

František Machala

Angeordnete affine Klingenberg'sche Ebenen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 30 (1980), No. 3, 341–356

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/101685>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1980

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ANGEORDNETE AFFINE KLINGENBERGSCH E EBENEN

FRANTIŠEK MACHALA, Olomouc

(Eingegangen am 24. April 1978)

M. KUNZE untersuchte in [2] geordnete über kommutativen lokalen Ringen konstruierte affine Klingenbergische Ebenen durch Verallgemeinerung der in der geordneten affinen Ebenen angewandten Verfahren (siehe [4]). In der vorliegenden Arbeit studieren wir allgemeine geordnete affine Klingenbergische Ebenen (kurz AK-Ebenen). Eine AK-Ebene nennen wir dabei geordnet, wenn eine Zwischenrelation auf jeder ihrer Geraden gegeben ist, die durch alle Parallelprojektionen reproduziert wird, wobei die Parallelprojektionen in etwas engerem Sinne als in [2] aufzufassen sind. In Definition 8 sind konvex geordnete AK-Ebenen eingeführt und im Satz 12 wird gezeigt, daß jede, zu einer konvex geordneten AK-Ebene zugeordnete, affine Ebene im Sinne von [4] geordnet ist.

Jeder AK-Ebene \mathcal{A} läßt sich nach [3] ein affiner lokaler Ternärtring $\mathcal{T} = (R, t, t_1)$ zuordnen. Ist \mathcal{A} geordnet, so induziert die Anordnung in \mathcal{A} kanonisch eine Anordnung der Menge R . Einige Eigenschaften von dieser Anordnung sind in Sätzen 13 bis 17 bewiesen.

In der weiteren Arbeit des Verfassers: „Angeordnete affine lokale Ternärtringe und angeordnete affine Klingenbergische Ebenen“ werden angeordnete affine lokale Ternärtringe definiert und Beziehungen zwischen den angeordneten AK-Ebenen und den angeordneten affinen lokalen Ternärtringen untersucht.

1. GEORDNETE MENGEN UND ZWISCHENRELATIONEN

Definition 1. Es sei \mathcal{M} eine nichtleere Menge und \leq eine binäre Relation auf \mathcal{M} . Das Paar (\mathcal{M}, \leq) heißt *geordnete Menge* und \leq die *Anordnung* von \mathcal{M} , wenn folgende Bedingungen für alle $A, B, C \in \mathcal{M}$ erfüllt sind:

- (A1) $A \leq A$,
- (A2) $A \leq B \wedge B \leq A \Rightarrow A = B$,
- (A3) $A \leq B \wedge B \leq C \Rightarrow A \leq C$,
- (A4) $A \leq B \vee B \leq A$.

Bemerkung 1. Ist (\mathcal{M}, \leq) eine geordnete Menge und definiert man auf \mathcal{M} eine weitere binäre Relation \leq' durch $A \leq' B: \Leftrightarrow B \leq A$, dann ist (\mathcal{M}, \leq') wieder eine geordnete Mengen und \leq' wird als eine zu \leq *inverse Anordnung* genannt. Eine Abbildung σ der geordneten Menge (\mathcal{M}, \leq) auf die geordnete Menge (\mathcal{N}, \leq') heißt *monoton wachsend (fallend)*, wenn $a \leq b \Rightarrow a^\sigma \leq' b^\sigma$ ($a \leq b \Rightarrow b^\sigma \leq' a^\sigma$) ist. Ist σ monoton wachsend oder monoton fallend, dann sagen wir, daß σ monoton ist. Gilt $a \leq b$ und zugleich $a \neq b$, so schreiben wir, wie üblich, $a < b$.

Definition 2. Eine ternäre Relation (***) auf der Menge \mathcal{M} heißt *Zwischenrelation*, wenn folgende Bedingungen für alle $A, B, C, X \in \mathcal{M}$ erfüllt sind:

- (Z1) $(ABC) \Rightarrow (CBA)$,
- (Z2) $(ABC) \vee (ACB) \vee (CAB)$,
- (Z3) $(ABC) \wedge (ACB) \Rightarrow B = C$,
- (Z4) $(ABC) \Rightarrow (ABX) \vee (XBC)$.

Gilt (ABC) , dann liegt B zwischen A und C .

Aus Definition 2 folgt für beliebige Elemente $A, B \in \mathcal{M}$: $(AAB), (ABB), (ABA) \Rightarrow A = B$ und

- (Z5) $(ABC) \wedge (ACD) \Rightarrow (BCD)$.
- (siehe [2]).

Bemerkung 2. Ferner setzen wir $(A . B . C): \Leftrightarrow (ABC) \wedge A \neq B \neq C \neq A$.

Satz 1. Ist (\mathcal{M}, \leq) eine geordnete Menge, so ist $(ABC): \Leftrightarrow A \leq B \leq C \vee C \leq B \leq A$ für $A, B, C \in \mathcal{M}$ eine Zwischenrelation auf \mathcal{M} .

Zum Beweis siehe [2], (2.2), S. 25.

Satz 2. Sei (***) eine Zwischenrelation auf der Menge \mathcal{M} und seien $0, 1$ zwei verschiedene Elemente von \mathcal{M} . Durch (***) soll eine binäre Relation \leq definiert werden, so daß (\mathcal{M}, \leq) eine geordnete Menge mit $0 \leq 1$ ist.

Zum Beweis (siehe [2], s. 26–29): Wir setzen

- $L: = \{X \in \mathcal{M} \mid (X01)\}$,
- $M: = \{X \in \mathcal{M} \mid (0X1)\}$,
- $R: = \{X \in \mathcal{M} \mid (01X)\}$

und erklären eine Abbildung ψ der Menge \mathcal{M} in die natürlichen Zahlen durch

- $\psi(A) = 1 \Leftrightarrow A \in L \setminus \{0\}$,
- $\psi(A) = 2 \Leftrightarrow A = 0$,
- $\psi(A) = 3 \Leftrightarrow A \in M \setminus \{0, 1\}$,
- $\psi(A) = 4 \Leftrightarrow A = 1$,
- $\psi(A) = 5 \Leftrightarrow A \in R \setminus \{1\}$.

Definieren wir

$$\begin{aligned} A \leq B &\Leftrightarrow \psi(A) < \psi(B), \\ \psi(A) &= \psi(B) \neq 5 \wedge (AB1), \\ \psi(A) &= \psi(B) = 5 \wedge (0AB), \end{aligned}$$

dann ist (\mathcal{M}, \leq) eine geordnete Menge mit $0 \leq 1$.

Bemerkung 3. Ist (***) eine Zwischenrelation auf einer Menge \mathcal{M} mit mindestens zwei Elementen und definiert man nach Satz 2 für zwei verschiedene Elemente $0, 1$ aus \mathcal{M} die Anordnung \leq von \mathcal{M} , so gilt $(ABC) \Leftrightarrow A \leq B \leq C \vee C \leq B \leq A$ ([2], 2.3).

2. GEORDNETE AFFINE KLINGENBERGSISCHE EBENEN

Definition 3. Es sei $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ eine Inzidenzstruktur nach Dembowski [1] und sei auf \mathcal{L} eine Äquivalenzrelation \parallel (Parallelität) derart erklärt, daß zu beliebigen $P \in \mathcal{P}$, $p \in \mathcal{L}$ genau eine Gerade q mit $p \parallel q$ und $P I q$ existiert. \mathcal{A} heißt eine *affine Klingenbergische Ebene* (kurz AK-Ebene), wenn es eine affine Ebene $\mathcal{A}' = (\mathcal{P}', \mathcal{L}', I')$ und ein Epimorphismus \varkappa von \mathcal{A} auf \mathcal{A}' gibt und folgende Forderungen erfüllt sind:

- (1) $P, Q \in \mathcal{P}$, $P\varkappa \neq Q\varkappa \Rightarrow \exists! p \in \mathcal{L}$; $P, Q I p$,
- (2) $p, q \in \mathcal{L}$, $p\varkappa \not\parallel q\varkappa \Rightarrow \exists! p \in \mathcal{P}$; $P I p, q$.

Bemerkung 4. Als Folgerung der Definition 3 ergibt sich $a \parallel b \Rightarrow a\varkappa \parallel b\varkappa$. AK-Ebenen sind daher zugleich affine Ebenen mit Homomorphismus im Sinne der Definition 10, [3].

Bemerkung 5. Zur Vereinfachung schreiben wir weiter \bar{P} bzw. \bar{p} anstatt von $P\varkappa$ bzw. $p\varkappa$ für $P \in \mathcal{P}$ bzw. $p \in \mathcal{L}$. Gilt $\bar{P} = \bar{Q}$, dann heißen P, Q *benachbart*, anderenfalls sind P, Q *fern*. Die einzige nach (1) durch die Punkte P, Q bestimmte Gerade p wird mit $p = PQ$ bezeichnet. Mit $P = p \cap q$ bezeichnet man den nach (2) durch die Geraden p, q bestimmten Punkt P .

Bemerkung 6. Im folgenden bedeutet $L(A, a)$ die Parallele zur Geraden a durch den Punkt A . Die Menge $\Pi(a)$ aller zu a parallelen Geraden heißt eine *Richtung*. Mit $P(a)$ bezeichnen wir die Menge aller Punkte der Geraden a , d.h. $P(a) = \{X \mid X I a\}$. Mit $F(P, p)$ bezeichnen wir die Menge aller Punkte der Geraden p , die zum Punkt P von $P(p)$ benachbart sind, d.h. $F(P, p) = \{X \mid X I p, \bar{X} = \bar{P}\}$ für $P I p$.

Definition 4. Es seien g, g' zwei Geraden der AK-Ebene \mathcal{A} und $\Pi(h)$ eine Richtung mit $\bar{g} \not\parallel \bar{h}$, $\bar{g}' \not\parallel \bar{h}$. Die Abbildung $\varphi: P(g) \rightarrow P(g')$ mit $\varphi(A) = g' \cap L(A, h)$ für alle Punkte $A \in P(g)$ heißt eine *Parallelprojektion* der Geraden g auf die Gerade g' mit der Richtung $\Pi(h)$. Socine Parallelprojektion wird mit $\varphi(g, g', \Pi(h))$ bezeichnet.

Definition 5. Eine AK-Ebene \mathcal{A} heißt *geordnet*, wenn es auf jeder Geraden von \mathcal{A} mindestens drei voneinander ferne Punkte gibt und für jede Gerade g eine Zwischenrelation auf $P(g)$ erklärt ist, welche bei dem Übergang zu einer anderen Geraden mittels einer Parallelprojektion stets erhalten bleibt.

Bemerkung 7. Unter der Bezeichnung $(ABC)_g$ versteht man, daß die Punkte A, B, C in der Geraden g enthalten sind und der Punkt B zwischen A und C in der auf $P(g)$ erklärten Zwischenrelation liegt. Ist $\varphi(g, g', \Pi(h))$ eine Parallelprojektion, dann ist $(ABC)_g \Rightarrow (\varphi(A) \varphi(B) \varphi(C))_{g'}$. Da φ eine bijektive Abbildung von $P(g)$ auf $P(g')$ ist, gilt sogar $(A \cdot B \cdot C)_g \Rightarrow (\varphi(A) \cdot \varphi(B) \cdot \varphi(C))_{g'}$.

Definition 6. Es sei $\Pi(h)$ eine Richtung und g eine Gerade mit $\bar{g} \nparallel \bar{h}$. Für beliebige $h_1, h_2, h_3 \in \Pi(h)$ setzen wir $(h_1 h_2 h_3)_{\Pi(h)} : \Leftrightarrow (A_1 A_2 A_3)_g$, wo $A_i \in h_i \cap g$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ ist.

Bemerkung 8. Nach Definition 6 ist in jeder Richtung $\Pi(h)$ eine Zwischenrelation $(***)_{\Pi(h)}$ eingeführt, die nach Definitionen 4 und 5 von der Wahl der Geraden g mit $\bar{g} \nparallel \bar{h}$ unabhängig ist.

Bemerkung 9. Nach Satz 2 wird für jede Gerade g von \mathcal{A} auf die Menge $P(g)$ durch die Zwischenrelation $(***)_g$ das Paar zueinander inverser Anordnungen erklärt. Nach Definition 6 lassen sich dann auch in jeder Richtung $\Pi(h)$ zwei Anordnungen durch $(***)_{\Pi(h)}$ einführen.

Satz 3. Sind die Punkte A, B, C in den Geraden g, g' enthalten, dann ist $(ABC)_g \Leftrightarrow (ABC)_{g'}$.

Beweis. Es sei $(ABC)_g$. Ist $\varphi(g, g', \Pi(h))$ eine Parallelprojektion, dann ist $\varphi(A) = A, \varphi(B) = B, \varphi(C) = C$ und nach Definition 5 erhält man $(ABC)_g \Rightarrow (\varphi(A) \varphi(B) \varphi(C))_{g'} \Rightarrow (ABC)_{g'}$. Ganz ähnlich zeigt man, daß auch $(ABC)_{g'} \Rightarrow (ABC)_g$ gilt.

Bemerkung 10. Falls aus dem Text deutlich sein wird, daß es sich um die Zwischenrelation auf der Geraden g handelt, werden wir einfach (ABC) anstatt von $(ABC)_g$ schreiben.

Satz 4. Es seien a, a' Geraden und \leq, \leq' die durch die Zwischenrelationen $(***)_a, (***)_a'$ erklärten Anordnungen von $P(a)$ und $P(a')$. Jede Parallelprojektion $\varphi(a, a', \Pi(h))$ ist eine monotone Abbildung von $(P(a), \leq)$ auf $(P(a'), \leq')$.

Beweis. Wir wählen zwei Punkte $0, 1 \in P(a)$ mit $0 < 1$. Nach Beweis von Satz 2 ist die Anordnung \leq durch die Zwischenrelation $(***)_a$ mittels der Teilmengen L, M, R von $P(a)$ erklärt. Da φ eine bijektive Abbildung von $P(a)$ auf $P(a')$ ist, gilt $\varphi(0) \neq \varphi(1)$. Die Anordnung \leq' von $P(a')$ ist wieder durch die Zwischenrelation $(***)_a'$ mittels der Teilmengen L', M', R' von $P(a')$ erklärt. Es sei $\varphi(0) <' \varphi(1)$. Da die Zwischenrelation $(***)_a$ in $(***)_a'$ durch φ übergeht, gilt $\varphi(L) = L', \varphi(M) = M', \varphi(R) = R'$ und $X \leq Y \Rightarrow \varphi(X) \leq' \varphi(Y)$. Die Abbildung φ ist also monoton wach-

end. Im Falle $\varphi(1) < \varphi(0)$ ergibt sich $\varphi(L) = M'$, $\varphi(R) = R'$, $\varphi(M) = L'$ und $X \leq Y \Rightarrow \varphi(Y) \leq \varphi(X)$. φ ist daher monoton fallend.

Bemerkung 11. Satz 4 läßt sich noch einfacher formulieren: Jede Parallelprojektion ist eine monotone Abbildung.

Satz 5. Sind X, Y zwei ferne Punkte einer Geraden g , dann existiert ein Punkt $P \in g$ mit $(X \cdot P \cdot Y)$ und $\bar{P} \neq \bar{X}, \bar{Y}$.

Beweis. Wir wählen eine Gerade h mit $h \parallel g$ und $\bar{h} \neq \bar{g}$. Unserer Voraussetzung nach gibt es auf h drei voneinander ferne Punkte A, B, C . Nach (Z2) liegt einer der Punkte A, B, C zwischen den anderen. Es sei z.B. $(A \cdot B \cdot C)$. Wir setzen $b = L(B, AX)$ (Abb. 1). Wegen $\bar{A} \neq \bar{C}$ ist $\bar{AX} \neq \bar{CX}$, $\bar{b} \parallel \bar{CX}$ und die Geraden b, CX schneiden

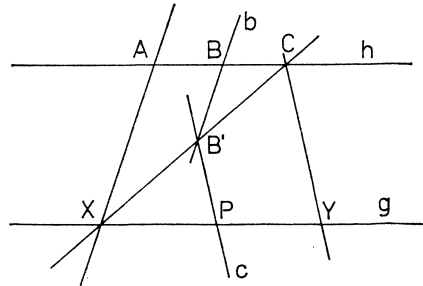


Abb. 1.

sich in genau einem Punkt B' . Ebenso schneiden sich auch $g, c = L(B', CY)$ in genau einem Punkt P . Wegen $\bar{AX} \parallel \bar{h}$, $\bar{AX} \parallel \bar{CX}$ ist $\varphi_1(h, CX, \Pi(AX))$ eine Parallelprojektion, wobei $\varphi_1(A) = X$, $\varphi_1(B) = B'$, $\varphi_1(C) = C$ und folglich gilt $(A \cdot B \cdot C) \Rightarrow (X \cdot B' \cdot C)$. Wegen $\bar{X} \neq \bar{Y}$ gilt $\bar{CX} \neq \bar{CY}$ und $\varphi_2(CX, g, \Pi(CY))$ ist eine Parallelprojektion. Aus $\varphi_2(X) = X$, $\varphi_2(B') = P$, $\varphi_2(C) = Y$ ergibt sich dann $(X \cdot B' \cdot C) \Rightarrow (X \cdot P \cdot Y)$. Offensichtlich ist $\bar{P} \neq \bar{X}, \bar{Y}$.

Satz 6. Das Produkt der Parallelprojektionen $\varphi_1(a, b, \Pi(h))$ und $\varphi_2(b, a, \Pi(k))$ mit $a \parallel b$ ist eine monoton wachsende Abbildung von $(P(a), \leq)$ auf sich.

Beweis. Es sei $(P(a), \leq)$ die durch die Zwischenrelation von a bestimmte geordnete Menge. Ferner seien $\varphi_1(a, b, \Pi(h))$, $\varphi_2(b, a, \Pi(k))$ Parallelprojektionen und φ ihr Produkt. Dann gilt $\bar{h} \parallel \bar{a}$, $\bar{k} \parallel \bar{a}$ und deswegen auch $\bar{h} \parallel \bar{b}$, $\bar{k} \parallel \bar{b}$. Nach Satz 4 sind φ_1, φ_2 monoton und folglich ist auch φ monoton. Es bleibt noch zu zeigen, daß für ein Paar $A, B \in a$ aus $A < B$ auch $\varphi(A) < \varphi(B)$ folgt.

1. Es sei $\bar{h} \parallel \bar{k}$. Setzen wir $h' = L(A, h)$, $A'' = b \cap h'$, $k' = L(A'', k)$, $A' = a \cap k'$ für einen Punkt $A \in a$, dann ist $A'' = \varphi_1(A)$, $A' = \varphi(A)$. Im Falle $a = b$ gilt $A = A'$ und φ ist die identische, also auch monoton wachsende Abbildung von $P(a)$. Es sei $a \neq b$. Dann ist $A \neq A'$ und es läßt sich z.B. $A < A'$ voraussetzen. Auf a gibt es einen Punkt B mit $\bar{B} \neq \bar{A}$ und $\bar{B} \neq \bar{A}'$ und nach (Z2) ergibt sich

$(ABA') \vee (AA'B) \vee (BAA')$. Es sei (ABA') (Abb. 2). (In den übrigen Fällen geht man analog vor.) Unserer Voraussetzung $A < A'$ nach gilt dann $A < B < A'$. Wird $h'' = L(B, h)$, $B'' = h'' \cap b$, $k'' = L(B'', k)$ und $B' = k'' \cap a$ gesetzt, dann $B'' = \varphi_1(B)$, $B' = \varphi(B)$ und wegen $\bar{h} \not\parallel \bar{k}$ gibt es einen einzigen Punkt C mit

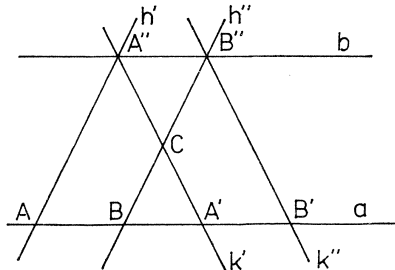


Abb. 2.

$C = k' \cap h''$. Durch die Parallelprojektionen $\psi_1(a, k', \Pi(h))$, $\psi_2(k', h'', \Pi(a))$, $\psi_3(h'', a, \Pi(k))$ erhalten wir $\psi_1(A) = A''$, $\psi_1(B) = C$, $\psi_1(A') = A'$ bzw. $\psi_2(A'') = B''$, $\psi_2(C) = C$, $\psi_2(A') = B$ bzw. $\psi_3(B'') = B'$, $\psi_3(C) = A'$, $\psi_3(B) = B$ und folglich $(A \cdot B \cdot A') \Rightarrow (A'' \cdot C \cdot A') \Rightarrow (B'' \cdot C \cdot B) \Rightarrow (B' \cdot A' \cdot B)$. Wegen $B < A'$ ergibt sich dann $B < A' < B'$, also $\varphi(A) < \varphi(B)$.

2. Gilt $\bar{h} \parallel \bar{k}$, dann wählen wir eine Richtung $\Pi(p)$ mit $\bar{p} \not\parallel \bar{h}$, $\bar{p} \not\parallel \bar{a}$ und betrachten eine Parallelprojektion $\psi(b, a, \Pi(p))$. Sind A, B zwei Punkte von a mit $A < B$, dann erhält man nach Teil 1 $\psi \varphi_1(A) < \psi \varphi_2(B)$ und $\varphi_2 \psi^{-1}(\psi \varphi_1(A)) < \varphi_2 \psi^{-1}(\psi \varphi_1(B))$, woraus $\varphi_2 \varphi_1(A) < \varphi_2 \varphi_1(B)$, also $\varphi(A) < \varphi(B)$ folgt.

Satz 7. Es sei $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ eine geordnete AK-Ebene. Für eine beliebige Gerade g von \mathcal{A} gibt es zwei Teilmengen H_g^+ , H_g^- von \mathcal{P} mit folgenden Eigenschaften:

(H1) $H_g^+ \cup H_g^- = \mathcal{P} \setminus P(g)$.

(H2) Ist $h \parallel g$, dann gilt $h = g \vee P(h) \subset H_g^+ \vee P(h) \subset H_g^-$.

(H3) Es sei h eine Gerade mit $\bar{h} \neq \bar{g}$ und seien X, Y, Z die Punkte von h mit $YI g$.

a) $X \in H_g^+ \wedge Z \in H_g^- \Rightarrow (X \cdot Y \cdot Z)$.

b) $(X \cdot Y \cdot Z) \wedge X \in H_g^\pm \Rightarrow Z \in H_g^\pm$.

Beweis. Es sei g eine Gerade. Nach Definition 6 und Bemerkung 8 führen wir in der Richtung $\Pi(g)$ eine Zwischenrelation ein und durch diese erklären wir eine Anordnung \leq auf $\Pi(g)$. Dann gilt $(abc) \Leftrightarrow a \leq b \leq c \vee c \leq b \leq a$ für $a, b, c \in \Pi(g)$. Wir beweisen, daß die Mengen $H_g^+ = \{A \mid g < L(A, g)\}$, $H_g^- = \{A \mid L(A, g) < g\}$ die Forderungen (H1) bis (H3) erfüllen.

Ad (H1) Es sei $A \in \mathcal{P} \setminus P(g)$, also $A \text{ non } I g$. Dann gilt $a = L(A, g) \neq g$ und mithin entweder $a < g$ oder $g < a$, also entweder $A \in H_g^+$ oder $A \in H_g^-$. Aus $A \in H_g^+ \cup H_g^-$ folgt umgekehrt $L(A, g) \neq g$ und $A \text{ non } I g$.

Ad (H2) Für eine beliebige Gerade $h \in \Pi(g)$ gilt $h = g$ oder $g < h$ oder $h < g$, was aber $h = g$ oder $P(h) \subset H_g^+$ oder $P(h) \subset H_g^-$ bedeutet.

Ad (H3) a) Wegen $X \in H_g^+ \wedge Z \in H_g^-$ gilt $g < L(X, g)$, $L(Z, g) < g$ und $L(Z, g) < g < L(X, g)$, woraus sich $(L(Z, g) \cdot g \cdot L(X, g))$ ergibt. Wegen $\bar{h} \not\parallel \bar{g}$ gilt dann nach Definition 6 $(X \cdot Y \cdot Z)$.

b) Aus $(X \cdot Y \cdot Z)$ ergibt sich $(L(X, g) \cdot g \cdot L(Z, g))$ und folglich ist entweder $L(X, g) < g < L(Z, g)$ oder $L(Z, g) < g < L(X, g)$. Ist $X \in H_g^+$, so gilt $g < L(X, g)$ und $L(Z, g) < g$, also $Z \in H_g^-$. Aus $X \in H_g^-$ folgt ähnlich $L(X, g) < g$, $g < L(Z, g)$, also $Z \in H_g^+$.

Definition 7. Die den Forderungen (H1)–(H3) genügende Mengen H_g^+ , H_g^- heißen durch die Gerade g bestimmte *Halbebenen*.

Satz 8. Sind a, b, c Geraden mit $b \parallel c$, $\bar{a} \not\parallel \bar{b}$, dann ist das Produkt $\varphi = \varphi_3 \varphi_2 \varphi_1$ der Parallelprojektionen $\varphi_1(a, b, \Pi(x))$, $\varphi_2(b, c, \Pi(h))$, $\varphi_3(c, a, \Pi(x))$ eine monoton wachsende Abbildung von $(P(a), \leq)$ auf sich.

Beweis. Es sei $(P(a), \leq)$ die durch die Zwischenrelation von a bestimmte geordnete Menge. Die Abbildung φ , als das Produkt von drei monotonen Abbildungen, ist selbst monoton. Es genügt also $A \leq B \Rightarrow \varphi(A) \leq \varphi(B)$ für zwei verschiedene Punkte A, B von a zu beweisen.

Im Falle $\Pi(x) = \Pi(h)$ ist φ die identische Abbildung von $P(a)$. Ferner nehmen wir an, daß $\Pi(x) \neq \Pi(h)$, also $x \not\parallel h$ gilt. Wegen $\bar{a} \not\parallel \bar{b}$ gibt es einen Punkt $O = a \cap b$ und für O erhalten wir $O = \varphi_1(O), \varphi_2(O) = L(O, h) \cap c = O'', \varphi_3(O'') = L(O'', x) \cap a$

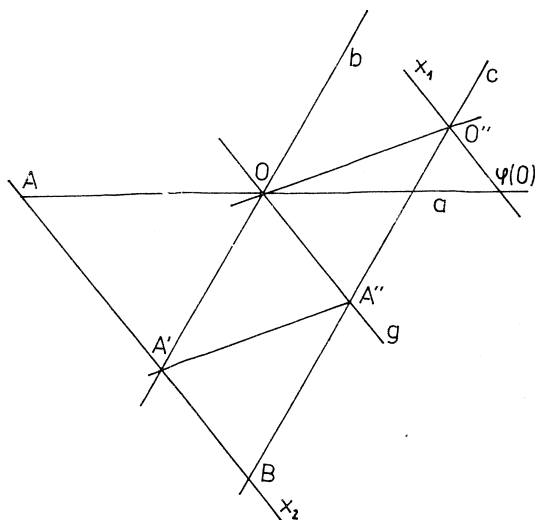


Abb. 3.

$\sqcap a = x_1 \sqcap a = \varphi(O)$ (Abb. 3). Erklären wir schrittweise die Punkte $A'' = L(O, x) \sqcap c = g \sqcap c$, $A' = L(A'', h) \sqcap b$, $A = L(A', x) \sqcap a = x_2 \sqcap a$, so $\varphi(A) = O$. Wir setzen $B = x_2 \sqcap c$ und betrachten die Parallelprojektionen $\psi_1(c, b, \Pi(x))$, $\psi_2(b, c, \Pi(h))$. Ist ψ das Produkt von ψ_1 und ψ_2 , so gilt $\psi(B) = A''$, $\psi(A'') = O''$, wobei $B \neq A''$ und $A'' \neq O''$ erfüllt ist. Wählen wir eine Anordnung \leq' von $P(c)$ mit $B \leq' A''$, dann ist $\psi(B) \leq' \psi(A)$ und folglich $A'' \leq O''$, denn ψ ist nach Satz 6 monoton wachsend. So gilt $B \leq A'' \leq O''$ und $(B \cdot A'' \cdot O'')$. Es seien H_g^+ , H_g^- die durch die Gerade g bestimmten Halbebenen mit $B \in H_g^+$. Aus $\bar{c} \neq \bar{g}$; O'' , A'' , $B \perp c$; $A'' \perp g$; $(B \cdot A'' \cdot O'')$ folgt dann nach (H3) b) $O'' \in H_g^-$ und nach der Definition von H_g^+ , H_g^- erhält man daraus $P(x_2) \subset H_g^+$, $P(x_1) \subset H_g^-$, also $A \in H_g^+$, $\varphi(O) \in H_g^-$. Wegen $\bar{a} \neq \bar{g}$ gilt daher nach (H3) a) $(A \cdot O \cdot \varphi(O))$. Aus $A \leq O$ folgt dann $A \leq O \leq \varphi(O)$, also $\varphi(A) \leq \varphi(O)$. Gilt $O \leq A$, dann ist $\varphi(O) \leq O \leq A$ und $\varphi(O) \leq \varphi(A)$. Die Abbildung φ ist also monoton wachsend.

Satz 9. Es seien A_1, A_2, A'_1, A'_2 Punkte einer Geraden a derart, daß A_1, A_2 fern sind. Sei \leq eine Anordnung von $P(a)$. Ist p eine Gerade mit $p \parallel a$, $\bar{p} \neq \bar{a}$ und sind S, S' zwei Punkte von p mit $SA_1 \parallel S'A'_1$, $SA_2 \parallel S'A'_2$, so gilt $A_1 \leq A_2 \Rightarrow A'_1 \leq A'_2$.

Beweis. Es sei $A_1 \leq A_2$. Wegen $\bar{A}_1 \neq \bar{A}_2$ ist $\overline{SA_1} \neq \overline{SA_2}$, $\overline{SA_1} \not\parallel \overline{SA_2}$ und $\varphi_1(a, SA_1, \Pi(SA_2))$, $\varphi_2(SA_1, S'A'_1, \Pi(a))$, $\varphi_3(S'A'_1, a, \Pi(SA_2))$ sind daher Parallel-

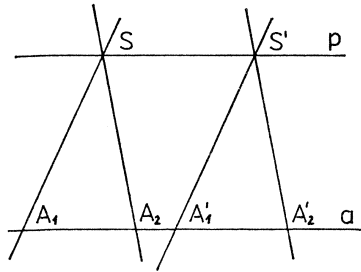


Abb. 4.

projektionen (Abb. 4). Wegen $SA_1 \parallel S'A'_1$, $\bar{a} \not\parallel \overline{SA_1}$ sind die Voraussetzungen von Satz 8 für $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ erfüllt und $\varphi = \varphi_3 \varphi_2 \varphi_1$ ist mithin monoton wachsend. Aus $\varphi(A_1) = A'_1$, $\varphi(A_2) = A'_2$, $A_1 \leq A_2$ folgt also $A'_1 \leq A'_2$.

3. KONVEX GEORDNETE AFFINE KLINGENBERGSCHE EBENEN

Definition 8. Die Teilmenge $F(P, p)$ der geordneten AK-Ebene ist konvex, wenn aus $X, Z \in F(P, p)$, $Y \perp p$ und (XYZ) stets $Y \in F(P, p)$ folgt. Die geordnete AK-Ebene heißt *konvex*, wenn $F(P, p)$ für jedes Paar (P, p) mit $P \perp p$ konvex ist.

Satz 10. Ist eine Teilmenge $F(P, p)$ der geordneten AK-Ebene \mathcal{A} konvex für ein Paar (P, p) mit $P \perp p$, dann ist \mathcal{A} konvex.

Beweis. Es sei \mathcal{A} eine geordnete AK-Ebene und sei $F(P, p)$ konvex. Wir beweisen, daß $F(Q, q)$ für ein beliebiges Paar (Q, q) mit $Q \perp q$ konvex ist.

1. Es sei $\bar{Q} \text{ non } \perp \bar{p}$. Dann ist $\bar{P} \neq \bar{Q}$ und $\bar{a} \neq \bar{p}$ mit $a = PQ$.

a) Sei $\bar{a} \neq \bar{q}$. Ferner seien X, Y, Z die Punkte von q mit $X, Z \in F(Q, q)$ und (XYZ) (Abb. 5). Setzen wir $a = PQ$, $x = L(X, a)$, $y = L(Y, a)$, $z = L(Z, a)$ und betrachten wir die Parallelprojektion $\varphi(q, p, \Pi(a))$, dann gilt $\varphi(X) = x \cap p = X'$,

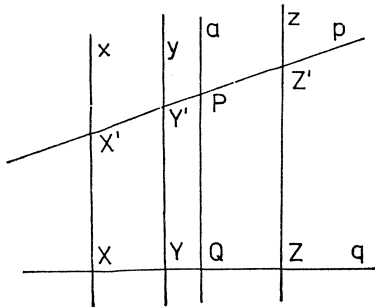


Abb. 5.

$\varphi(Y) = y \cap p = Y'$, $\varphi(Z) = z \cap p = Z'$ und folglich $(XYZ) \Rightarrow (X'Y'Z')$. Wegen $\bar{X} = \bar{Z} = \bar{Q}$ erhalten wir $\bar{X}' = \bar{Z}' = \bar{P}$, also $X', Z' \in F(P, p)$. Da $F(P, p)$ konvex ist, folgt wegen $Y' \perp p$ nach Definition 8 $Y' \in F(P, p)$, woraus sich aber $\bar{y} = \bar{a}$, $\bar{Y} = \bar{Q}$ und $Y \in F(Q, q)$ ergibt. Die Menge $F(Q, q)$ ist konvex.

b) Es sei $\bar{a} = \bar{q}$. Es gibt einen Punkt R mit $\bar{R} \text{ non } \perp \bar{p}$, $\bar{R} \text{ non } \perp \bar{q}$. Dann ist $\bar{R} \neq \bar{P}$, $\bar{R} \neq \bar{Q}$ und $\overline{RP} \neq \bar{p}$, $\overline{RQ} \neq \bar{q}$. Durch R läßt sich eine Gerade r mit $\bar{r} \neq \overline{RP}$, $\bar{r} \neq \overline{RQ}$ führen, woraus wegen $\bar{R} \neq \bar{Q}$ auch $\bar{Q} \text{ non } \perp \bar{r}$ folgt. Wegen $\bar{R} \text{ non } \perp \bar{p}$, $\overline{RP} \neq \bar{r}$ erhält man nach Teil 1, daß $F(R, r)$ konvex ist. Aus $\bar{Q} \text{ non } \perp \bar{r}$, $\overline{RQ} \neq \bar{r}$ folgt ähnlicherweise daß $F(Q, q)$ konvex ist.

2. Es sei $\bar{Q} \perp \bar{p}$. Wir wählen einen Punkt R mit $\bar{R} \text{ non } \perp \bar{p}$, $\bar{R} \text{ non } \perp \bar{q}$ und eine Gerade r durch R mit $\bar{r} \neq \overline{RP}$, $\bar{r} \neq \overline{RQ}$ und verfahren analog zu b).

Satz 11. Es sei eine geordnete AK-Ebene \mathcal{A} konvex. Sind A, B, C, A', B', C' solche Punkte der Geraden a von \mathcal{A} , daß A, B, C voneinander fern und A, A' bzw. B, B' bzw. C, C' benachbart sind, dann gilt $(ABC) \Rightarrow (A'B'C')$.

Beweis. Wir nehmen an, daß die Punkte A, B, C und A', B', C' den Forderungen unseres Satzes genügen.

1. Zunächst beweisen wir, daß $(ABC) \Rightarrow (ABC')$ gilt. Es sei also (ABC) . Nach (Z2) gilt $(AC'B) \vee (C'AB) \vee (ABC')$.

a) Sei $(AC'B)$. Nach (Z4) ergibt sich $(ABC) \Rightarrow (ABC') \vee (C'BC)$. Im Falle (ABC') gilt nach (Z3) $(AC'B) \wedge (ABC') \Rightarrow B = C'$ im Widerspruch zu $\bar{B} \neq \bar{C}'$. Wegen $\bar{C} = \bar{C}'$ folgt aus $(C'BC)$ auch $\bar{B} = \bar{C}$, weil \mathcal{A} konvex ist. Dieses ist wieder ein Widerspruch zu $\bar{B} \neq \bar{C}$.

b) Sei $(C'AB)$. Analog zu a) läßt sich zeigen, daß weder (ABC') noch $(C'BC)$ gelten können, was (Z4) widerspricht.

Nach (Z2) gilt (ABC') .

2. Wir beweisen die Inklusion $(ABC) \Rightarrow (AB'C)$.

a) Aus $(ABC) \wedge (ACB')$ folgt nach (Z5) (BCB') , woraus sich wegen $\bar{B} = \bar{B}'$ 'die Gleichheit $\bar{B} = \bar{C}$ ergibt, was ein Widerspruch ist.

b) Aus $(ABC) \wedge (CAB')$ folgt nach (Z1) und (Z5) die Gültigkeit von (BAB') , was wegen $\bar{B} \neq \bar{A}$ wieder ein Widerspruch ist.

Nach a), b) folgt wegen (Z2) $(AB'C)$.

Nach Bewiesenem erhält man $(ABC) \Rightarrow (ABC') \Rightarrow (AB'C') \Rightarrow (C'B'A) \Rightarrow (C'B'A') \Rightarrow (A'B'C')$, also unsere Behauptung.

Satz 12. *Ist eine geordnete AK-Ebene \mathcal{A} konvex, dann ist die zu \mathcal{A} gehörige affine Ebene \mathcal{A}' im Sinne von [4] geordnet.*

Beweis. Es sei \mathcal{A} konvex. Ist a eine Gerade von \mathcal{A} , dann definieren wir auf die Menge $P(\bar{a})$ eine Ternärrelation (***) durch die folgende Vorschrift: Für die Punkte $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C} \in \bar{a}$ gilt $(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$ genau dann, wenn es Punkte $P, Q, R \in a$ mit $\bar{P} = \bar{A}, \bar{Q} = \bar{B}, \bar{R} = \bar{C}$ und (PQR) gibt. Dieser Definition nach gilt $(XYZ) \Rightarrow (\bar{X}\bar{Y}\bar{Z})$ für $X, Y, Z \in a$. Sind \bar{A}, \bar{B} zwei Punkte von \bar{a} , dann gibt es zwei Punkte $P, Q \in a$ mit $\bar{P} = \bar{A}, \bar{Q} = \bar{B}$. Wegen (PPQ) ergibt sich dann $(\bar{A}\bar{A}\bar{B})$. Ganz ähnlich zeigt man auch $(\bar{A}\bar{B}\bar{B})$. Gilt $(\bar{A}\bar{B}\bar{A})$, dann gibt es auf a drei Punkte P, Q, R mit $\bar{P} = \bar{A}, \bar{Q} = \bar{B}, \bar{R} = \bar{A}$ und (PQR) . Da \mathcal{A} konvex ist, folgt aus $\bar{P} = \bar{R}$ auch $\bar{P} = \bar{Q}$, also $\bar{A} = \bar{B}$.

Es seien $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ die Punkte von \bar{a} mit $(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$. Dann gibt es Punkte $P, Q, R \in a$ mit $\bar{P} = \bar{A}, \bar{Q} = \bar{B}, \bar{R} = \bar{C}$ und (PQR) . Wir zeigen, daß $(\bar{X}\bar{Y}\bar{Z})$ auch für alle $X \in \in F(P, a), Y \in F(Q, a), Z \in F(R, a)$ gilt. Sind P, Q, R voneinander fern, dann ergibt sich nach Satz 11 $(PQR) \Rightarrow (XYZ)$, also $(\bar{X}\bar{Y}\bar{Z})$. Sind P, Q benachbart, dann ist $\bar{X} = \bar{Y}$ und nach dem Vorhergehenden ergibt sich $(\bar{X}\bar{X}\bar{Z}) \Rightarrow (\bar{X}\bar{Y}\bar{Z})$. Sind P, R benachbart, dann sind wegen (PQR) auch P, Q benachbart und folglich $\bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z}$. Dieses hat aber $(\bar{X}\bar{X}\bar{X}) \Rightarrow (\bar{X}\bar{Y}\bar{Z})$ zur Folge. Unsere Definition von (***) ist also von der Wahl der Punkte aus $F(P, a), F(Q, a), F(R, a)$ unabhängig. Es läßt sich leicht nachprüfen, daß (***) den Forderungen (Z1)–(Z4) genügt, d.h. (***) eine Zwischenrelation auf $P(\bar{a})$ ist. Es bleibt noch zu zeigen, daß die Zwischenrelationen auf den Geraden von \mathcal{A}' durch Parallelprojektionen reproduziert werden. Ist $\bar{\varphi}(\bar{g}, \bar{g}', \Pi(\bar{h}))$ eine Parallelprojektion in \mathcal{A}' , dann gibt es Geraden p, p', k von \mathcal{A} mit $\bar{p} = \bar{g}, \bar{p}' = \bar{g}', \bar{k} = \bar{h}$ und $\varphi(p, p', \Pi(k))$ ist eine Parallelprojektion in \mathcal{A} . Da φ die Zwischenrelationen in \mathcal{A} reproduziert und φ geht durch den Epimorphismus $\varkappa: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ in $\bar{\varphi}$ über, reproduziert $\bar{\varphi}$ die Zwischenrelationen in \mathcal{A}' .

Bemerkung 12. Durch die im Beweis von Satz 12 eingeführten Zwischenrelationen in \mathcal{A}' läßt sich für eine beliebige Gerade \bar{a} von \mathcal{A}' zwei inverse Anordnungen auf $P(\bar{a})$ erklären. Sind \leq und \leq' die durch die Zwischenrelationen auf a und \bar{a} erklärten Anordnungen von $P(a)$ und $P(\bar{a})$, dann ist wegen $(ABC) \Rightarrow (\bar{A}\bar{B}\bar{C})$ die Restriktion des Epimorphismus $\kappa : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ auf $P(a)$ eine monotone Abbildung von $(P(a), \leq)$ auf $(P(\bar{a}), \leq')$.

4. KONVEX GEORDNETE KLINGENBERGSCH E EBENEN UND AFFINE LOKALE TERNÄRRINGE

Es sei $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ eine AK-Ebene. Ein Tripel (x, y, E) , wo x, y die Geraden mit $\bar{x} \parallel \bar{y}$ und E ein Punkt mit \bar{E} non $I\bar{x}, \bar{y}$ sind, heißt ein *Koordinatensystem* von \mathcal{A} . Wir setzen $O = x \cap y$, $e = OE$, $R = P(e)$, $R_0 = \{X \in R \mid \bar{X} = \bar{O}\}$, $e' = L(E, y)$ und $e'' = L(E, x)$. Ferner definieren wir die Abbildungen $\xi : R \times R \rightarrow \mathcal{P}$, $\eta : R \times R \rightarrow L$, $\zeta : R_0 \times R \rightarrow \mathcal{L}$ durch

$$(K1) \text{ Ist } (X, Y) \in R \times R, \text{ dann } (X, Y)^\xi = L(X, y) \cap L(Y, x).$$

$$(K2) \text{ Ist } (M, K) \in R \times R, \text{ dann } N = L(M, x) \cap e', \quad Q = L(K, x) \cap y, \quad p = L(Q, ON) \text{ und } p = (M, K)^\eta.$$

$$(K3) \text{ Ist } (M, K) \in R_0 \times R, \text{ dann } N = L(M, y) \cap e'', \quad Q = L(K, y) \cap x, \quad p = L(Q, ON) \text{ und } p = (M, K)^\xi.$$

ξ ist eine bijektive Abbildung der Menge $R \times R$ auf \mathcal{P} , η ist eine bijektive Abbildung der Menge $R \times R$ auf die Menge $\{p \in \mathcal{L} \mid \bar{p} \parallel \bar{y}\}$ und ζ ist eine bijektive Abbildung der Menge $R_0 \times R$ auf die Menge $\{p \in \mathcal{L} \mid \bar{p} \parallel \bar{y}\}$ [3]. Im folgenden setzen wir $(X, Y)^\xi = [X, Y] \forall (X, Y) \in R \times R$, $(M, K)^\eta = \langle M, K \rangle \forall (M, K) \in R \times R$ und $(M, K)^\xi = \ll M, K \gg \forall (M, K) \in R_0 \times R$. Wir definieren auf der Menge R die Ternäroperationen t, t_1 durch

$$Y = t(X, M, K) \Leftrightarrow [X, Y] I \langle M, K \rangle,$$

$$X = t_1(Y, M, K) \Leftrightarrow [X, Y] I \ll M, K \gg.$$

(Das Tripel $\mathcal{T} = (R, t, t_1)$ bildet eine algebraische Ternärstruktur, die ein affiner lokaler Ternärring heißt [3].)

Nach (K3) und (K1) gilt die folgende Behauptung (K):

$$(K) \quad t_1(O, M, K) = K \quad \forall (M, K) \in R_0 \times R.$$

Ferner sei \mathcal{A} geordnet. Nach Bemerkung 9 sind auf der Menge $R = P(e)$ zwei voneinander inverse Anordnungen bestimmt. Wir wählen die Anordnung \leq von R mit $O \leq E$. Die Parallelprojektion $\psi(e, p, \Pi(y))$ ist nach Satz 4 monoton für jede Gerade p mit $\bar{p} \parallel \bar{y}$ und nach (K1), (K2) gilt dabei $\psi(X) = [X, Y]$ für jeden Punkt $[X, Y] I p$. Ferner nehmen wir ψ stets als monoton wachsend an. Damit wählen wir auf jeder Menge $P(p)$ mit $\bar{p} \parallel \bar{y}$ eine Anordnung \leq mit $P_1 \leq P_2 \Leftrightarrow X_1 \leq X_2$ für beliebige $P_1, P_2 I p$ mit $P_1 = [X_1, Y_1]$, $P_2 = [X_2, Y_2]$ (Die Anordnungen von R

und $P(p)$ bezeichnen wir mit dem gleichen Symbol \leq). Ähnlich wählen wir auf jeder Menge $P(q)$ mit $\bar{q} \parallel \bar{y}$ eine Anordnung \leq mit $Q_1 \leq Q_2 \Leftrightarrow Y_1 \leq Y_2$ für beliebige $Q_1, Q_2 \perp q$, wo $Q_1 = [X_1, Y_1]$, $Q_2 = [X_2, Y_2]$.

In den Sätzen 13 bis 17 werden einige Eigenschaften der Ternäroperationen t , t_1 angeführt, die durch die Anordnung \leq von R induziert sind. Diese Eigenschaften werden zur Definition der angeordneten affinen lokalen Ternärringe benutzt.

Satz 13. Sind V, V' aus R mit $V \leq V'$, dann gilt $t(A, U, V) \leq t(A, U, V')$ für alle $A, U \in R$.

Beweis. Es seien $A, U \in R$. Wir bezeichnen $a = L(A, y)$, $N = L(U, x) \cap e'$ und $h = ON$ (Abb. 6). Wegen $\bar{a} \parallel \bar{h}$, $\bar{h} \parallel \bar{y}$ sind $\varphi_1(e, y, \Pi(x))$, $\varphi_2(y, a, \Pi(h))$ und $\varphi_3(a, e, \Pi(x))$ Parallelprojektionen und wegen $a \parallel y$, $\bar{e} \parallel \bar{y}$ erfüllen sie die Forderungen von Satz 8. Mithin ist die Abbildung $\varphi = \varphi_3\varphi_2\varphi_1$ monoton wachsend. Da

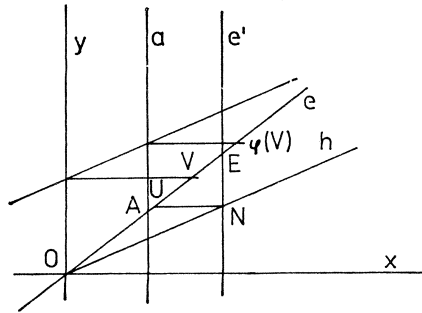


Abb. 6.

wegen (K1) und (K2) $\varphi(V) = t(A, U, V)$ für jeden Punkt V aus R gilt, erhalten wir $V \leq V' \Rightarrow \varphi(V) \leq \varphi(V') \Rightarrow t(A, U, V) \leq t(A, U, V')$.

Satz 14. Sind V, V' aus R mit $V \leq V'$, dann gilt $t_1(A, U, V) \leq t_1(A, U, V')$ für alle $A \in R$, $U \in R_0$.

Beweis. Es seien $A \in R$, $U \in R_0$. Wir bezeichnen $a = L(A, x)$, $N = L(U, y) \cap e''$, $h = ON$ (Abb. 7). Wegen $a \parallel x$, $\bar{e} \parallel \bar{x}$ erfüllen die Parallelprojektionen $\varphi_1(e, x, \Pi(y))$, $\varphi_2(x, a, \Pi(h))$, $\varphi_3(a, e, \Pi(y))$ die Forderungen von Satz 8 und deshalb ist $\varphi = \varphi_3\varphi_2\varphi_1$ monoton wachsend. Da wegen (K1) und (K3) $\varphi(V) = t_1(A, U, V)$ für jeden Punkt V aus R gilt, erhalten wir $V \leq V' \Rightarrow \varphi(V) \leq \varphi(V') \Rightarrow t_1(A, U, V) \leq t_1(A, U, V')$.

Satz 15. Es seien $U, U_0, V_1, V_2, V_0, X_1, X_2$ aus R mit $\bar{U} \neq \bar{U}_0$ und $t(X_1, U, V_1) = t(X_1, U_0, V_0)$, $t(X_2, U, V_2) = t(X_2, U_0, V_0)$. Aus $U \leq U_0$ bzw. $U_0 \leq U$ folgt $X_1 \leq X_2 \Leftrightarrow V_1 \leq V_2$ bzw. $X_1 \leq X_2 \Leftrightarrow V_2 \leq V_1$.

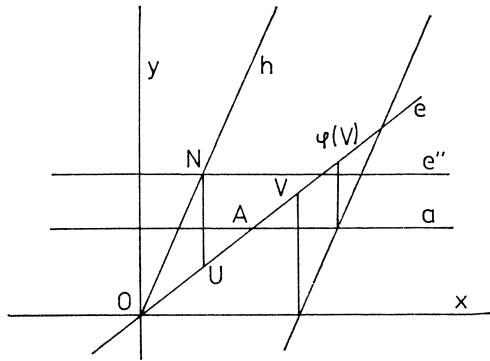


Abb. 7.

Beweis. 1. Es sei $U \leq U_0$. Wir setzen $N = L(U, x) \cap e'$, $N_0 = L(U_0, x) \cap e'$, $h = ON$ und betrachten die Parallelprojektionen $\varphi_1(e, e', \Pi(x))$, $\varphi_2(e', y, \Pi(h))$, $\varphi_3(y, e, \Pi(x))$, wo $y \parallel e'$, $e' \not\parallel \bar{e}$ ist (Abb. 8). Nach Satz 8 ist $\varphi = \varphi_3 \varphi_2 \varphi_1$ monoton wachsend. Setzen wir $A = L(N_0, h) \cap y$, $A_1 = L(A, x) \cap e$, dann ist $A_1 = \varphi(U_0)$.

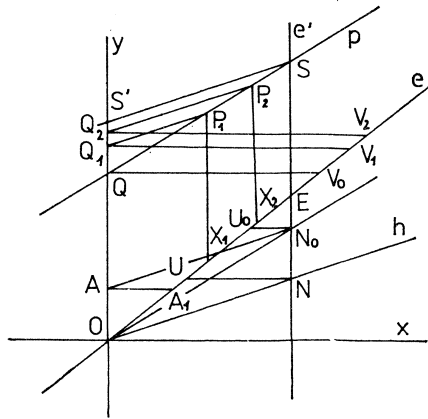


Abb. 8.

Wegen $\varphi(U) = O$ erhalten wir also $U \leq U_0 \Rightarrow \varphi(U) \leq \varphi(U_0) \Rightarrow O \leq A_1$. Unserer Verabredung von der Anordnung der Menge $P(y)$ nach gilt wegen $O = [O, O]$, $A = [O, A_1]$ und $O \leq A_1$ die Ungleichheit $O \leq A$. Aus $\bar{U} \neq \bar{U}_0$ folgt dabei $\bar{N} \neq \bar{N}_0$, $\bar{h} \neq \bar{ON}_0$, $\bar{ON}_0 \neq \bar{AN}_0$ und $\bar{O} \neq \bar{A}$. Wir setzen $Q = L(V_0, x) \cap y$, $p = L(Q, ON_0)$, $S = p \cap e'$, $S' = L(S, h) \cap y$. Wegen $y \parallel e'$, $\bar{y} \neq \bar{e}'$, $\bar{O} \neq \bar{A}$, $ON_0 \parallel QS$, $AN_0 \parallel SS'$ erhält man aus Satz 9 $O \leq A \Rightarrow Q \leq S'$ und wegen $\bar{p} \not\parallel \bar{h}$ ist $\psi(p, y, \Pi(h))$ eine Parallelprojektion mit $\psi(Q) = Q$, $\psi(S) = S'$. Da $Q = [O, Y_1]$ und $S = [E, Y_2]$ ist,

gilt wegen $O \leq E$ die Ungleichheit $Q \leq S$ in der Anordnung \leq von $P(p)$. Wegen $Q \leq S'$ ergibt sich dann $\psi(Q) \leq \psi(S')$ und daher ist ψ monoton wachsend. Wir setzen weiter $P_1 = L(X_1, y) \cap p$, $P_2 = L(X_2, y) \cap p$, $Q_1 = L(V_1, x) \cap y$, $Q_2 = L(V_2, x) \cap y$. Nach (K1), (K2) und wegen $t(X_1, U, V_1) = t(X_1, U_0, V_0)$, $t(X_2, U, V_2) = t(X_2, U_0, V_0)$ liegen die Punkte Q_1, P_1 bzw. Q_2, P_2 auf einer zu h parallelen Geraden. Ist $X_1 \leq X_2$, dann ist $P_1 \leq P_2$ in der Anordnung von $P(p)$ und wegen $Q_1 = \psi(P_1)$, $Q_2 = \psi(P_2)$ gilt $Q_1 \leq Q_2$ in der Anordnung von $P(y)$. Wegen $Q_1 = [O, V_1]$, $Q_2 = [O, V_2]$ ergibt sich dann $V_1 \leq V_2$. In der umgekehrten Richtung gilt $V_1 \leq V_2 \Rightarrow Q_1 \leq Q_2 \Rightarrow P_1 \leq P_2 \Rightarrow X_1 \leq X_2$.

2. Es sei $U_0 \leq U$. Nach dem Verfahren von Teil 1 erhält man $U_0 \leq U \Rightarrow A \leq \leq O \Rightarrow S' \leq Q$ und die Abbildung $\psi(p, y, \Pi(h))$ ist monoton fallend. Daraus folgt $X_1 \leq X_2 \Leftrightarrow P_1 \leq P_2 \Leftrightarrow Q_2 \leq Q_1 \Leftrightarrow V_2 \leq V_1$.

Satz 16. Es seien $U_0, V_0, V_1, V_2, X_1, X_2, Y_1, Y_2$ aus R und U aus R_0 mit $Y_1 = t(X_1, U_0, V_0)$, $Y_2 = t(X_2, U_0, V_0)$, $X_1 = t_1(Y_1, U, V_1)$, $X_2 = t_1(Y_2, U, V_2)$. Ist \mathcal{A} konvex, dann gilt $X_1 \leq X_2 \Leftrightarrow V_1 \leq V_2$.

Beweis. Setzen wir $p = \langle U_0, V_0 \rangle$, $q_1 = \langle U, V_1 \rangle$, $q_2 = \langle U, V_2 \rangle$, $P_1 = [X_1, Y_1]$, $P_2 = [X_2, Y_2]$, dann gilt nach unseren Voraussetzungen $P_1, P_2 \perp p$, $P_1 \perp q_1$ und $P_2 \perp q_2$ (Abb. 9). Nach (K2) und (K3) ist dabei $\bar{q}_1 \parallel \bar{y}$, $\bar{q}_2 \parallel \bar{y}$, $\bar{p} \not\parallel \bar{y}$. Die Schnitt-

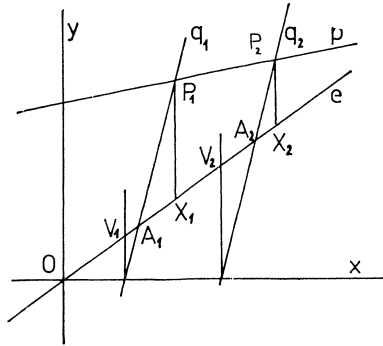


Abb. 9.

punkte von q_1, e und q_2, e bezeichnen wir mit A_1 und A_2 . Zunächst zeigen wir, daß das Produkt φ der Parallelprojektionen $\varphi_1(e, p, \Pi(y))$ und $\varphi_2(p, e, \Pi(q_1))$ monoton wachsend ist: Wegen $\bar{y} \parallel \bar{q}_1$ gilt $\varphi(O) = \bar{O}$, $\varphi(E) = \bar{E}$. Da \mathcal{A} konvex ist, können nach Bemerkung 12 auf der Geraden \bar{e} von \mathcal{A}' zwei inverse Anordnungen erklärt werden und die Restriktion \varkappa' von $\varkappa : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ auf $P(e)$ ist eine monotone Abbildung von $(P(a), \leq)$ auf $(P(\bar{a}), \leq)$. Wählen wir eine Anordnung \leq von $P(\bar{a})$ mit $\bar{O} < \bar{E}$, dann ist \varkappa' wegen $O \leq E$ eine monoton wachsende Abbildung. Nehmen wir $\varphi(E) \leq \varphi(O)$ an, dann ist $\overline{\varphi(E)} \leq \overline{\varphi(O)}$ und $\bar{E} \leq \bar{O}$, was ein Widerspruch zu $\bar{O} \leq \bar{E}$ ist. Somit gilt $\varphi(O) \leq \varphi(E)$ und wegen $O \leq E$ ist φ monoton wachsend.

Ganz analog ist das Produkt ψ der Parallelprojektionen $\psi_1(e, x, \Pi(q_1)), \psi_2(x, e, \Pi(y))$ monoton wachsend. Gilt $X_1 \leq X_2$, so ergibt sich $\varphi(X_1) = A_1 \leq \varphi(X_2) = A_2$ und $\psi(A_1) \leq \psi(A_2)$. Da nach (K3) $V_1 = \psi(A_1)$ und $V_2 = \psi(A_2)$ gilt, erhalten wir $X_1 \leq X_2 \Rightarrow A_1 \leq A_2 \Rightarrow V_1 \leq V_2$. Unter Anwendung von ψ^{-1} und φ^{-1} erhält man umgekehrt $V_1 \leq V_2 \Rightarrow A_1 \leq A_2 \Rightarrow X_1 \leq X_2$.

Satz 17. Es seien $X_1, X_2, Y_1, Y_2, U, V_1, V_2, V_0$ aus R und U_0 aus R_0 mit $X_1 = t_1(Y_1, U_0, V_0)$, $X_2 = t_1(Y_2, U_0, V_0)$, $Y_1 = t(X_1, U, V_1)$, $Y_2 = t(X_2, U, V_2)$. Ist \mathcal{A} konvex, dann gilt $Y_1 \leq Y_2 \Leftrightarrow V_1 \leq V_2$.

Beweis. Setzen wir $p = \langle U_0, V_0 \rangle$, $q_1 = \langle U, V_1 \rangle$, $q_2 = \langle U, V_2 \rangle$, $P_1 = [X_1, Y_1]$, $P_2 = [X_2, Y_2]$, dann $P_1, P_2 \perp p$; $P_1 \perp q_1$; $P_2 \perp q_2$ (Abb. 10). Nach (K2) und (K3) gilt dabei $\bar{p} \parallel \bar{y}, \bar{q}_1 \not\parallel \bar{y}, \bar{q}_2 \not\parallel \bar{y}$. Das Produkt φ der Parallelprojektionen $\varphi_1(e, p, \Pi(x))$,

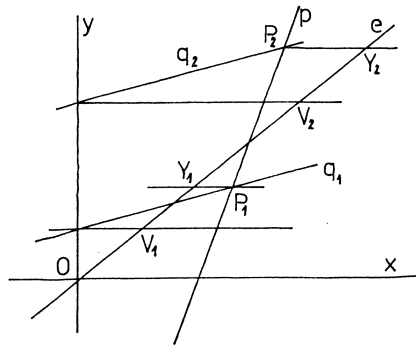


Abb. 10.

$\varphi_2(p, y, \Pi(q_1)), \varphi_3(y, e, \Pi(x))$ ist monoton. Wir beweisen, daß φ monoton wachsend ist: Dazu genügt es zu zeigen, daß $\varphi(O) \leq \varphi(E)$ gilt. Nach Satz 12 ist die zu \mathcal{A} gehörige affine Ebene \mathcal{A}' geordnet. Betrachten wir die Parallelprojektionen $\bar{\varphi}_1(\bar{e}, \bar{p}, \Pi(\bar{x}))$, $\bar{\varphi}_2(\bar{p}, \bar{y}, \Pi(\bar{q}_1))$ und $\bar{\varphi}_3(\bar{y}, \bar{e}, \Pi(\bar{x}))$ in \mathcal{A}' , dann ist nach Satz 8 $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_3 \bar{\varphi}_2 \bar{\varphi}_1$ monoton wachsend, denn $\bar{p} \parallel \bar{y}, \bar{e} \not\parallel \bar{p}$. Dabei gilt $\overline{\varphi(O)} = \overline{\varphi(O)}$, $\overline{\varphi(E)} = \overline{\varphi(E)}$ und $\overline{\varphi(O)} \neq \overline{\varphi(E)}$. Nach Bemerkung 12 ist die Restriktion κ' des Epimorphismus $\kappa: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ auf $P(e)$ eine monotone Abbildung. Zuerst nehmen wir an, daß in der Anordnung \leq von $P(\bar{e})$ $\bar{O} \leq \bar{E}$ gilt. Wegen $O \leq E$ ist dann κ' monoton wachsend. Da auch $\bar{\varphi}$ monoton wachsend ist, gilt $\bar{O} \leq \bar{E} \Rightarrow \overline{\varphi(O)} \leq \overline{\varphi(E)}$. Ist $\varphi(E) \leq \varphi(O)$, dann ist $\overline{\varphi(E)} \leq \overline{\varphi(O)}$ und $\overline{\varphi(E)} \leq \overline{\varphi(O)}$, was ein Widerspruch zu $\overline{\varphi(O)} \leq \overline{\varphi(E)}$ und $\overline{\varphi(O)} \neq \overline{\varphi(E)}$ ist. Es gilt also $\varphi(O) \leq \varphi(E)$. Es sei $\bar{E} \leq \bar{O}$. Dann ist κ' monoton fallend. Da φ monoton wachsend ist, gilt $\bar{E} \leq \bar{O} \Rightarrow \overline{\varphi(E)} \leq \overline{\varphi(O)}$. Ist $\varphi(E) \leq \varphi(O)$, dann gilt $\overline{\varphi(O)} \leq \overline{\varphi(E)}$ und $\overline{\varphi(O)} \leq \overline{\varphi(E)}$, was ein Widerspruch zu $\overline{\varphi(E)} \leq \overline{\varphi(O)}$ ist. Es gilt also wieder $\varphi(O) \leq \varphi(E)$ und φ ist monoton wachsend. Da nach (K1), (K2), (K3) sich $V_1 = \varphi(Y_1)$, $V_2 = \varphi(Y_2)$ ergibt und φ monoton wachsend ist, gilt $Y_1 \leq Y_2 \Leftrightarrow V_1 \leq V_2$.

Literatur

- [1] *Dembowski, P.*: Finite Geometrie, New York 1968.
- [2] *Kunze, M.*: Angeordnete Hjelmslevsche Geometrie. Dissertation, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel 1975.
- [3] *Machala, F.*: Koordinatisation affiner Ebenen mit Homomorphismus. Math. Slovaca, 27, 1977, No. 2, 181—193.
- [4] *Pickert, G.*: Projektive Ebenen. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York 1975.

Anschrift des Verfassers: 771 46 Olomouc, Leninova 26 (Přírodovědecká fakulta UP).