mu, \int_X f \,\mathrm{d}\mu\right) \in U_{30} \quad \text{und} \quad \left(\int_X g \,\mathrm{d}\mu, \int_X g_j \,\mathrm{d}\mu\right) \in U_{30}$$

[9]) D.h. Definition (10) und damit auch Definition (4) mit μ_g^{lok} anstelle von μ.

und damit

$$\left(\int_X f_i \,\mathrm{d}\mu, \int_X g_j \,\mathrm{d}\mu\right) \in U_3$$

für alle $i \geqq i_0$, alle $j \geqq j_0$ und alle $X \in \mathscr{R}$ gilt. Also ist $\{(f_i, g_j) \notin U_{10}\}$ eine V_{20}-Menge für alle $i \geqq i_0$ und alle $j \geqq j_0$.

Wegen $f_i \rightarrow_{\text{n.M.}} f$ und $g_j \rightarrow_{\text{n.M.}} g$ gibt es ein $i_1 \geqq i_0$ und ein $j_1 \geqq j_0$, so daß $\{(f, f_{i_1}) \notin U_{10}\}$ und $\{(g_{j_1}, g) \notin U_{10}\}$ V_{20}-Mengen sind. Also ist $\{(f, g) \notin U_1\}$ eine V_2-Menge. Q.E.D.

Aus Satz (26) erhalten wir

(27) Satz. *μ ist genau dann definit bzw. lokal definit, wenn auf $\mathscr{L}$ bzw. $\mathscr{L}_{\mathrm{erw}}$ die Uniformität der Konvergenz im Mittel feiner als die Uniformität der Konvergenz nach Maß bzw. lokal nach Maß ist.*

Aus den Sätzen (22) und (27) erhalten wir

(28) Satz. *Sei μ definit bzw. lokal definit, $(f_i)_{i \in I}$ ein Netz in $\mathscr{L}$ bzw. $\mathscr{L}_{\mathrm{erw}}$ und $f \in \mathscr{L}$ bzw. $\mathscr{L}_{\mathrm{erw}}$. Dann gilt:*

$(f_i)_{i \in I}$ konvergiert im Mittel gegen f genau dann, wenn $(f_i)_{i \in I}$ nach Maß bzw. lokal nach Maß gegen f konvergiert und $(\mu_{f_i}^{\mathrm{lok}})_{i \in I}$ terminal gleichmäßig absolut-stetig und terminal gleichmäßig im Unendlichen stetig ist.

Aus den Sätzen (17) und (27) ergibt sich: Wenn μ definit bzw. lokal definit und G_1^M bzgl. der Uniformität der Konvergenz nach Maß bzw. lokal nach Maß vollständig ist, dann ist $\mathscr{L}$ bzw. $\mathscr{L}_{\mathrm{erw}}$ bzgl. der Uniformität der Konvergenz im Mittel vollständig.

Aus Satz (27) ergibt sich ferner: Wenn $\mathfrak{U}_3$ eine abzählbare Basis besitzt und μ definit bzw. lokal definit ist, dann kann man sich in der Definition der Integrierbarkeit bzw. erweiterten Integrierbarkeit auf Folgen beschränken.

Im folgenden nennen wir ein Netz $(f_i)_{i \in I}$ in G_1^M *terminal gleichmäßig total-beschränkt*, wenn es zu jedem $U_1 \in \mathfrak{U}_1$ ein $i_0 \in I$ und eine endliche Familie $(x_k)_{k \in K}$ in G_1 mit $\bigcup_{i \geqq i_0} f_i(M) \subset \bigcup_{k \in K} U_1(x_k)$ [10]) gibt.

(29) Lemma. *Sei $A \in \mathscr{R}_{\mathrm{lok}}$, μ von endlicher Semivariation auf A und $(f_i)_{i \in I}$ ein Netz in $\mathscr{L}_{\mathrm{erw}}$ mit $Af_i = f_i$ für alle $i \in I$. Dann gilt:*

Wenn $(f_i)_{i \in I}$ terminal gleichmäßig total-beschränkt ist, dann ist $(\mu_{f_i}^{\mathrm{lok}})_{i \in I}$ terminal gleichmäßig absolut-stetig.

Beweis. Seien $U_3, U_{30} \in \mathfrak{U}_3$ mit $U_{30} + U_{30} \subset U_3$.

Da μ von endlicher Semivariation auf A ist, gibt es ein $U_1 \in \mathfrak{U}_1$, so daß

$$\left(\int_A h_1 \,\mathrm{d}\mu, \int_A h_2 \,\mathrm{d}\mu\right) \in U_{30}$$

für alle $h_1, h_2 \in \mathscr{E}$ mit $(h_1, h_2)(M) \subset U_1$ gilt.

Sei $U_{10} \in \mathfrak{U}_1$ mit $U_{10} \circ U_{10} \subset U_1$.

---

[10]) Sei G eine Menge; dann wird für ein $x \in G$ und eine Teilmenge A von $G \times G$ $A(x) := \{y \in G : (x, y) \in A\}$ gesetzt.

Da $(f_i)_{i\in I}$ terminal gleichmäßig total-beschränkt ist, gibt es ein $i_0 \in I$ und eine endliche Familie $(x_k)_{k\in K}$ in G_1 mit $\bigcup_{i\geq i_0} f_i(M) \subset \bigcup_{k\in K} U_{10}(x_k)$.

Sei $V_2 \in \mathfrak{V}_2$ mit $\sum_{k\in K} x_k y_k \in U_3(0)$ für jede Familie $(y_k)_{k\in K}$ in V_2.

Sei schließlich $i \geqq i_0$, B eine meßbare V_2-Menge und $(g_j)_{j\in J}$ ein Netz in $\mathscr{E}$, das im Mittel Cauchy ist und lokal nach Maß gegen f_i konvergiert.

Wegen $g_j \to_{\text{i.M.}} f_i$ gibt es ein $j_0 \in J$, so daß

$$\left(\int_{A\cap B} g_j \, \mathrm{d}\mu, \int_B f_i \, \mathrm{d}\mu\right) \in U_3$$

für alle $j \geqq j_0$ gilt.

Da $(\mu_{g_j})_{j\in J}$ terminal gleichmäßig absolut-stetig ist, gibt es ein $j_1 \geqq j_0$ und ein $V_{20} \in \mathfrak{V}_2$, so daß

$$\int_X g_j \, \mathrm{d}\mu \in U_{30}(0)$$

für alle $j \geqq j_1$ und alle meßbaren V_{20}-Mengen X gilt.

Wegen $Bg_j \to_{\text{n.M.}} Bf_i$ gibt es ein $j_2 \geqq j_1$, so daß $B \cap \{(f_i, g_{j_2}) \notin U_{10}\}$ eine V_{20}-Menge ist.

Da nun $g_{j_2}(\{(f_i, g_{j_2}) \in U_{10}\}) \subset \bigcup_{k\in K} U_1(x_k)$ gilt, gibt es ein $h \in \mathscr{E}$ und eine meßbare Teilmenge C von $\{(f_i, g_{j_2}) \notin U_{10}\}$ mit $(h, g_{j_2})(M) \subset U_1$ und $h(M \setminus C) \subset \{x_k : k\in K\} \cup \{0\}$. Nunmehr erhalten wir

$$\left(\int_{A\cap B\setminus C} h \, \mathrm{d}\mu, \int_{A\cap B\setminus C} g_{j_2} \, \mathrm{d}\mu\right) \in U_{30}$$

und

$$\left(0, \int_{A\cap B\cap C} g_{j_2} \, \mathrm{d}\mu\right) \in U_{30}$$

und damit

$$\left(\int_{A\cap B\setminus C} h \, \mathrm{d}\mu, \int_{A\cap B} g_{j_2} \, \mathrm{d}\mu\right) \in U_3 .$$

Da außerdem $\int_{A\cap B\setminus C} h \, \mathrm{d}\mu \in U_3(0)$ gilt, ergibt sich schließlich

$$\int_B f_i \, \mathrm{d}\mu \in U_3 \circ U_3 \circ U_3(0) . \quad \text{Q.E.D.}$$

Mittels Lemma (29) erhalten wir aus Satz (22) die folgende Version des Lebesgueschen Satzes von der beschränkten Konvergenz.

(30) Satz. *Sei $A \in \mathscr{R}$, $(f_i)_{i\in I}$ ein Netz in $\mathscr{L}$ mit $Af_i = f_i$ für alle $i \in I$ und $f \in G_1^M$. Dann gilt:*

Wenn $(f_i)_{i\in I}$ terminal gleichmäßig total-beschränkt ist und nach Maß bzw. lokal nach Maß gegen f konvergiert, dann ist f integrierbar bzw. erweitert-integrierbar und $(f_i)_{i\in I}$ konvergiert im Mittel gegen f.

Mit Hilfe von Satz (30) beweisen wir den folgenden Satz.

(31) Satz. *Sei $A \in \mathscr{R}$, $f \in \mathfrak{F}$ mit $Af = f$ und $f(M)$ total-beschränkt. Dann ist f integrierbar.*

Beweis. Da f meßbar ist, gibt es zu jedem $U_1 \in \mathfrak{U}_1$ und jedem $V_2 \in \mathfrak{V}_2$ ein $g_{U_1V_2} \in \mathscr{E}$, so daß $\{(f, g_{U_1V_2}) \notin U_1\}$ eine V_2-Menge ist. Für $U_1 \in \mathfrak{U}_1$ und $V_2 \in \mathfrak{V}_2$ setzen wir

$$B_{U_1V_2} := \bigcup\{g_{U_1V_2}^{-1}(x) \colon x \in G_1 \setminus \{0\}\,,\quad g_{U_1V_2}^{-1}(x) \subset \{(f, g_{U_1V_2}) \notin U_1\}\}$$

und

$$h_{U_1V_2} := (A \setminus B_{U_1V_2})\, g_{U_1V_2}\,.$$

Dann ist $(h_{U_1V_2})_{(U_1,V_2) \in \mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{V}_2}$ ein Netz ($\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{V}_2$ mit der Ordnung $\supset$ versehen) in $\mathscr{E}$, das nach Maß gegen f konvergiert und terminal gleichmäßig totalbeschränkt ist, wie man sich leicht überlegt. Da außerdem $Ah_{U_1V_2} = h_{U_1V_2}$ für alle $U_1 \in \mathfrak{U}_1$ und alle $V_2 \in \mathfrak{V}_2$ gilt, folgt mittels Satz (30) die Behauptung. Q.E.D.

5. Spezialfälle. Vergleich mit dem Bartle-Integral. Beispiele.

(32) Satz. *Sei G_1 ein uniformes Monoid (mit dem neutralen Element als ausgezeichnetem Punkt) und seien die Abbildungen $G_1 \ni x \mapsto xy \in G_3$, $y \in G_2$, homomorph. Dann gilt:*

(i) *G_1^M ist sowohl mit der Uniformität der Konvergenz nach Maß als auch mit der Uniformität der Konvergenz lokal nach Maß ein uniformes Monoid*[11]).

(ii) *$\mathscr{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_{\text{lok}}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}_{\text{erw}}$ und $\mathscr{L}_{\text{lok}}$ sind Untermonoide von G_1^M.*

(iii) *Die Abbildungen*

$$\mathscr{L}_{\text{erw}} \ni f \mapsto \int_A f\, \mathrm{d}\mu \in G_3\,,\quad A \in \mathscr{R}_{\text{lok}}\,,$$

und

$$\mathscr{L}_{\text{erw}} \ni f \mapsto \mu_f \in G_3^{\mathscr{R}_{\text{lok}}}$$

sind homomorph.

(iv) *$\mathscr{L}_{\text{erw}}$ ist mit der Uniformität der Konvergenz im Mittel ein uniformes Monoid.*

Der Beweis dieses wie auch des nächsten Satzes ist trivial.

(33) Satz. *Sei G_1 eine topologische abelsche Gruppe, G_3 eine Hausdorffsche vollständige topologische abelsche Gruppe und seien die Abbildungen $G_1 \ni x \mapsto$ $\mapsto xy \in G_3$, $y \in G_2$, homomorph. Dann gilt:*

(i) *G_1^M ist mit der Topologie der Konvergenz nach Maß bzw. lokal nach Maß eine topologische abelsche Gruppe, deren Uniformität die Uniformität der Konvergenz nach Maß bzw. lokal nach Maß ist.*

(ii) *$\mathscr{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_{\text{lok}}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}_{\text{erw}}$ und $\mathscr{L}_{\text{lok}}$ sind Untergruppen von G_1^M.*

---

[11]) Produkte von Monoiden, Gruppen oder Vektorräumen sind mit den punktweise definierten Verknüpfungen versehen.

(iii) *Die Abbildungen*

$$\mathscr{L}_{\mathrm{erw}} \ni f \mapsto \int_A f \, \mathrm{d}\mu \in G_3\,, \quad A \in \mathscr{R}_{\mathrm{lok}}\,,$$

und

$$\mathscr{L}_{\mathrm{erw}} \ni f \mapsto \mu_f \in G_3^{\mathscr{R}_{\mathrm{lok}}}$$

sind homomorph.

(iv) $\mathscr{L}_{\mathrm{erw}}$ *ist mit der Topologie der Konvergenz im Mittel eine topologische abelsche Gruppe, deren Uniformität die Uniformität der Konvergenz im Mittel ist.*

In Anbetracht von Satz (27) ergibt sich nun unter den Voraussetzungen von Satz (33): Die Umkehrung des Vitalischen Konvergenzsatzes ist genau dann gültig, wenn μ definit bzw. lokal definit ist.

(34) Satz. *Sei G_1 ein topologischer (reeller oder komplexer) Vektorraum, G_3 ein Hausdorffscher vollständiger topologischer Vektorraum und seien die Abbildungen $G_1 \ni x \mapsto xy \in G_3$, $y \in G_2$, linear. Dann gilt:*

(i) *Die Abbildungen $G_1^M \ni f \mapsto af \in G_1^M$, a Skalar, sind sowohl bzgl. der Uniformität der Konvergenz nach Maß als auch bzgl. der Uniformität der Konvergenz lokal nach Maß gleichmäßig stetig.*

(ii) $\mathscr{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_{\mathrm{lok}}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}_{\mathrm{erw}}$ *und* $\mathscr{L}_{\mathrm{lok}}$ *sind Untervektorräume von* G_1^M.

(iii) *Die Abbildungen*

$$\mathscr{L}_{\mathrm{erw}} \ni f \mapsto \int_A f \, \mathrm{d}\mu \in G_3\,, \quad A \in \mathscr{R}_{\mathrm{lok}}\,,$$

und

$$\mathscr{L}_{\mathrm{erw}} \ni f \mapsto \mu_f \in G_3^{\mathscr{R}_{\mathrm{lok}}}$$

sind linear.

(iv) $\mathfrak{F}$ *bzw.* $\mathfrak{F}_{\mathrm{lok}}$ *ist mit der Topologie der Konvergenz nach Maß bzw. lokal nach Maß ein topologischer Vektorraum, dessen Uniformität die Uniformität der Konvergenz nach Maß bzw. lokal nach Maß ist.*

(v) $\mathscr{L}_{\mathrm{erw}}$ *ist mit der Topologie der Konvergenz im Mittel ein topologischer Vektorraum, dessen Uniformität die Uniformität der Konvergenz im Mittel ist.*

(vi) *Für jedes $f \in \mathscr{L}_{\mathrm{erw}}$ ist $\mu_f(\mathscr{R}_{\mathrm{lok}})$ eine beschränkte Teilmenge von G_3.*

Beweis. Der Beweis von (i), (ii) und (iii) ist trivial. Zum Beweis von (iv) genügt es wegen Satz (33) (i) zu zeigen, daß $\mathfrak{F}$ bzgl. der Topologie der Konvergenz nach Maß eine Nullumgebungsbasis aus kreisförmigen und absorbierenden Mengen besitzt. Eine solche Nullumgebungsbasis ist aber das Mengensystem $\{\{f \in \mathfrak{F}: \{f \notin V_1\}$ ist V_2-Menge$\}: V_1 \in \mathfrak{B}_1$ und kreisförmig, $V_2 \in \mathfrak{B}_2\}$, wobei $\mathfrak{B}_1$ den Nullumgebungsfilter von G_1 bezeichnet. Jede Menge dieses Systems ist kreisförmig, wie man unmittelbar sieht, und absorbierend, wie die folgende Überlegung zeigt.

Sei $V_1 \in \mathfrak{B}_1$, $V_2 \in \mathfrak{B}_2$ und $f \in \mathfrak{F}$. Wir wählen zunächst ein $V_{10} \in \mathfrak{B}_1$ mit $V_{10} + V_{10} \subset$ $\subset V_1$ und dann ein reelles $r > 0$ und ein $V_{11} \in \mathfrak{B}_1$, so daß $ax \in V_{10}$ für alle Skalare a mit $|a| \leqq r$ und alle $x \in V_{11}$ gilt. Da f meßbar ist, gibt es ein $g \in \mathscr{E}$, so daß $\{f - g \notin V_{11}\}$

eine V_2-Menge ist. Schließlich wählen wir ein reelles $s > 0$ mit $s \leqq r$, so daß $ax \in V_{10}$ für alle Skalare a mit $|a| \leqq s$ und alle $x \in g(M)$ gilt.

Sei nun a ein Skalar mit $|a| \leqq s$. Aus dem Vorangehenden ergibt sich dann $\{af \notin V_1\} \subset \{a(f - g) \notin V_{10}\} \subset \{f - g \notin V_{11}\}$, weshalb $\{af \notin V_1\}$ eine V_2-Menge ist.

Zum Beweis von (v) genügt es wegen Satz (33) (iv) zu zeigen, daß $\mathscr{L}_{\text{erw}}$ bzgl. der Topologie der Konvergenz im Mittel eine Nullumgebungsbasis aus kreisförmigen und absorbierenden Mengen besitzt. Eine solche Nullumgebungsbasis ist aber das Mengensystem $\{\{f \in \mathscr{L}_{\text{erw}}: \int_A f \, d\mu \in V_3 \text{ für alle } A \in \mathscr{R}\}: V_3 \in \mathfrak{V}_3 \text{ und kreisförmig}\}$, wobei $\mathfrak{V}_3$ den Nullumgebungsfilter von G_3 bezeichnet. Jede Menge dieses Systems ist kreisförmig, wie man sofort sieht, und absorbierend, wie die folgende Überlegung zeigt.

Sei $V_3 \in \mathfrak{V}_3$ und $f \in \mathscr{L}_{\text{erw}}$. Wir wählen zunächst ein $V_{30} \in \mathfrak{V}_3$ mit $V_{30} + V_{30} \subset V_3$ und dann ein reelles $r > 0$ und ein $V_{31} \in \mathfrak{V}_3$, so daß $az \in V_{30}$ für alle Skalare a mit $|a| \leqq r$ und alle $z \in V_{31}$ gilt. Es gibt ein $g \in \mathscr{E}$ mit $\int_A (f - g) \, d\mu \in V_{31}$ für alle $A \in \mathscr{R}$. Da μ von endlicher Semivariation auf $\{g \neq 0\}$ ist, gibt es ein $V_1 \in \mathfrak{V}_1$, so daß $\int_{\{g \neq 0\}} h \, d\mu \in V_{30}$ für alle $h \in \mathscr{E}$ mit $h(M) \subset V_1$ gilt. Wir wählen schließlich ein reelles $s > 0$ mit $s \leqq r$, so daß $ax \in V_1$ für alle Skalare a mit $|a| \leqq s$ und alle $x \in g(M)$ gilt.

Sei nun a ein Skalar mit $|a| \leqq s$ und $A \in \mathscr{R}$. Aus dem Vorangehenden ergibt sich dann $\int_A ag \, d\mu \in V_{30}$ und $a \int_A (f - g) \, d\mu \in V_{30}$ und damit $\int_A af \, d\mu \in V_3$.

Da also $\mathscr{L}_{\text{erw}}$ mit der Topologie der Konvergenz im Mittel ein topologischer Vektorraum ist, ist jede Nullumgebung bzgl. dieser Topologie absorbierend, woraus sich sofort die Behauptung (vi) ergibt. Q.E.D.

Im folgenden seien G_1 und G_2 normierte Vektorräume mit den Normen $|\ |_1$ und $|\ |_2$, sei G_3 ein Banachraum mit der Norm $|\ |_3$ und sei die Abbildung $G_1 \times G_2 \ni (x, y) \mapsto xy \in G_3$ bilinear und stetig. In dieser Situation definiert Bartle [1] sein Integral. Für eine Teilmenge A von M nennen wir

$$\mu_*(A) := \sup\{|\mu(B)|_2 : \mathscr{R} \ni B \subset A\}$$

die *sup-Norm von μ auf A* und

$$\|\mu\|(A) := \sup\{|\textstyle\int f \, d\mu|_3 : f \in \mathscr{E} \text{ mit } Af = f \text{ und } |f(s)|_1 \leqq 1 \text{ für alle } s \in M\}$$

die *Semivariation von μ auf A*; wir setzen ferner

$$\mu_*^*(A) := \inf\{\mu_*(B) : \mathscr{R} \ni B \supset A\}$$

und

$$\|\mu\|^*(A) := \inf\{\|\mu\|(B) : \mathscr{R} \ni B \supset A\}.$$

Wir bemerken: μ ist genau dann von endlicher Semivariation auf $A \subset M$, wenn $\|\mu\|(A)$ endlich ist. Und weiter: Ein Netz $(f_i)_{i \in I}$ in G_1^M konvergiert genau dann nach Maß gegen $f \in G_1^M$, wenn $\mu_*^*(\{|f - f_i|_1 \geqq r\}) \to 0$ für alle reellen $r > 0$ gilt. Ersetzt man hier μ_*^* durch $\|\mu\|^*$, so erhält man Bartles Definition der Konvergenz nach Maß. Nur durch diese unterschiedliche Definition der Konvergenz nach Maß unterscheidet sich dann auch seine Definition der Meßbarkeit und der Integrierbarkeit von der unsrigen. Ohne Einschränkung sei nun G_2 der Banachraum $\mathrm{LIN}_s(G_1, G_3)$ der stetigen linearen Operatoren von G_1 in G_3 und $xy = y(x)$ für alle $x \in G_1$ und $y \in G_2$. Dann gilt $\mu_* \leqq \|\mu\|$, und damit ist jede Bartle-integrierbare Abbildung auch integrierbar. Die Umkehrung ist allerdings nicht richtig, wie der folgende Satz vermuten läßt.

(35) Satz. *Sei $f \in G_1^M$. Dann gilt:*

f ist genau dann Bartle-integrierbar, wenn f integrierbar und Bartle-meßbar ist.

Beweis. Sei f integrierbar und Bartle-meßbar. Wir konstruieren eine Folge $(f_n)_{n\in N}$ (N: = Menge der positiven ganzen Zahlen) in $\mathscr{E}$, die im Mittel Cauchy ist und im Bartleschen Sinne nach Maß gegen f konvergiert.

Sei hierzu $n \in N$.

Da f integrierbar ist, gibt es ein $g_n \in \mathscr{E}$ und ein $A_n \in \mathscr{R}$, so daß $|\int_X (f - g_n)\, \mathrm{d}\mu|_3 < < 1/n$ für alle $X \in \mathscr{R}$ und $|f(s) - g_n(s)|_1 < 1/n$ für alle $s \in M \setminus A_n$ gilt.

Wegen Satz (20) gibt es ein reelles $r_n > 0$ mit $r_n \leqq 1/n$, so daß $|\int_{A_n} h\, \mathrm{d}\mu|_3 < 1/n$ für alle $h \in \mathscr{L}$ mit $|h(s)|_1 < r_n$, $s \in M$, gilt.

Da f Bartle-meßbar ist, gibt es ein $h_n \in \mathscr{E}$ und ein $B_n \in \mathscr{R}$, so daß $\|\mu\|\,(B_n) < 1/n$ und $|f(s) - h_n(s)|_1 < r_n$ für alle $s \in M \setminus B_n$ gilt.

Wir definieren $f_n := g_n + (A_n \setminus B_n)(h_n - g_n)$.

f_n ist einfach und für $X \in \mathscr{R}$ ergibt sich

$$\left|\int_X (f - f_n)\, \mathrm{d}\mu\right|_3 \leqq \left|\int_{X\setminus(A_n\setminus B_n)} (f - g_n)\, \mathrm{d}\mu\right|_3 + \left|\int_{X\cap(A_n\setminus B_n)} (f - h_n)\, \mathrm{d}\mu\right|_3 < \frac{2}{n},$$

weshalb $(f_n)_{n\in N}$ im Mittel Cauchy ist. Wegen

$$\left\{|f - f_n|_1 \geqq \frac{1}{n}\right\} \subset A_n \cap B_n$$

ist $(f_n)_{n\in N}$ außerdem im Bartleschen Sinne nach Maß gegen f konvergent. Q.E.D.

Ohne den Beweis im einzelnen auszuführen, zeigen wir nun anhand eines Beispiels, daß integrierbare Abbildungen nicht notwendig Bartle-meßbar und daher auch nicht notwendig Bartle-integrierbar sind. Sei hierzu $M = N$, $\mathscr{R}$ die Potenzmenge von N, G_1 der Banachraum l_1 der summierbaren reellen Folgen ($|\ |_1$ = Betragssummennorm) und G_3 der Banachraum c_0 der reellen Nullfolgen ($|\ |_3$ = Supremumsnorm). Ferner sei

$$T_n := \left\{k \in N: \frac{(n-1)\,n}{2} < k \leqq \frac{n(n+1)}{2}\right\} (n \in N)$$

und

$$\mu(A)(x) := \left(\frac{1}{n} \sum_{k\in A\cap T_n} x_k\right)_{n\in N} \quad (A \subset N,\ x \in l_1)\,.$$

Hierdurch ist ein $\mathrm{LIN}_s(l_1, c_0)$-wertiges σ-additives Maß μ auf $\mathscr{R}$ definiert. Für

$A \subset N$ gilt

$$\mu_*(A) = |\mu(A)|_2 = \frac{1}{\min\{n \in N\colon A \cap T_n \neq \emptyset\}}$$

und

$$\|\mu\|\,(A) = \sup\left\{\frac{1}{n}\operatorname{Anz}(A \cap T_n)\colon n \in N\right\} \leqq 1$$

($\operatorname{Anz}(X)\colon=$ Anzahl der Elemente der Menge X). $f \in l_1^N$ ist genau dann integrierbar, wenn

$$\left(\max\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k\in A} f(k)_k\right| : A \subset T_n\right\}\right)_{n\in N}$$

eine Nullfoge ist. In diesem Fall gilt

$$\int_A f\,\mathrm{d}\mu = \left(\frac{1}{n}\sum_{k\in A\cap T_n} f(k)_k\right)_{n\in N} \quad (A \subset N)\,.$$

Jedes $f \in l_1^N$ mit $f(k)_k = 0$ für alle $k \in N$ und $\inf\{|f(k) - f(l)|_1\colon\ k, l \in N$ mit $k \neq l\} > 0$ ist nun trivialerweise integrierbar, aber wegen $\|\mu\|\,(\{k, k+1, k+2, \ldots\}) = 1$ für alle $k \in N$ nicht Bartlemeßbar, also auch nicht Bartle-integrierbar. Übrigens findet man obiges μ bei Dobrakov [2] als Beispiel eines bzgl. der Operatornorm σ-additiven Operatormaßes, dessen Semivariation nicht $\emptyset$-stetig ist.

Kehren wir wieder zur allgemeinen Situation zurück.

Wir bemerken: Wenn $\mathfrak{U}_1$ die diskrete Uniformität ist, dann ist jedes G_2-wertige Maß von endlicher Semivariation. Ist nun $G_1 = \{0, 1\}$ mit der diskreten Uniformität, dann können wir aufgrund der üblichen Identifizierung von $\{0, 1\}^M$ und der Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ von M die Uniformität der Konvergenz nach Maß von $\{0, 1\}^M$ auf $\mathfrak{P}(M)$ übertragen. Die so erhaltene Uniformität auf $\mathfrak{P}(M)$ nennen wir die *Maßuniformität* und die zugehörige Topologie die *Maßtopologie.* Die Mengenoperationen $\Delta, \cap, \cup$ und $\setminus$ sind gleichmäßig stetig, und die abgeschlossene Hülle $\bar{\mathcal{R}}$ von $\mathcal{R}$ ist wieder ein Ring. Wenn G_2 ein uniformes abelsches Monoid ist, dann ist μ gleichmäßig stetig und, wenn G_2 außerdem Hausdorffsch und vollständig ist, besitzt daher genau eine (ebenfalls gleichmäßig) stetige Fortsetzung $\bar{\mu}$ auf $\bar{\mathcal{R}}$. $\bar{\mu}$ ist wieder ein Maß. Diese Fortsetzung $\bar{\mu}$ ist übrigens ein Integral: Wenn nämlich $G_1 = \{0, 1\}$ mit der diskreten Uniformität, $G_2 = G_3$ und $0y = 0$, $1y = y$ $(y \in G_2)$ ist, dann ist $f \in \{0, 1\}^M$ genau dann integrierbar, wenn $f^{-1}(1) \in \bar{\mathcal{R}}$ gilt; in diesem Fall haben wir $\int f\,\mathrm{d}\mu = \bar{\mu}(f^{-1}(1))$.

Im nächsten Satz, dessen Beweis wir dem Leser überlassen, geht es insbesondere um die Integration bzgl. $\bar{\mu}$.

(36) Satz. *Sei $\mathfrak{S}$ ein Ring auf M mit $\mathcal{R} \subset \mathfrak{S} \subset \bar{\mathcal{R}}$ und ν ein G_2-wertiges Maß auf $\mathfrak{S}$ mit $\nu|\mathcal{R} = \mu$. Ferner sei ν stetig bzgl. der durch μ induzierten Maßtopologie und besitze $\mathfrak{V}_2$ eine Basis aus abgeschlossenen Mengen. Dann gilt:*

(i) *ν ist lokal von endlicher Semivariation.*

(ii) *Die durch μ induzierte Uniformität der Konvergenz nach Maß bzw. lokal nach Maß ist gleich der durch ν induzierten Uniformität der Konvergenz nach Maß bzw. lokal nach Maß.*

(iii) $\mathfrak{F}(\mu) = \mathfrak{F}(\nu)$, $\mathfrak{F}_{\mathrm{lok}}(\mu) = \mathfrak{F}_{\mathrm{lok}}(\nu)$, $\mathscr{L}(\mu) = \mathscr{L}(\nu)$, $\mathscr{L}_{\mathrm{erw}}(\mu) = \mathscr{L}_{\mathrm{erw}}(\nu)$ *und* $\mathscr{L}_{\mathrm{lok}}(\mu) = \mathscr{L}_{\mathrm{lok}}(\nu)$.

(iv) *Für* $A \in \mathscr{R}_{\mathrm{lok}} \cap \mathfrak{S}_{\mathrm{lok}}$ *und* $f \in \mathscr{L}_{\mathrm{erw}}(\mu) = \mathscr{L}_{\mathrm{erw}}(\nu)$ *gilt* $\int_A f\,\mathrm{d}\mu = \int_A f\,\mathrm{d}\nu$.

(v) *Auf* $\mathscr{L}_{\mathrm{erw}}(\mu) = \mathscr{L}_{\mathrm{erw}}(\nu)$ *ist die durch μ induzierte Uniformität der Konvergenz im Mittel gleich der durch ν induzierten Uniformität der Konvergenz im Mittel.*

Abschließend erwähnen wir noch zwei einfache Beispiele von Integrierbarkeit: die Summierbarkeit von Familien und die Konvergenz von Netzen.

(37) Beispiel. Sei G_3 eine Hausdorffsche vollständige topologische abelsche Gruppe, $G_1 = G_3$, $G_2 = N \cup \{0\}$ mit der gewöhnlichen Addition und der diskreten Topologie, xy das y-fache von x $(x \in G_1,\ y \in G_2)$, $\mathscr{R}$ der Ring aller endlichen Teilmengen von M und μ das Anzahlmaß. Dann ist μ lokal von endlicher Semivariation, und $f \in G_1^M$ ist genau dann integrierbar (oder erweitert-integrierbar) wenn die Familie $(f(s))_{s\in M}$ summierbar ist; in diesem Fall haben wir für $A \in \mathscr{R}_{\mathrm{lok}} = \mathfrak{P}(M)$

$$\int_A f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{s\in A} f(s)\,.$$

(38) Beispiel. Sei $G_1 = G_3$, $G_2 = N \cup \{0\}$ mit der gewöhnlichen Addition und der diskreten Topologie und xy das y-fache von x $(x \in G_1,\ y \in G_2)$. Sei ferner M mit einer nach oben gerichteten Ordnung $\leqq$ versehen. Wir setzen

$$\mathscr{R}_0 := \{A \subset M\colon \text{es gibt ein } s \in M, \text{ so daß } A \text{ alle } t \geqq s \text{ enthält}\}$$

und

$$\mathscr{R}_1 := \{A \subset M\colon M \setminus A \in \mathscr{R}_0\}\,.$$

Dann ist $\mathscr{R} := \mathscr{R}_0 \cup \mathscr{R}_1$ eine Algebra auf M. Durch

$$\mu(A) := 0 \quad \text{für} \quad A \in \mathscr{R}_1 \quad \text{und} \quad = 1 \quad \text{für} \quad A \in \mathscr{R}_0$$

ist ein G_2-wertiges Maß μ auf $\mathscr{R}$ wohldefiniert. μ ist von endlicher Semivariation, und $f \in G_1^M$ ist genau dann integrierbar (oder meßbar), wenn das Netz $(f(s))_{s\in M}$ konvergiert; in diesem Fall haben wir

$$\int_A f\,\mathrm{d}\mu = \lim f(s) \quad \text{für} \quad A \in \mathscr{R}_0 \quad \text{und} \quad = 0 \quad \text{für} \quad A \in \mathscr{R}_1\,.$$

6. Der σ-additive Fall. In diesem Paragraphen sei μ σ-additiv und besitze $\mathfrak{V}_2$ eine Basis aus abgeschlossenen Mengen.

Mit $\mathscr{R}_\sigma$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller abzählbaren Vereinigungen von Mengen aus $\mathscr{R}$.

Für $V_2 \subset G_2$ nennen wir eine Teilmenge A von M eine *σ-V_2-Menge*, wenn es ein $B \in \mathscr{R}_\sigma$ gibt, so daß $A \subset B$ und $\mu(C) \in V_2$ für alle meßbaren Teilmengen C von B gilt. Satz (5) bleibt nun richtig, wenn man „V_2-Menge" durch „σ-V_2-Menge" ersetzt. Analog zu den Definitionen (6), (7), (8) und (12) definieren wir sodann die Begriffe „*(lokal) nach σ-Maß konvergent (Cauchy)*", „*Uniformität (Topologie) der Konvergenz (lokal) nach σ-Maß*", „*(lokal-) σ-meßbar*" und „*(erweitert-, lokal-) σ-integrierbar*" und führen die Bezeichnungen $\mathfrak{F}^\sigma$, $\mathfrak{F}^\sigma_{\text{lok}}$, $\mathscr{L}^\sigma$, $\mathscr{L}^\sigma_{\text{erw}}$ und $\mathscr{L}^\sigma_{\text{lok}}$ ein. Trivialerweise ist die Uniformität der Konvergenz (lokal) nach Maß feiner als die Uniformität der Konvergenz (lokal) nach σ-Maß und daher gelten die Inklusionen $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}^\sigma$, $\mathfrak{F}_{\text{lok}} \subset \mathfrak{F}^\sigma_{\text{lok}}$, $\mathscr{L} \subset \mathscr{L}^\sigma$, $\mathscr{L}_{\text{erw}} \subset \mathscr{L}^\sigma_{\text{erw}}$ und $\mathscr{L}_{\text{lok}} \subset \mathscr{L}^\sigma_{\text{lok}}$. Da Lemma (13) richtig bleibt, wenn man $\mathscr{L}_{\text{erw}}$ durch $\mathscr{L}^\sigma_{\text{erw}}$ und „lokal nach Maß" durch „lokal nach σ-Maß" ersetzt, können wir analog zu Definition (14) das *Integral einer erweitert-σ-integrierbaren Abbildung f (über einer lokal-meßbaren Menge A)* definieren; wir bezeichnen es wieder mit $\int_{(A)} f \,\mathrm{d}\mu$, was zu keiner Doppeldeutigkeit für $f \in \mathscr{L}_{\text{erw}}$ führt. Das zu $f \in \mathscr{L}^\sigma_{\text{erw}}$ bzw. $\mathscr{L}^\sigma_{\text{lok}}$ *gehörige unbestimmte Integral*

$$\mathscr{R}_{\text{lok}} \ni X \mapsto \int_X f \,\mathrm{d}\mu \in G_3$$

bzw. *unbestimmte lokale Integral*

$$\mathscr{R} \ni X \mapsto \int Xf \,\mathrm{d}\mu \in G_3$$

ist ein G_3-wertiges σ-additives Maß auf $\mathscr{R}_{\text{lok}}$ bzw. $\mathscr{R}$ und wird ebenfalls wieder mit μ_f bzw. μ_f^{lok} bezeichnet. Analog zu Definition (15) werden schließlich auf $\mathscr{L}^\sigma_{\text{erw}}$ die Begriffe „*im Mittel konvergent (Cauchy*" und „*Uniformität (Topologie) der Konvergenz im Mittel*" definiert.

Wir stellen nun fest: Alle Sätze, Lemmata und sonstigen Bemerkungen der Paragraphen 2, 3, 4 und 5 bis einschließlich Satz (34) bleiben richtig, wenn man jedes Mal „(lokal) nach Maß", „(lokal-) meßbar" und „(erweitert-, lokal-)integrierbar" sowie $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_{\text{lok}}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}_{\text{erw}}$ und $\mathscr{L}_{\text{lok}}$ entsprechend durch „(lokal) nach σ-Maß", „(lokal-) σ-meßbar" und „(erweitert-, lokal-) σ-integrierbar" sowie $\mathfrak{F}^\sigma$, $\mathfrak{F}^\sigma_{\text{lok}}$, $\mathscr{L}^\sigma$, $\mathscr{L}^\sigma_{\text{erw}}$ und $\mathscr{L}^\sigma_{\text{lok}}$ ersetzt. Dies gilt auch für Satz (36), wenn dort ν alsσ-additiv vorausgesetzt wird. Alle Beweise verlaufen analog.

Ist $G_1 = \{0, 1\}$ mit der diskreten Uniformität, dann können wir auch die Uniformität der Konvergenz nach σ-Maß von $\{0, 1\}^M$ auf $\mathfrak{P}(M)$ übertragen. Die so erhaltene Uniformität auf $\mathfrak{P}(M)$ nennen wir die *σ-Maßuniformität* und die zugehörige Topologie die *σ-Maßtopologie*. Die Mengenoperationen Δ, $\cap$, $\cup$ und $\setminus$ sind gleichmäßig stetig, und die abgeschlossene Hülle $\bar{\mathscr{R}}^\sigma$ von $\mathscr{R}$ ist wieder ein Ring. Wenn G_2 ein uniformes abelsches Monoid ist, dann ist μ gleichmäßig stetig und, wenn G_2 außerdem Hausdorffsch und vollständig ist, besitzt daher genau eine (ebenfalls gleichmäßig) stetige Fortsetzung $\bar{\mu}^\sigma$ auf $\bar{\mathscr{R}}^\sigma$. $\bar{\mu}^\sigma$ ist wieder ein Maß. Auch diese Fortsetzung $\bar{\mu}^\sigma$ ist ein Integral: Wenn nämlich $G_1 = \{0, 1\}$ mit der diskreten Uniformität, $G_2 = G_3$ und $0y = 0$, $1y = y$ $(y \in G_2)$ ist, dann ist $f \in \{0, 1\}^M$ genau dann σ-integrierbar, wenn $f^{-1}(1) \in \bar{\mathscr{R}}^\sigma$ gilt; in diesem Fall haben wir $\int f \,\mathrm{d}\mu = \bar{\mu}^\sigma(f^{-1}(1))$. Wenn μ

s-beschränkt[12]) ist, dann ist $\bar{\mathscr{R}}^\sigma$ ein σ-Ring und $\bar{\mu}^\sigma$ s-beschränkt und σ-additiv; die Restriktion von $\bar{\mu}^\sigma$ auf den von $\mathscr{R}$ erzeugten σ-Ring $\sigma(\mathscr{R})$ ist die einzig mögliche s-beschränkte σ-additive Fortsetzung von μ auf $\sigma(\mathscr{R})$.

Der Beweis des folgenden Satzes verläuft analog zu dem von Satz (36).

(39) Satz. *Sei $\mathfrak{S}$ ein Ring auf M mit $\mathscr{R} \subset \mathfrak{S} \subset \bar{\mathscr{R}}^\sigma$ und ν ein G_2-wertiges σ-additives Maß auf $\mathfrak{S}$ mit $\nu|\mathscr{R} = \mu$. Ferner sei ν stetig bzgl. der durch μ induzierten σ-Maßtopologie und lokal von endlicher Semivariation. Dann gilt:*

(i) *Die durch μ induzierte Uniformität der Konvergenz nach σ-Maß bzw. lokal nach σ-Maß ist gleich der durch ν induzierten Uniformität der Konvergenz nach, σ-Maß bzw. lokal nach σ-Maß.*

(ii) $\mathfrak{F}^\sigma(\mu) = \mathfrak{F}^\sigma(\nu)$, $\mathfrak{F}^\sigma_{\text{lok}}(\mu) = \mathfrak{F}^\sigma_{\text{lok}}(\nu)$, $\mathscr{L}^\sigma(\mu) = \mathscr{L}^\sigma(\nu)$, $\mathscr{L}^\sigma_{\text{erw}}(\mu) = \mathscr{L}^\sigma_{\text{erw}}(\nu)$ *und* $\mathscr{L}^\sigma_{\text{lok}}(\mu) \supset \mathscr{L}^\sigma_{\text{lok}}(\nu)$.

(iii) *Für* $A \in \mathscr{R}_{\text{lok}} \cap \mathfrak{S}_{\text{lok}}$ *und* $f \in \mathscr{L}^\sigma_{\text{erw}}(\mu) = \mathscr{L}^\sigma_{\text{erw}}(\nu)$ *gilt* $\int_A f\,\mathrm{d}\mu = \int_A f\,\mathrm{d}\nu$.

(iv) *Auf* $\mathscr{L}^\sigma_{\text{erw}}(\mu) = \mathscr{L}^\sigma_{\text{erw}}(\nu)$ *ist die durch μ induzierte Uniformität der Konvergenz im Mittel gleich der durch ν induzierten Uniformität der Konvergenz im Mittel.*

Insbesondere haben wir im Falle eines Hausdorffschen vollständigen uniformen abelschen Monoids G_2 und eines s-beschränkten μ, dessen Fortsetzung $\bar{\mu}^\sigma$ lokal von endlicher Semivariation ist, $\mathfrak{F}^\sigma(\mu) = \mathfrak{F}(\bar{\mu}^\sigma)$, $\mathfrak{F}^\sigma_{\text{lok}}(\mu) = \mathfrak{F}_{\text{lok}}(\bar{\mu}^\sigma)$, $\mathscr{L}^\sigma(\mu) = \mathscr{L}(\bar{\mu}^\sigma)$, $\mathscr{L}^\sigma_{\text{erw}}(\mu) = \mathscr{L}_{\text{erw}}(\bar{\mu}^\sigma)$ und $\mathscr{L}^\sigma_{\text{lok}}(\mu) \supset \mathscr{L}_{\text{lok}}(\bar{\mu}^\sigma)$.

7. Schwache Integrale. In diesem letzten Paragraphen sei X ein Vektorraum über dem Körper $\boldsymbol{K}$ der reellen oder komplexen Zahlen und L ein Untervektorraum des algebraischen Dualraums X^+ von X.

Sei hier zunächst μ ein $\boldsymbol{K}$-wertiges Maß auf $\mathscr{R}$. Für $A \subset M$ nennen wir wie üblich

$$|\mu|(A) := \sup\Big\{\sum_{i\in I} |\mu(A_i)| : (A_i)_{i\in I} \text{ disjunkte endliche Familie in } \mathscr{R} \text{ mit } A_i \subset A \text{ für alle } i \in I\Big\}$$

die *Totalvariation von μ auf A* und setzen ferner für $A \subset M$

$$|\mu|^*(A) := \inf\{|\mu|(B) : \mathscr{R} \ni B \supset A\}\,.$$

Bekanntlich ist $|\mu|$ ein $[0, \infty]$-wertiges Maß auf $\mathscr{R}$. Zur Integration $\boldsymbol{K}$-wertiger Abbildungen bzgl. μ nehmen wir für G_1, G_2 und G_3 jeweils $\boldsymbol{K}$ und für β die gewöhnliche Multiplikation in $\boldsymbol{K}$. Dann gilt: μ ist von endlicher Semivariation auf $A \in \mathscr{R}$ genau dann, wenn $|\mu|(A) < \infty$ ist. Ein Netz $(f_i)_{i\in I}$ in $\boldsymbol{K}^M$ konvergiert nach Maß gegen $f \in \boldsymbol{K}^M$ genau dann, wenn

$$|\mu|^*(\{|f - f_i| \geqq r\}) \to 0$$

für alle $r \in \boldsymbol{R}_+ :=$ Menge der positiven reellen Zahlen gilt. (Erweiterte) Integrierbarkeit bzgl. μ ist äquivalent mit (erweiterter) Integrierbarkeit bzgl. $|\mu|$. (Erweiterte)

[12]) μ heißt s-beschränkt, wenn für jede disjunkte Folge $(A_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ in $\mathscr{R}$ $\mu(A_n) \to 0$ gilt.

Integrierbarkeit von f impliziert (erweiterte) Integrierbarkeit von $|f|$. Ein Netz $(f_i)_{i\in I}$ (erweitert-)integrierbarer Abbildungen ist im Mittel konvergent gegen eine (erweitert-)integrierbare Abbildung f bzw. im Mittel Cauchy genau dann, wenn

$$\int |f - f_i| \, \mathrm{d}|\mu| \to 0 \quad \text{bzw.} \quad \int |f_i - f_j| \, \mathrm{d}|\mu| \to 0$$

gilt. Aus der Konvergenz im Mittel eines Netzes (erweitert-)integrierbarer Abbildungen folgt seine Konvergenz (lokal) nach Maß (wegen Satz (28), da μ definit ist). In der Definition der (erweiterten) Integrierbarkeit kann man sich auf Folgen beschränken.

I. Schwache Integrale X-wertiger Abbildungen bzgl. $\boldsymbol{K}$-wertiger Maße. In diesem Abschnitt sei μ ein $\boldsymbol{K}$-wertiges Maß auf $\mathscr{R}$ mit $|\mu|(A) < \infty$ für alle $A \in \mathscr{R}$. Eine Abbildung $f\colon M \to X$ heißt *L-(erweitert-)integrierbar*, wenn $l \circ f$ (erweitert-)*integrierbar* für alle $l \in L$ ist; in diesem Fall heißt für $A \in \mathscr{R}_{\text{lok}}$ die lineare Abbildung

$$L \ni l \mapsto \int_A l \circ f \, \mathrm{d}\mu \in \boldsymbol{K}$$

das *L-Integral von f über A* und wird mit $L\text{-}\int_A f \, \mathrm{d}\mu$ bezeichnet.

Wir zeigen nun, daß und wie sich dieser schwache Integralbegriff als Integralbegriff im Sinne von Paragraph 3 darstellen läßt.

Wir versehen X und L^+ jeweils mit der L-Topologie, wodurch X und L^+ lokalkonvexe topologische Vektorräume sind; L^+ ist Hausdorffsch und vollständig. Mit φ bezeichnen wir die stetige lineare Abbildung

$$X \ni x \mapsto (L \ni l \mapsto l(x) \in \boldsymbol{K}) \in L^+ .$$

Wir setzen $G_1 = X$, $G_2 = \boldsymbol{K}$, $G_3 = L^+$ und $\beta(x, a) = \varphi(ax)$ für $x \in X$ und $a \in \boldsymbol{K}$. In dieser Situation ist μ von endlicher Semivariation auf $A \in \mathscr{R}$ genau dann, wenn die lineare Abbildung

$$\mathscr{E}(X) \ni f \mapsto \int_A l \circ f \, \mathrm{d}\mu \in \boldsymbol{K}$$

für alle $l \in L$ bzgl. der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathscr{E}(X)$ stetig ist; dies gilt hier aber wegen $|\mu|(A) < \infty$, wie man leicht sieht. Ferner ergibt sich

(40) Satz. *Sei $f \in X^M$. Dann gilt:*

f ist L-(erweitert-)integrierbar genau dann, wenn f (erweitert-) integrierbar ist; in diesem Fall gilt für $A \in \mathscr{R}_{\text{lok}}$

$$L\text{-}\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu .$$

Beweis. Man überlegt sich leicht, daß f (erweitert-)integrierbar ist genau dann, wenn es ein Netz $(f_i)_{i\in I}$ in $\mathscr{E}(X)$ gibt, so daß für jedes $l \in L$ das Netz $(l \circ f_i)_{i\in I}$ im Mittel Cauchy ist und (lokal) nach Maß gegen $l \circ f$ konvergiert; in diesem Fall gilt für $A \in \mathscr{R}_{\text{lok}}$

$$\left(\int_A f \,\mathrm{d}\mu\right)(l) = \lim \int_A l \circ f_i \,\mathrm{d}\mu \,.$$

Hieraus folgt sofort: Wenn f (erweitert-)integrierbar ist, dann ist f L-(erweitert-)integrierbar und die Gleichung richtig.

Sei nun f L-(erweitert-)integrierbar. Wir konstruieren ein Netz $(f_i)_{i \in I}$ in $\mathscr{E}(X)$, so daß für jedes $l \in L$ das Netz $(l \circ f_i)_{i \in I}$ im Mittel gegen $l \circ f$ konvergiert. Da dann für jedes $l \in L$ $(l \circ f_i)_{i \in I}$ im Mittel Cauchy ist und (lokal) nach Maß gegen $l \circ f$ konvergiert, ist f (erweitert-)integrierbar.

Sei E eine nicht-leere endliche Teilmenge von L und $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$.

Es gibt ein $A \in \mathscr{R}$ und ein $\delta \in \boldsymbol{R}_+$, so daß für jedes $l \in E$ $\int_{M \setminus A} |l \circ f| \,\mathrm{d}|\mu| < \varepsilon$ und $\int_B |l \circ f| \,\mathrm{d}|\mu| < \varepsilon$ für alle $B \in \mathscr{R}$ mit $|\mu|(B) < \delta$ gilt.

Da $A(l \circ f)$ meßbar ist, gibt es zu jedem $l \in E$ ein $g_l \in \mathscr{E}(\boldsymbol{K})$ und ein $B_l \in \mathscr{R}$, so daß $|\mu|(B_l) < \delta/n$ ($n =$ Anzahl der Elemente von E) und $|l \circ f(s) - g_l(s)| < \varepsilon/(1 + |\mu|(A))$ für alle $s \in A \setminus B_l$ gilt. Es gibt eine disjunkte endliche Familie $(C_j)_{j \in J}$ in $\mathscr{R}$ und Familien $(x_{lj})_{j \in J}$, $l \in E$, in $\boldsymbol{K}$ mit $g_l = \sum_{j \in J} C_j x_{lj}$, $l \in E$.

Wir wählen eine Familie $(s_j)_{j \in J}$ in M, wobei $s_j \in C_j \cap A \setminus \bigcup_{l \in E} B_l$ gilt, falls diese Menge nicht-leer ist, und definieren

$$f_{E,\varepsilon} := \sum_{j \in J} \Bigl(C_j \cap A \setminus \bigcup_{l \in E} B_l\Bigr) f(s_j) \,.$$

Dann ist $(f_{E,\varepsilon})_{(E,\varepsilon) \in \mathfrak{P}_e(L) \times \boldsymbol{R}_+}$ ein Netz ($\mathfrak{P}_e(L) :=$ Menge aller nicht-leeren endlichen Teilmengen von L mit der Ordnung $\subset$ und $\boldsymbol{R}_+$ mit der Ordnung $\geqq$ versehen) in $\mathscr{E}(X)$, so daß für jedes $l \in L$ das Netz $(l \circ f_{E,\varepsilon})_{(E,\varepsilon) \in \mathfrak{P}_e(L) \times \boldsymbol{R}_+}$ im Mittel gegen $l \circ f$ konvergiert, denn es gilt für $l \in E$:

$$\int |l \circ f - l \circ f_{E,\varepsilon}| \,\mathrm{d}|\mu| \leqq \int_{M \setminus A} |l \circ f| \,\mathrm{d}|\mu| + \int_{A \cap \bigcup_{l \in E} B_l} |l \circ f| \,\mathrm{d}|\mu| +$$

$$+ \int_{A \setminus \bigcup_{l \in E} B_l} |l \circ f - g_l| \,\mathrm{d}|\mu| + \int_{A \setminus \bigcup_{l \in E} B_l} |g_l - l \circ f_{E,\varepsilon}| \,\mathrm{d}|\mu| < 4\varepsilon \,. \quad \text{Q.E.D.}$$

II. Schwache Integrale $\boldsymbol{K}$-wertiger Abbildungen bzgl. X-wertiger Maße. In diesem Abschnitt sei μ ein X-wertiges Maß auf $\mathscr{R}$ mit $|l \circ \mu|(A) < \infty$ für alle $l \in L$ und alle $A \in \mathscr{R}$. Eine Abbildung $f: M \to \boldsymbol{K}$ heißt L-(erweitert-)integrierbar, wenn f (erweitert-) integrierbar bzgl. $l \circ \mu$ für alle $l \in L$ ist; in diesem Fall heißt für $A \in \mathscr{R}_{\text{lok}}$ die lineare Abbildung

$$L \ni l \mapsto \int_A f \,\mathrm{d}(l \circ \mu) \in \boldsymbol{K}$$

das *L-Integral von f über A* und wird mit L-$\int_A f \,\mathrm{d}\mu$ bezeichnet.

Wir zeigen nun, daß und wie sich dieser schwache Integralbegriff als Integralbegriff im Sinne von Paragraph 3 darstellen läßt.

Wir versehen wieder X und L^+ mit der L-Topologie und setzen jetzt $G_1 = \boldsymbol{K}$,

$G_2 = X$, $G_3 = L^+$ und $\beta(a, x) = \varphi(ax)$ für $a \in \boldsymbol{K}$ und $x \in X$. In dieser Situation ist μ von endlicher Semivariation auf $A \in \mathscr{R}$ genau dann, wenn $|l \circ \mu|(A) < \infty$ für alle $l \in L$ ist. Ferner ergibt sich

(41) Satz. *Sei $f \in \boldsymbol{K}^M$. Dann gilt:*

f ist L-(erweitert-)integrierbar genau dann, wenn f (erweitert-)integrierbar ist; in diesem Fall gilt für $A \in \mathscr{R}_{\text{lok}}$

$$L\text{-}\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Beweis. Man überlegt sich leicht, daß f (erweitert-)integrierbar ist genau dann, wenn es ein Netz $(f_i)_{i \in I}$ in $\mathscr{E}(\boldsymbol{K})$ gibt, das für jedes $l \in L$ bzgl. $l \circ \mu$ im Mittel Cauchy ist und (lokal) nach Maß gegen f konvergiert; in diesem Fall gilt für $A \in \mathscr{R}_{\text{lok}}$

$$\left(\int_A f \, \mathrm{d}\mu\right)(l) = \lim \int_A f_i \, \mathrm{d}(l \circ \mu) \, .$$

Hieraus folgt sofort: Wenn f (erweitert-)integrierbar ist, dann ist f L-(erweitert-) integrierbar und die Gleichung richtig.

Sei nun f L-(erweitert-)integrierbar. Wir konstruieren ein Netz $(f_i)_{i \in I}$ in $\mathscr{E}(\boldsymbol{K})$, das für jedes $l \in L$ bzgl. $l \circ \mu$ im Mittel gegen f konvergiert. Da dann für jedes $l \in L$ bzgl. $l \circ \mu$ $(f_i)_{i \in I}$ im Mittel Cauchy ist und (lokal) nach Maß gegen f konvergiert, ist f (erweitert-)integrierbar.

Sei E eine nicht-leere endliche Teilmenge von L und $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$.

Es gibt ein $A \in \mathscr{R}$ und ein $\delta \in \boldsymbol{R}_+$, so daß für jedes $l \in E$ $\int_{M \setminus A} |f| \, \mathrm{d}|l \circ \mu| < \varepsilon$ und $\int_B |f| \, \mathrm{d}|l \circ \mu| < \varepsilon$ für alle $B \in \mathscr{R}$ mit $|l \circ \mu|(B) < \delta$ gilt.

Da Af bzgl. $l \circ \mu$ meßbar ist, gibt es zu jedem $l \in E$ ein $g_l \in \mathscr{E}(\boldsymbol{K})$ und ein $B_l \in \mathscr{R}$, so daß $|l \circ \mu|(B_l) < \delta$ und $|f(s) - g_l(s)| < \varepsilon / (1 + \sum_{l \in E} |l \circ \mu|(A))$ für alle $s \in A \setminus B_l$ gilt.

Sei $(l_1, \ldots, l_n)$ eine Abzählung von E. Wir definieren

$$f_{E,\varepsilon} := \sum_{j=1}^{n} \Big(A \cap \bigcap_{k=1}^{j-1} B_{l_k} \setminus B_{l_j}\Big) \, g_{l_j} \, .$$

Dann ist $(f_{E,\varepsilon})_{(E,\varepsilon) \in \mathfrak{P}_e(L) \times \boldsymbol{R}_+}$ ein Netz in $\mathscr{E}(\boldsymbol{K})$, das für jedes $l \in L$ bzgl. $l \circ \mu$ im Mittel gegen f konvergiert, denn es gilt für $l \in E$:

$$\int |f - f_{E,\varepsilon}| \, \mathrm{d}|l \circ \mu| = \int_{M \setminus A} |f| \, \mathrm{d}|l \circ \mu| + \int_{A \cap \bigcap_{l \in E} B_l} |f| \, \mathrm{d}|l \circ \mu| +$$
$$+ \int_{A \setminus \bigcap_{l \in E} B_l} |f - f_{E,\varepsilon}| \, \mathrm{d}|l \circ \mu| < 3\varepsilon \, . \quad \text{Q.E.D.}$$

Abschließend sei noch auf den σ-additiven Fall verwiesen. Wenn μ ein $\boldsymbol{K}$-wertiges σ-additives Maß auf $\mathscr{R}$ ist, dann setzen wir für $A \subset M$

$$|\mu|^{*\sigma}(A) := \inf \{ |\mu|(B) : \mathscr{R}_\sigma \ni B \supset A \} \, ;$$

bekanntlich ist $|\mu|$ ein $[0, \infty]$-wertiges σ-additives Maß auf $\mathscr{R}$, und die vor Abschnitt I gemachten Bemerkungen zur Integration $\boldsymbol{K}$-wertiger Abbildungen bzgl. μ bleiben richtig, wenn „(lokal) nach Maß“ und „(erweitert-)integrierbar“ sowie $|\mu|^*$ entsprechend durch „(lokal) nach σ-Maß“ und „(erweitert-) σ-integrierbar“ sowie $|\mu|^{*\sigma}$ ersetzt werden. Wenn μ ein $\boldsymbol{K}$-wertiges σ-additives Maß auf $\mathscr{R}$ mit $|\mu|(A) < \infty$ für alle $A \in \mathscr{R}$ ist, dann heißt eine Abbildung $f\colon M \to X$ *L-(erweitert-) σ-integrierbar*, wenn $l \circ f$ (erweitert-) σ-integrierbar für alle $l \in L$ ist, und wenn μ ein X-wertiges bzgl. der L-Topologie auf X σ-additives Maß auf $\mathscr{R}$ mit $|l \circ \mu|(A) < \infty$ für alle $l \in L$ und alle $A \in \mathscr{R}$ ist, dann heißt eine Abbildung $f\colon M \to \boldsymbol{K}$ *L-(erweitert-) σ-integrierbar*, wenn f (erweitert-) σ-integrierbar bzgl. $l \circ \mu$ für alle $l \in L$ ist; die Sätze (40) und (41) bleiben richtig, wenn „L-(erweitert-)integrierbar“ und „(erweitert-)integrierbar“ entsprechend durch „L-(erweitert-) σ-integrierbar“ und „(erweitert-) σ-integrierbar“ ersetzt werden. Alle Beweise verlaufen analog; nur die Konstruktion von $f_{E,\varepsilon}$ ist hier ein wenig komplizierter als oben.

Literatur

[1] *R. G. Bartle:* A general bilinear vector integral, Studia Math. *15* (1956), 337—352.

[2] *I. Dobrakov:* On integration in Banach spaces, I, Czechoslovak Math. J. *20* (1970), 511—536.

Anschrift des Verfassers: Brückstraße 30, D-4600 Dortmund 1, BRD.