Czechoslovak Mathematical Journal

František Machala

Koordinatisation projektiver Ebenen mit Homomorphismus

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 27 (1977), No. 4, 573–590

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/101495`

Czechoslovak Mathematical Journal, 27 (102) 1977, Praha

KOORDINATISATION PROJEKTIVER EBENEN MIT HOMOMORPHISMUS

FRANTIŠEK MACHALA, Olomouc

(Eingegangen am 1. September 1975)

Der Autor definierte in [5] lokale Ternärringe, H-Ternärringe und ihre Erweiterungen. Im vorliegenden Artikel wird gezeigt, daß sich diese Strukturen zur Koordinatisation projektiver Ebenen mit Homomorphismus [4] eventuell projektiver H-Ebenen [3] verwenden lassen.

Im ersten Teil wird die Koordinatisation projektiver Ebenen durch erweiterte Ternärkorper durchgeführt ([5], Definition 11). Die Inzidenz von Punkten und Geraden wird hier ausschließlich durch die Ternäroperation dargestellt ohne Verwendung der traditionellen Verfahrungstechnik aus der affinen Geometrie [6], [7]. Die Anwendung der erweiterten Ternärkörper zur Koordinatisation projektiver Ebenen ermöglicht dann nachfolgende Verallgemeinerungen. Im zweiten Teil wird auf der Menge Q aller Punkte von beliebigen Geraden der projektiven Ebenen mit Homomorhismus die partielle Ternäroperation t derart eingeführt, daß $T = (R, R', t)$ ein erweiterter lokaler Ternärring ist, wo R, R' eine gewisse Zerlegung der Menge Q bildet. Insbesondere läßt sich dann mittels einer beliebigen Geraden der projektiven H-Ebene ein erweiterter H-Ternärring kanonisch zuordnen. Im dritten Teil wird durch einen erweiterten lokalen Ternärring $T = (R, R', t)$ eine projektive Ebene mit Homomorphismus kanonisch bestimmt. Ihre Punkte und Geraden werden durch geordnete Elementepaare aus T, die Inzidenz bei Anwendung der Operation t definiert. Im Sonderfall läßt sich dann durch einen erweiterten H-Ternärring in ähnlicher Weise eine projektive H-Ebene gewinnen.

Erweiterte lokale Ternärringe bieten den algebraischen Apparat zum eingehenderen Studium projektiver Ebenen mit Homomorphismus und ihrer Spezialfälle. Der Hierarchie: projektive Ebene mit Homomorphismus → projektive H-Ebene → projektive Ebene entsprechen algebraisch nacheinander: erweiterter lokaler Ternärring → erweiterter H-Ternärring → erweiterter Ternärkorper, lokaler Ternärring → → H-Ternärring → Ternärkörper und lokaler Ring → H-Ring → Körper.

In [2] sind die projektiven H-Ebenen durch PH-Ternäre, d. h. durch gewisse algebraische Strukturen mit drei ternären Operationen koordinatisiert. Die Fragen der Koordinatisation projektiver und affiner H-Ebenen wurden ausführlicher und näher in [1] untersucht. Es wird jedoch gezeigt, daß die in [1] und [2] untersuchten Probleme ein Teil der allgemeineren Theorie sind, die ein tieferes Eindringen in die betrachtete Problematik ermöglicht.

Definition 1. Eine *Inzidenzstruktur* $\mathscr{I}$ ist ein Tripel (B, L, I) von Mengen, wo $B \cap L = \emptyset$ und $\mathrm{I} \subset B \times L$. Die Elemente $a \in B$ heißen Punkte, $p \in L$ Geraden und I heißt Inzidenzrelation. Für $(a, p) \in \mathrm{I}$ schreiben wir $a \mathrm{I} p$, im Gegenteil a non I p und man sagt darüber: Der Punkt a liegt (liegt nicht) auf der Geraden p, die Gerade p geht (geht nicht) durch a usw.

Definition 2. Seien $\mathscr{I} = (B, L, \mathrm{I})$, $\mathscr{I}' = (B', L', \mathrm{I}')$ Inzidenzstrukturen. Die Abbildung $\varkappa : B \cup L \rightarrow B' \cup L'$ (kurz $\varkappa : \mathscr{I} \rightarrow \mathscr{I}'$) heißt ein *Homomorphismus*, wenn gilt:

(1) $B\varkappa \subset B'$, $L\varkappa \subset L'$,

(2) $a \mathrm{I} p \Rightarrow a\varkappa \mathrm{I}' p\varkappa$.

Der Homomorphismus $\varkappa : \mathscr{I} \rightarrow \mathscr{I}'$ heißt ein *Epimorphismus*, falls $B\varkappa = B'$, $L\varkappa' = L'$ gilt.

Definition 3. Die Inzidenzstruktur $\pi = (B, L, \mathrm{I})$ heißt eine *projektive Ebene*, falls gilt:

(1) $x, y \in B,\ x \neq y \Rightarrow \exists!\ p \in L;\ x, y \mathrm{I} p$.

(2) $x, y \in L,\ x \neq y \Rightarrow \exists!\ p \in B;\ p \mathrm{I} x, y$.

(3) Es existieren vier Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen.

Definition 4. Eine *projektive Ebene mit Homomorphismus* ist als ein Tripel $(\pi, \pi', \varkappa)$ definiert, wo $\pi = (B, L, \mathrm{I})$ eine Inzidenzstruktur, π' eine projektive Ebene und $\varkappa : \pi \rightarrow \pi'$ ein Epimorphismus sind, wobei gilt

(1) $x, y \in B,\ x\varkappa \neq y\varkappa \Rightarrow \exists!\ p \in L;\ x, y \mathrm{I} p$,

(2) $x, y \in L,\ x\varkappa \neq y\varkappa \Rightarrow \exists!\ p \in B;\ p \mathrm{I} x, y$.

Bemerkung 1. Unter einer projektiven Ebene mit Homomorphismus werden wir weiter die Inzidenzstruktur π aus der Definition 4 verstehen. Die einzige Gerade, die nach (1) durch die Punkte x, y bestimmt ist, werden wir mit $p = xy$ bezeichnen und mit $p = x \sqcap y$ werden wir den nach (2) durch die Geraden x, y bestimmten einzigen Punkt p bezeichnen.

Definition 5. Eine projektive Ebene $\pi = (B, L, \mathrm{I})$ mit Homomorphismus heißt eine *projektive H-Ebene*, falls folgendes gilt:

(1) Zu je zwei Punkten $x, y \in B$ mit $x\varkappa = y\varkappa$ gibt es mindestens zwei verschiedene Geraden, von denen jede durch beide Punkte x, y geht.

(2) Jede zwei Geraden $x, y \in L$ mit $x\varkappa = y\varkappa$ besitzen mindestens zwei verschiedene gemeinsame Punkte.

Gegenstand des folgenden Abschnittes ist die Koordinatisation der projektiven Ebenen mit Hilfe von erweiterten Ternärkörpern [5]. Sei $\pi = (B, L, \mathrm{I})$ eine projektive Ebene und o, u, v, e Punkte aus B, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Bezeichnen wir nacheinander $Q = \{x \in B \mid x \,\mathrm{I}\, ou\}$, $R = Q \setminus \{u\}$, $Q_1 = \{(a, b) \in Q \times Q \mid b = u \Rightarrow a = u\}$, $Q_2 = \{(a, b) \in Q \times Q \mid a = u \Rightarrow b = u\}$. Definieren wir eine Abbildung $\xi' : Q_1 \to B$ durch folgende Vorschriften E_1 bis E_3:

E_1. Für jedes Paar $(x, y) \in R \times R$ bezeichnen wir $w = yv \sqcap oe$, $s = xv \sqcap uw$ (Abb. 1). Dann gilt s non $\mathrm{I}\, uv$ und wir setzen $s = (x, y)^{\xi'}$.

E_2. Für jedes Paar (u, y) mit $y \in R$ bezeichnen wir $n = yv \sqcap oe$, $n' = nu \sqcap ve$, $s = on' \sqcap uv$ (Abb. 2). Dann gilt $s \neq v$ und wir setzen $s = (u, y)^{\xi'}$.

E_3. Es sei $(u, u)^{\xi'} = v$.

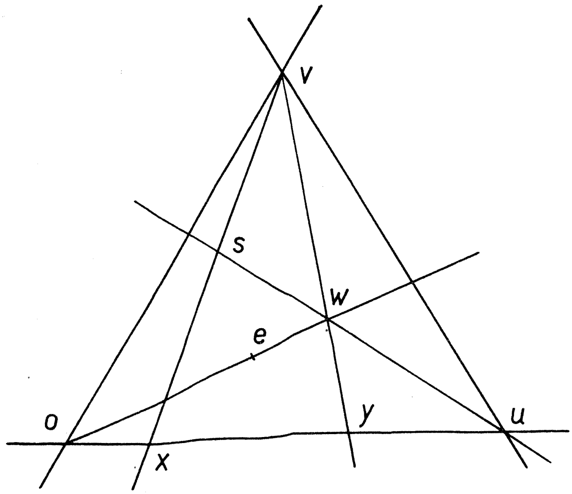

Abb. 1.

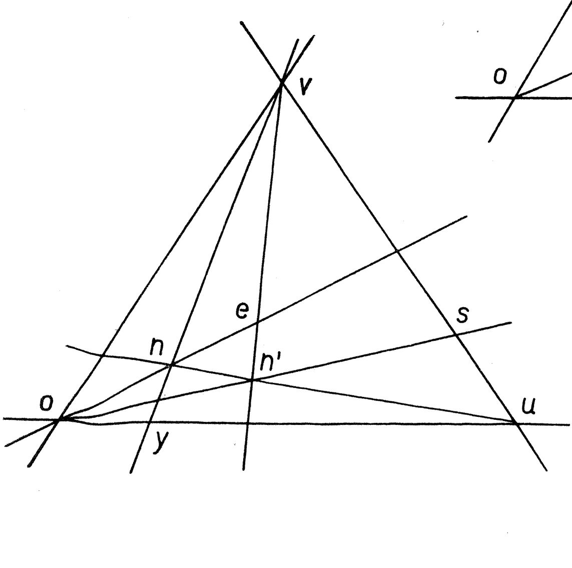

Abb. 2.

Für jeden Punkt $s \in B$ führen wir nun folgende Betrachtung durch:

a) Ist s non I uv, so setzen wir $x = vs \sqcap ou$, $w = su \sqcap oe$, $y = vw \sqcap ou$, woraus $x, y \in R$ und $s = (x, y)^{\xi'}$ folgt.

b) Es sei $s \mathrm{I} uv$ mit $s \neq v$ und setzen wir $n' = os \sqcap ev$, $n = un' \sqcap oe$, $y = vn \sqcap ou$. Daraus folgt $y \in R$ und $s = (u, y)^{\xi'}$. Also ist die Abbildung ξ' eine bijektive Abbildung der Menge Q_1 auf B.

Definieren wir weiter eine Abbildung $\eta' : Q_2 \to L$ durch die Vorschriften $\mathrm{E}'_1 - \mathrm{E}'_3$:

E'_1. Für jedes Paar $(m, k) \in R \times R$ bezeichnen wir $n = mv \sqcap oe$, $n' = nu \sqcap ve$, $p = on' \sqcap uv$, $z = kv \sqcap oe$, $q = uz \sqcap ov$ (Abb. 3). Dabei gilt $p \neq v$, $q \neq v$ und wir setzen $r = pq = (m, k)^{\eta'}$.

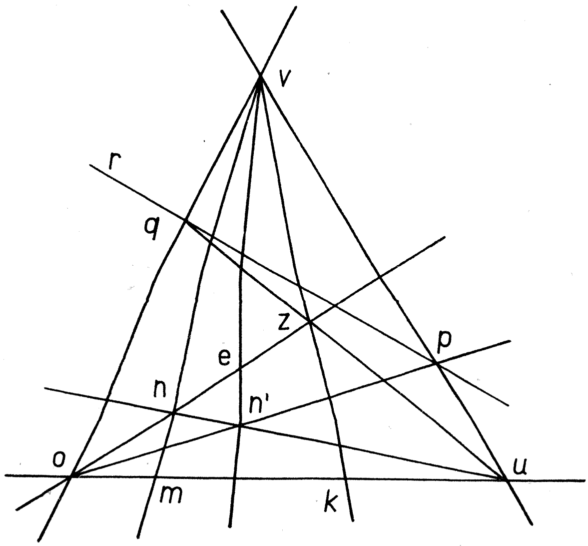

Abb. 3.

E'_2. Für jedes Paar (m, u) mit $m \in R$ bezeichnen wir $r = mv$ und setzen $r = (m, u)^{\eta'}$.

E'_3. Es sei $(u, u)^{\eta'} = uv$.

Wir zeigen, daß η' eine bijektive Abbildung der Menge Q_2 auf L ist:

a) Ist r eine Gerade mit $r \neq uv$, v non I r, so kann man $p = r \sqcap uv$, $q = r \sqcap ov$ setzen und mit dem zu E'_1 umgekehrten Verfahren Punkte m, k konstruieren. Daraus erhält man dann $r = (m, k)^{\eta'}$.

b) Ist r eine Gerade mit $r \neq uv$, $v \mathrm{I} r$, so gilt $r = (m, u)^{\eta'}$, wo $m = r \sqcap ou$.

Weiter wird $(x, y)^{\xi'} = [x, y]$ $\forall (x, y) \in Q_1$ und $(m, k)^{\eta'} = \langle m, k \rangle$ $\forall (m, k) \in Q_2$ gesetzt. Bezeichnen wir $Q' = \{(a, b, c) \in Q \times Q \times Q \mid b = u \Rightarrow c = u\}$ und definieren wir t durch

1. Ist $(x, m, k) \in Q'$, $k \neq u$, so gilt $y = t(x, m, k) \Leftrightarrow [x, y] \mathrm{I} \langle m, k \rangle$.
2. $x = t(y, m, u) \Leftrightarrow [x, y] \mathrm{I} \langle m, u \rangle$.

Es läßt sich leicht nachprüfen, daß t eine Abbildung von Q' in Q ist.

Satz 1. *Das Tripel $T = (R, u, t)$, wo t aus der vorigen Definition ist, bildet einen erweiterten Ternärkörper.*

Beweis. Wir beweisen die Gültigkeit von 11.1 bis 11.4 aus Definition 11, [5].

ad 11.1. $\mathcal{T} = (R, t \mid R)$ ist ein Ternärkörper, wo $t \mid R$ eine Restriktion von t auf die Menge $R \times R \times R$ bedeutet. Zum Beweis siehe etwa [7].

ad 11.2. Es sei $y = t(u, m, k)$ mit $m, k \in R$. Wird $s = [u, y]$, $r = \langle m, k \rangle$ gesetzt, so ist $s \mathrm{I} r$. Erklären wir nach E_1' die Gerade $r = pq$. Nach E_2 gilt $s \mathrm{I} uv$ und mithin $s = p$. Durch Vergleich der Konstruktionen E_2 und E_1' erhalten wir $y = m$.

ad 11.3. Es sei $x = t(y, m, u)$ mit $y \in R$ und $m \in Q$. Wird $s = [x, y]$ und $r = \langle m, u \rangle$ gesetzt, so ergibt sich $s \mathrm{I} r$.

a) Es sei $m \in R$. Nach E_2' ist $r = mv$. Wenn wir nach E_1 zum Punkt y den Punkt w festlegen und $s = uw \sqcap r$ setzen, so erhält man $x = m$.

b) Es sei $m = u$. Dann ist $r = uv$. Erklären wir nach E_2 mit Hilfe des Punktes y die Punkte n, n', dann gilt $s = on' \sqcap uv$ und $x = u = m$.

ad 11.4. Es sei $x = t(u, m, u)$ mit $m \in Q$. Wird $s = [x, u]$, $r = \langle m, u \rangle$ gesetzt, so erhält man $s \mathrm{I} r$. Nach Definition der Menge Q_1 folgt dann $x = u$.

Es sei $T = (R, u, t)$ ein erweiterter Ternärkörper und $Q = R \cup \{u\}$. Setzen wir $Q_1 = \{(a, b) \in Q \times Q \mid b = u \Rightarrow a = u\}$ und $Q_2 = \{(a, b) \in Q \times Q \mid a = u \Rightarrow b = u\}$. Seien B, L elementfremde Mengen, ξ' eine bijektive Abbildung der Menge Q_1 auf B und η' eine bijektive Abbildung der Menge Q_2 auf L. Setzen wir widerum $(x, y)^{\xi'} = [x, y]$ $\forall (x, y) \in Q_1$, $(m, k)^{\eta'} = \langle m, k \rangle$ $\forall (m, k) \in Q_2$ und definieren wir eine Relation $\mathrm{I} \subset B \times L$ durch

1. Ist $k \neq u$, so gilt $[x, y] \mathrm{I} \langle m, k \rangle \Leftrightarrow y = t(x, m, k)$.
2. $[x, y] \mathrm{I} \langle m, u \rangle \Leftrightarrow x = t(y, m, u)$.

Satz 2. *Das Tripel $\pi = (B, L, \mathrm{I})$ aus der vorigen Konstruktion ist eine projektive Ebene.*

Beweis. Nach Definition 1 ist π eine Inzidenzstruktur und wir überprüfen, daß sie den Forderungen (1) bis (3) aus der Definition 3 genügt.

ad 1. Seien $p = [a, p]$, $q = [c, d]$ zwei verschiedene Punkte aus B.

1. Nehmen wir an, daß $a \neq c$ ist.

a) Seien a, b, c, d aus R. Da $(R, t \mid R)$ ein Ternärkörper ist, gibt es nach K_4 aus der Definition 2, [5] ein einziges Paar $(m, k) \in R \times R$ mit $b = t(a, m, k)$, $d =$

$= t(c, m, k)$, was bedeutet, daß $p, q \mathrm{I} \langle m, k \rangle$. Angenommen $p, q \mathrm{I} \langle m, u \rangle$, so erhält man $a = t(b, m, u)$, $c = t(d, m, u)$. Wegen $b, d \in R$ gilt nach 11.3, [5] $a = t(b, m, u) = m = t(d, m, u) = c$, was ein Widerspruch ist.

b) Nehmen wir an, daß $a = u$. Dann folgt $c \neq u$ und nach Definition von Q_1 ist auch $d \neq u$.

α) Es sei $b = u$. Nehmen wir an, daß $p, q \mathrm{I} \langle m, k \rangle$ mit $k \neq u$ gilt. Nach Definition von Q_2 ist auch $m \neq u$ und es gilt $b = t(a, m, k)$. Nach 11.2, [5] erhält man $u = t(u, m, k) = m$, also einen Widerspruch. Es sei $k = u$. Dann ist $c = t(d, m, u) = m$ und $a = u = t(u, c, u) = t(b, m, k)$. Folglich gilt $p, q \mathrm{I} \langle c, u \rangle$.

β) Es sei $b \neq u$. Angenommen $p, q \mathrm{I} \langle m, k \rangle$ mit $k = u$, so erhält man $a = u = t(b, m, k) = t(b, m, u) = m = t(d, m, u) = t(d, m, k) = c$, also einen Widerspruch. Nehmen wir also an, daß $k \neq u$ ist. Danach ist $m \neq u$ und es gilt $b = t(a, m, k) = t(u, m, k) = m$ und $d = t(c, m, k) = t(c, b, k)$. Wegen $b, c, d \in R$ gibt es nach K_2 aus Definition 1, [5] ein enziges Element $k \in R$, welches der vorgehenden Gleichheit genügt. Dann $p, q \mathrm{I} \langle b, k \rangle$.

c) Ist $c = u$, dann durch Vertauschung der Bezeichnungen verläuft der Beweis ähnlich dem in b).

2. Nehmen wir an, daß $a = c$ und folglich $b \neq d$ gilt.

a) Es sei $a = u$. Wegen $b \neq d$ muß entweder $b \neq u$ oder $d \neq u$ gelten. Es sei $b \neq u$. Angenommen $p, q \mathrm{I} \langle m, k \rangle$ mit $k \neq u$, dann erhält man $b = t(a, m, k) = t(u, m, k) = m = t(c, m, k) = d$ und somit einen Widerspruch. Es sei $k = u$. Dann ist $a = u = t(b, m, k) = t(b, m, u)$. Wegen $b \neq u$ gilt nach 11.3, [5] $u = t(b, m, u) = m$. Man erhält $c = u = t(d, u, u) = t(d, m, k)$. Es gilt demnach $p, q \mathrm{I} \langle u, u \rangle$.

b) Angenommen $a \neq u$, so ist auch $c \neq u$ und nach Definition von Q_1 folgt $b \neq u$, $d \neq u$. Es sei $p, q \mathrm{I} \langle m, k \rangle$ mit $k \neq u$. Dann gilt $b = t(a, m, k) = t(c, m, k) = d$ und damit ist ein Widerspruch erreicht. Angenommen $k = u$, so erhält man $a = t(b, m, k) = t(b, m, u) = m = t(d, m, u) = t(d, m, k) = c$ und demnach gilt $p, q \mathrm{I} \langle a, u \rangle$.

ad (2). Seien $p = \langle a, b \rangle$, $q = \langle c, d \rangle$ zwei verschiedene Geraden aus L.

1. Nehmen wir an, daß $b = u$, $d \neq u$ ist. Nach Definition von Q_2 folgt dann $c \neq u$. Gilt $[x, y] \mathrm{I}\, p, q$, so ergibt sich $x = t(y, a, b)$ und $y = t(x, c, d)$. Wegen $c, d \in R$ ergibt sich aus der Gleichheit $y = t(x, c, d)$, daß $y \in R$. Nach 11.3, [5] erhält man $x = t(y, a, b) = t(y, a, u) = a$ und $y = t(a, c, d)$. Mithin gilt $[a, y] \mathrm{I}\, p, q$ mit $y = t(a, c, d)$.

2. Nehmen wir an, daß $a \neq c$.

a) Es sei $b, d \in R$ und folglich auch $a, c \in R$. Da $(R, t \mid R)$ ein Ternärkörper ist, gibt es ein einziges $x \in R$, so daß $t(x, a, b) = t(x, c, d)$ und daher $[x, y] \mathrm{I}\, p, q$, wo $y = t(x, a, b)$ ist. Gilt $[x, y] \mathrm{I}\, p, q$ mit $x = u$, so ergibt sich $y = t(x, a, b) = t(u, a, b) = a = t(u, c, d) = c$, also ein Widerspruch.

b) Es sei $b = d = u$. Gilt $[x, y] \mathrm{I}\, p, q$ mit $y \neq u$, dann folgt $x = t(y, a, u)$, $x = t(y, c, u)$, was ein Widerspruch ist. Ist also $y = u$, so gilt nach 11.4, [5] $x = t(y, a, b) = t(u, a, u) = u = t(u, c, u) = t(y, c, d)$ und dies bedeutet, daß $[u, u] \mathrm{I}\, p, q$.

3. Nehmen wir an, daß $a = c$ und folglich $b \neq d$ gilt. Ist etwa $b = u$, so gilt $d \neq u$ und man erhält den Fall 1. Wir können also annehmen, daß $b \neq u$ und $d \neq u$ gilt. Dann ist auch $c \neq u$. Ist $t(x, a, b) = t(x, a, d)$ mit $x \in R$, so ergibt sich nach K_2, [5] $b = d$, was einen Widerspruch ergibt. Nahmen wir also an, daß $x = u$. Dann erhält man $y = t(x, a, b) = t(u, a, b) = a = c = t(u, c, d) = t(x, c, d)$ und es gilt daher $[u, a] \mathrm{I}\, p, q$.

ad (3). Keine drei der Punkte $[o, o]$, $[1, 1]$, $[u, o]$, $[u, u]$ liegen auf einer Geraden. Nehmen wir an, daß die Punkte $[o, o]$, $[u, o]$, $[u, u]$ auf einer Geraden $\langle m, k\rangle$ liegen. Gilt $k \neq u$, so folgt $m \neq u$ und aus $[u, u] \mathrm{I} \langle m, k\rangle$ erhält man $u = t(u, m, k)$. Nach 11.2, [5] folgt aber $t(u, m, k) = m$, also ein Widerspruch. Nehmen wir demnach an, es gilt $k = u$. Dann folgt $o = t(o, m, u)$ und daraus $m = o$. Weiter ergibt sich $u = t(o, o, u)$, $u = o$, also wiederum ein Widerspruch. Ähnlich in den restlichen Fällen.

II

Sei $\pi = (B, L, \mathrm{I})$ eine projektive Ebene mit Homomorphismus. Dann ist $\pi\varkappa = \pi' = (B', L', \mathrm{I}')$ eine projektive Ebene. Im folgenden setzen wir $a\varkappa = \bar{a}$ $\forall a \in B$ $\forall a \in L$. Wählen wir in π solche Punkte o, u, v, e, wo keine drei der Punkte $\bar{o}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{e}$ auf einer Geraden in π' liegen und setzen wir $Q = \{x \in B \mid x \,\mathrm{I}\, ou\}$, $R' = \{x \in Q \mid \bar{x} = \bar{u}\}$, $R = Q \setminus R'$, $Q_1 = \{(a, b) \in Q \times Q \mid b \in R' \Rightarrow a \in R'\}$, $Q_2 = \{(a, b) \in Q \times Q \mid a \in R' \Rightarrow b \in R'\}$.

Definieren wir eine Abbildung $\xi : Q_1 \to B$ durch folgende Vorschriften $P_1 - P_3$:

P_1. Sei (x, y) ein beliebiges Paar aus $R \times R$. Wegen $\bar{v}$ non $\mathrm{I}'\, \overline{oe}$ gilt $\overline{oe} \neq \overline{vy}$ und man kann $w = oe \sqcap vy$ schreiben. Wegen $\overline{uw} \neq \overline{xv}$ gibt es genau einen Punkt s mit $s = vx \sqcap uw$ (Abb. 1) und $\bar{s}$ non $\mathrm{I}'\, \overline{uv}$. Wir setzen $s = (x, y)^\xi$.

P_2. Sei (x, y) ein beliebiges Paar aus $R' \times R$. Bezeichnen wir $n = yv \sqcap oe$ und $n' = un \sqcap ve$. Wegen $\bar{n}' \neq \bar{v}$ gilt $\overline{on'} \neq \overline{vx}$ und man kann $s = on' \sqcap vx$ schreiben. Wir setzen $s = (x, y)^\xi$ (Abb. 4). Hierbei ist $\bar{s} \neq \bar{v}$, wegen $x \in R'$ gilt $\overline{xv} = \overline{uv}$ und $\bar{s}\, \mathrm{I}'\, \overline{uv}$.

P_3. Sei (x, y) ein beliebiges Paar aus $R' \times R'$. Bezeichnen wir $w = yv \sqcap oe$, $h = xv \sqcap oe$ und $w' = uw \sqcap ve$ (Abb. 5). Es gilt $\overline{yv} = \overline{uv}$, $\bar{w}\, \mathrm{I}'\, \overline{uv}$, $\bar{w}' = \bar{v}$, $\overline{xv} = \overline{uv}$, $\bar{h}\, \mathrm{I}'\, \overline{uv}$, $\overline{uh} = \overline{uv}$. Daher ist $\overline{uh} \neq \overline{ow'}$ und man kann $s = uh \sqcap ow'$ schreiben, wo $\bar{s} = \bar{v}$. Wir setzen $s = (x, y)^\xi$.

Wir zeigen, daß ξ eine bijektive Abbildung der Menge Q_1 auf B ist:

a) Sei s ein Punkt mit $\bar{s}$ non $\mathrm{I}'\, \overline{uv}$. Bezeichnen wir nach Abbildung 1 $w = su \sqcap oe$, $x = vs \sqcap ou$, $y = vw \sqcap ou$, dann ist $x, y \in R$ und $s = (x, y)^\xi$.

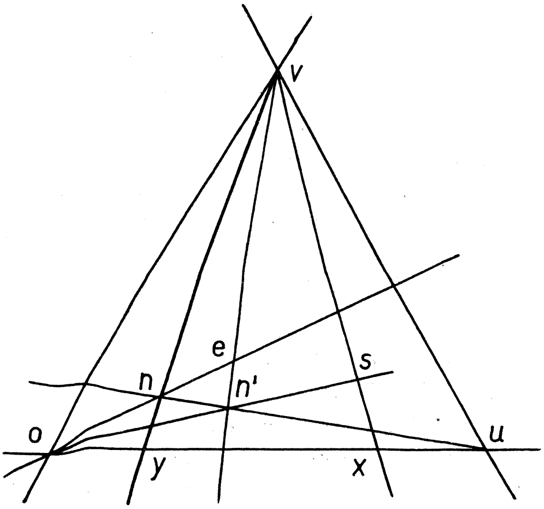

Abb. 4.

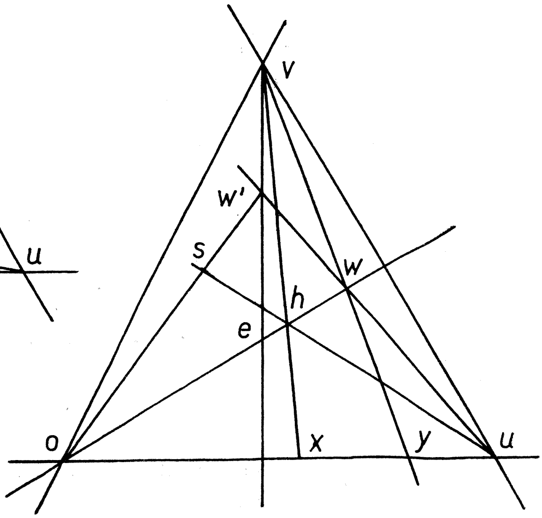

Abb. 5.

b) Sei s ein Punkt mit $\bar{s}\,\mathrm{I}'\,\overline{uv}$ und $\bar{s} \neq \bar{v}$. Bezeichnen wir nach Abbildung 4 $n' = so \sqcap ve$, $n = un' \sqcap oe$, $y = vn \sqcap ou$, $x = vs \sqcap ou$, dann folgt $x \in R'$, $y \in R$ und $s = (x, y)^{\xi}$.

c) Sei s ein Punkt mit $\bar{s} = \bar{v}$. Bezeichnen wir $w' = os \sqcap ve$, $w = uw' \sqcap oe$, $y = vw \sqcap ou$, $h = us \sqcap oe$, $x = vh \sqcap ou$ (Abb. 5), dann ergibt sich $x, y \in R'$ und $s = (x, y)^{\xi}$.

Leicht kann man nachprüfen, daß alle Konstruktionen von a) bis c) eindeutig sind.

Definieren wir weiter eine Abbildung $\eta : Q_2 \to L$ durch folgende Vorschriften $\mathrm{P}'_1 - \mathrm{P}'_3$:

P'_1. Sei (m, k) ein beliebiges Paar aus $R \times R$. Setzen wir $n = mv \sqcap oe$, $n' = nu \sqcap ve$, $p = on' \sqcap uv$, dann ist $\bar{p} \neq \bar{v}$ (Abb. 3). Bezeichnen wir weiter $z = oe \sqcap kv$, $q = uz \sqcap ov$, so folgt $\bar{q} \neq \bar{v}$ und deshalb $\bar{p} \neq \bar{q}$. Wir setzen $r = pq = (m, k)^{\eta}$. Offensichtlich gilt $\bar{v}$ non $\mathrm{I}'\,\bar{r}$.

P'_2. Sei (m, k) ein beliebiges Paar aus $R \times R'$. Setzen wir $h = kv \sqcap oe$, $w = uh \sqcap ve$, $q = ow \sqcap uv$, dann ist $\bar{q} = \bar{v}$ (Abb. 6). Wird $r = mq$ gesetzt, dann folgt $\bar{r} \neq \overline{uv}$. Wir setzen $r = (m, k)^{\eta}$.

P'_3. Sei (m, k) ein beliebiges Paar aus $R' \times R'$. Bezeichnen wir $h = vk \sqcap oe$, $q = uh \sqcap ov$, $r = mq$, dann ist $\bar{r} = \overline{uv}$ (Abb. 7). Wir setzen $r = (m, k)^{\eta}$.

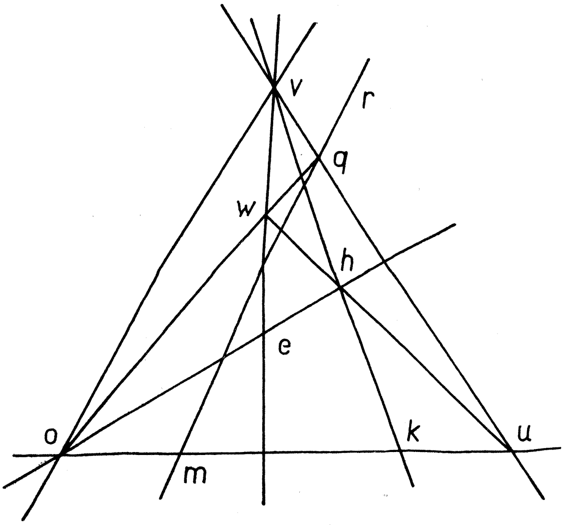

Abb. 6.

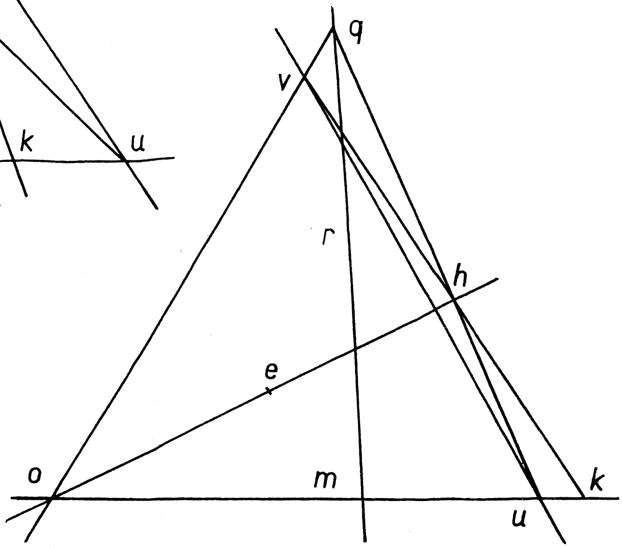

Abb. 7.

Wir zeigen, daß η eine bijektive Abbildung der Menge Q_2 auf L ist:

a) Sei r eine Gerade mit $\bar{r} \neq \overline{uv}$, $\bar{v}$ non I$'$ $\bar{r}$. Dann kan man $p = r \sqcap uv$, $q = r \sqcap ov$ bezeichnen, wobei $\bar{p} \neq \bar{v}$, $\bar{q} \neq \bar{v}$ (Abb. 3). Erklären wir schrittweise die Punkte $z = qu \sqcap oe$, $k = vz \sqcap ou$, $n' = op \sqcap ve$, $n = un' \sqcap oe$, $m = vn \sqcap ou$, so erhalten wir $m, k \in R$ und $r = (m, k)^\eta$.

b) Sei r eine Gerade mit $\bar{r} \neq \overline{uv}$, $\bar{v}$ I$'$ $\bar{r}$. Dann folgt $\bar{r} \neq \overline{ou}$ und man kann $m = r \sqcap ou$, $q = r \sqcap uv$ bezeichnen. Es gilt $m \in R$ und $\bar{q} = \bar{v}$. Erklären wir die Punkte $w = oq \sqcap ve$, $h = uw \sqcap oe$, $k = vh \sqcap ou$ (Abb. 6), dann ist $k \in R'$ und $r = (x, y)^\eta$.

c) Sei r eine Gerade mit $\bar{r} = \overline{uv}$. Danach gilt $\bar{r} \neq \overline{ou}$, $\bar{r} \neq \overline{ov}$ und man kann $m = r \sqcap ou$, $q = r \sqcap ov$, $h = uq \sqcap oe$, $k = vh \sqcap ou$ bezeichnen. Demzufolge ist $m, k \in R'$ und $(m, k)^\eta = r$.

Setzen wir $(x, y)^\xi = [x, y]$ $\forall (x, y) \in Q_1$ und $(m, k)^\eta = \langle m, k \rangle$ $\forall (m, k) \in Q_2$, bezeichnen wir $Q' = \{(a, b, c) \in Q \times Q \times Q \mid b \in R' \Rightarrow c \in R'\}$ und definieren wir t durch

1. Gilt $m, k \in R$, $x \in Q$ oder $x, k \in R'$, $m \in R$, so $y = t(x, m, k) \Leftrightarrow [x, y] \mathrm{I} \langle m, k \rangle$.

2. Für alle Tripel $(y, m, k) \in Q'$, die nicht unter 1 angeführt sind, gilt $x = t(y, m, k) \Leftrightarrow [x, y] \mathrm{I} \langle m, k \rangle$.

Mit Hilfe der Konstruktionen P_1 bis P'_3 läßt sich zeigen, daß t eine Abbildung der Menge Q' in Q ist.

Satz 3. *Das Tripel* $T = (R, R', t)$ *ist ein erweiterter lokaler Ternärring* ([5], *Definition* 12).

Beweis. Gilt $y = t(x, m, k)$ mit $x, m, k \in R$, dann ergibt sich $[x, y] \mathrm{I} \langle m, k \rangle$ und nach Definition der Menge Q_1 folgt $y \in R$. Die Abbildung t ist also auf der Menge $R \times R \times R$ abgeschlossen. Bezeichnen wir mit $t \mid R$ die Restriktion von t auf die Menge $R \times R \times R$. Zunächst wollen wir zeigen, daß $\mathcal{T} = (R, t \mid R)$ ein Ternärring ist, d. h. es gilt K_1, K_2 aus Definition 1, [5].

ad K_1. Es seien m, k beliebige Elemente aus R und setzen wir $y = t(o, m, k)$. Wird $s = [o, y]$, $r = \langle m, k \rangle$ bezeichnet, dann folgt $s \mathrm{I} r$. Nach der Konstruktion P'_1 gilt dann $r = pq$, $p \mathrm{I} uv$, $q \mathrm{I} ov$. Wegen $x = o$ ergibt sich nach P_1 $s = q$ und durch Vergleich von P_1 mit P'_1 erhält man $k = y$. Es seien x, k beliebige Elemente aus R und setzen wir $y = t(x, o, k)$. Dann gilt $s \mathrm{I} r$, wo $s = [x, y]$, $r = \langle o, k \rangle$. Nach P'_1 folgt $r = pq$, wo $p = u$ und nach P_1 ergibt sich $y = k$. Bezeichnen wir $1 = ve \sqcap ou$, dann gilt $o \neq 1$. Ist $y = t(1, m, o)$ mit $m \in R$, dann erhält man nach P_1 und P'_1 $y = m$. Analog gilt $x = t(x, 1, o)$ für alle x aus R.

ad K_2. Es seien x, y, m beliebige Elemente aus R. Erklären wir gemäß P_1 den Punkt $s = [x, y]$, dann ist $\bar{s}$ non I' $\overline{uv}$. Konstruieren wir nach P'_1 den Punkt p zum Punkt m, dann gilt $p \mathrm{I} uv$, $\bar{p} \neq \bar{v}$, $\bar{p} \neq \bar{s}$ und es existiert eine einzige Gerade $r = sp$ mit $\bar{r} \neq \overline{ov}$. Setzen wir $q = r \sqcap ov$, dann ist $\bar{q} \neq \bar{v}$. Wird $z = uq \sqcap oe$, $k = vz \sqcap ou$ bezeichnet, so folgt $r = \langle m, k \rangle$. Wegen $s \mathrm{I} r$ gilt $y = t(x, m, k)$ und der Punkt k ist der einzige dieser Eigenschaft.

Betrachten wir die projektive Ebene $\pi\varkappa = \pi' = (B', L', \mathrm{I}')$, die das Bild von π im Homomorphismus $\varkappa$ ist und bezeichnen wir $\bar{Q} = \{\bar{x} \in B' \mid \bar{x} \mathrm{I}' ou\}$, $\bar{R} = \bar{Q} \setminus \{\bar{u}\}$. Der Epimorphismus $\varkappa : \pi \to \pi'$ induziert eine Abbildung $\varphi : R \to \bar{R}$ durch $a^{\varphi} = a\varkappa$ $\forall a \in R$. Setzen wir $\bar{Q}_1 = \{(\bar{a}, \bar{b}) \in \bar{Q} \times \bar{Q} \mid \bar{b} = \bar{u} \Rightarrow \bar{a} = \bar{u}\}$, $\bar{Q}_2 = \{(\bar{a}, \bar{b}) \in \bar{Q} \times \bar{Q} \mid \bar{a} = \bar{u} \Rightarrow \bar{b} = \bar{u}\}$, definieren wir die Abbildungen $\xi' : \bar{Q}_1 \to B'$, $\eta' : \bar{Q}_2 \to L'$ mit den Konstruktionen E_1 bis E'_3 und setzen wir ferner $(\bar{x}, \bar{y})^{\xi'} = [\bar{x}, \bar{y}]$ $\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in Q_1$, $(\bar{m}, \bar{k})^{\eta'} = \langle \bar{m}, \bar{k} \rangle$ $\forall (m, k) \in Q_2$. Definieren wir $\bar{t}$ durch $\bar{t}(\bar{y}, \bar{m}, \bar{u}) = \bar{x} \Leftrightarrow [\bar{x}, \bar{y}] \mathrm{I}' \langle \bar{m}, \bar{u} \rangle$ und $\bar{t}(\bar{x}, \bar{m}, \bar{k}) = \bar{y} \Leftrightarrow [\bar{x}, \bar{y}] \mathrm{I}' \langle \bar{m}, \bar{k} \rangle$ für $\bar{k} \neq \bar{u}$, so ist das Tripel $\bar{T} = (\bar{R}, \bar{u}, \bar{t})$ gemäß Satz 1 ein erweiterter Ternärkörper und $\bar{\mathcal{T}} = (\bar{R}, \bar{t} \mid \bar{R})$ ist dann ein Ternärkörper. Sei $s = [x, y]$ mit $x, y \in R$ ein Punkt aus B. Da $\varkappa$ ein Epimorphismus von π auf π' ist, erhält man $\bar{s} = [\bar{x}, \bar{y}]$ durch Verlgleich der Konstruktionen P_1 und E_1. Ähnlich erhalten wir mit P'_1 und E'_1, daß $\bar{r} = \langle \bar{m}, \bar{k} \rangle$ für $r = \langle m, k \rangle$ gilt, wo m, k beliebige Elemente aus R sind.

Es sei $y = t(x, m, k)$, wo x, m, k beliebige Elemente aus R sind. Dann ist $y \in R$ und $[x, y]$ I $\langle m, k\rangle$. Da $\varkappa$ ein Epimorphismus ist, gilt $\overline{[x, y]}$ I′ $\overline{\langle m, k\rangle}$ und daraus folgt $[\bar{x}, \bar{y}]$ I′ $\langle \bar{m}, \bar{k}\rangle$, was $\bar{y} = \bar{t}(\bar{x}, \bar{m}, \bar{k})$ bedeutet. Demzufolge gilt $y^\varphi = [t(x, m, k)]^\varphi = \bar{t}(x^\varphi, m^\varphi, k^\varphi)$. Die Abbildung φ ist demnach ein Epimorphismus des Ternärringes $\mathscr{T} = (R, t \mid R)$ auf den Ternärkörper $\bar{\mathscr{T}} = (\bar{R}, \bar{t} \mid \bar{R})$. Nach Satz 6, [5] ist $R_0 = \{x \in R \mid x^\varphi = \bar{o}\}$ ein Ideal in $\mathscr{T}$ und der Restklassen-Ternärring $\mathscr{T}' = (R/R_0, t')$ ist mit $\bar{\mathscr{T}}$ isomorph. Daher ist $\mathscr{T}'$ ein Ternärkörper und man kann im folgenden $x' = \bar{x}$ für alle $x' \in \mathscr{T}'$ setzen.

Nun wollen wir zeigen, daß R_0 ein vollständiges Ideal in $\mathscr{T}$ ist, d. h., es befriedigt die Forderungen K_3', K_4' aus Definition 6, [5].

ad K_3'. Es seien beliebige m_1, k_1, m_2, k_2 aus R mit $\bar{m}_1 \neq \bar{m}_2$ gegeben.

(a) Erklären wir mittels der Konstruktion P_1' die Geraden $r_1 = \langle m_1, k_1\rangle = p_1q_1$, $r_2 = \langle m_2, k_2\rangle = p_2q_2$ und nehmen wir an, daß $\bar{p}_1 = \bar{p}_2$. Dann gilt gemäß P_1' $\overline{op}_1 = \overline{op}_2$, $\bar{n}_1' = \bar{n}_2'$, $\overline{un}_1' = \overline{un}_2'$, $\bar{n}_1 = \bar{n}_2$, $\overline{vn}_1 = \overline{vn}_2$ und $\bar{m}_1 = \bar{m}_2$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Daher ist $\bar{p}_1 \neq \bar{p}_2$ und daraus folgt $\bar{r}_1 \neq \bar{r}_2$. Wird $s = r_1 \sqcap r_2$ gesetzt, dann erhält man $\bar{s}$ non I′ $\overline{uv}$. Gemäß der Definition von ξ gilt dann $s = [x, y]$ mit $x, y \in R$. Wegen s I r_1, r_2 erhalten wir $y = t(x, m_1, k_1) = t(x, m_2, k_2)$ und x ist das einzige Element dieser Eigenschaft.

(b) Nehmen wir an, daß es zwei Elemente $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ aus R/R_0 gibt, mit $t'(\bar{x}_1, \bar{m}_1, \bar{k}_1) = t'(\bar{x}_1, \bar{m}_2, \bar{k}_2)$, $t'(\bar{x}_2, \bar{m}_1, \bar{k}_1) = t'(\bar{x}_2, \bar{m}_2, \bar{k}_2)$. Da $\mathscr{T}'$ ein Ternärkörper ist und $\bar{m}_1 \neq \bar{m}_2$ gilt, ergibt sich nach K_3 aus Definition 2, [5], daß $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$.

ad K_4'. Es seien beliebige x_1, y_1, x_2, y_2 aus R mit $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ gegeben.

(a) Erklären wir gemäß P_1 die Punkte $s_1 = [x_1, y_1]$, $s_2 = [x_2, y_2]$, so erhalten wir $\bar{s}_1, \bar{s}_2$ non I′ $\overline{uv}$. Wegen $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ gilt $\bar{s}_1 \neq \bar{s}_2$ und durch die Punkte s_1, s_2 ist genau eine Gerade $r = s_1s_2$ bestimmt. Hierbeit gilt $\bar{v}$ non I′ $\bar{r}$, $\bar{r} \neq \overline{uv}$. Es existiert also ein einziges Paar $(m, k) \in R \times R$ derart, daß $r = \langle m, k\rangle$. Wegen s_1, s_2 I r gilt $y_1 = t(x_1, m, k)$, $y_2 = t(x_2, m, k)$ und (m, k) ist ein einziges Paar dieser Eigenschaft.

(b) Es gelte $\bar{y}_1 = t'(\bar{x}_1, \bar{m}_1, \bar{k}_1) = t'(\bar{x}_1, \bar{m}_2, \bar{k}_2)$, $\bar{y}_2 = t'(\bar{x}_2, \bar{m}_1, \bar{k}_1) = t'(\bar{x}_2, \bar{m}_2, \bar{k}_2)$ für $(\bar{m}_1, \bar{k}_1), (\bar{m}_2, \bar{k}_2) \in R/R_0 \times R/R_0$. Nach K_4 aus Definition 2, [5] ergibt sich dann $(\bar{m}_1, \bar{k}_1) = (\bar{m}_2, \bar{k}_2)$.

R_0 ist somit ein vollständiges Ideal in $\mathscr{T}$ und der Ternärring $\mathscr{T}$ ist lokal.

Nun beweisen wir die Gültigkeit der Forderung (2) aus Definition 12, [5]:

ad (a) Es seien $x \in R'$ und $m, k \in R$ gegeben. Da t eine Abbildung der Menge Q' in Q ist, existiert ein einziges $y \in Q$ derart, daß $y = t(x, m, k)$. Wird $s = [x, y]$ und $r = \langle m, k\rangle$ gesetzt, dann ist s I r. Wird ferner $r = pq$ gemäß P_1' gesetzt, so ergibt sich $\bar{v}$ non I′ $\bar{r}$ und folglich $\bar{r} \neq \overline{uv}$, $y \in R$. Gemäß P_2 gilt $s = vx \sqcap r$ und wegen $x \in R'$ ergibt sich $\overline{vx} = \overline{uv}$ und $\bar{s} = \bar{p}$. Durch Vergleich der Konstruktionen P_2 und P_1' erhalten wir schließlich $\bar{y} = \bar{m}$.

ad (b) Es seien $y, m \in R$ und $k \in R'$ gegeben und setzen wir $x = t(y, m, k)$, $s = [x, y]$, $r = \langle m, k \rangle$. Dann ist $s \mathrm{I} r$. Gemäß P'_2 folgt $r = mq$, wo $\bar{q} = \bar{v}$. Wegen $y \in R$ gilt $\bar{s}$ non $\mathrm{I}'\ \overline{uv}$, $\overline{vs} = \bar{r}$ und nach P_1 folgt $\bar{x} = \bar{m}$.

Es seien $y \in R$ und $m, k \in R'$ gegeben und setzen wir $x = t(y, m, k)$, $s = [x, y]$, $r = \langle m, k \rangle$. Dann ist $s \mathrm{I} r$. Gemäß P'_3 folgt $\bar{r} = \overline{uv}$. Wegen $s \mathrm{I} r$, $y \in R$ gilt gemäß P_2 $x \in R'$ und deshalb $\bar{x} = \bar{u} = \bar{m}$.

ad (c). Es seien $x\ k, \in R'$ und $m \in R$ gegeben und setzen wir $y = t(x, m, k)$, $s = [x, y]$, $r = \langle m, k \rangle$. Dann ist $s \mathrm{I} r$. Gemäß P'_2 folgt $r = mq$ mit $\bar{q} = \bar{v}$, $\bar{r} \neq \overline{uv}$. Wegen $s \mathrm{I} r$ und $x \in R'$ gilt $y \in R'$. Es seien y, m, k aus R' gegeben. Wird $x = t(y, m, k)$, $s = [x, y]$, $r = \langle m, k \rangle$ gesetzt, dann ist $s \mathrm{I} r$. Gemäß P'_3 folgt $r = mq$ mit $\bar{r} = \overline{uv}$. Wegen $s \mathrm{I} r$ und $y \in R'$ gilt $x \in R'$.

Im folgenden wird die Gültigkeit von K''_3 und K''_4 aus der Definition 12, [5] bewiesen.

ad K''_3 1. (a) Seien $m_1, k_1, m_2, k_2 \in R$ mit $\bar{m}_1 = \bar{m}_2$, $\bar{k}_1 \neq \bar{k}_2$. Erklären wir nach P'_1 die Geraden $r_1 = \langle m_1, k_1 \rangle = p_1 q_1$, $r_2 = \langle m_2, k_2 \rangle = p_2 q_2$. Wegen $\bar{k}_1 \neq \bar{k}_2$ gilt $\bar{q}_1 \neq \bar{q}_2$ und $\bar{r}_1 \neq \bar{r}_2$. Setzen wir $s = r_1 \sqcap r_2$. Wegen $\bar{m}_1 = \bar{m}_2$ gilt $\bar{p}_1 = \bar{p}_2$ und daher $\bar{s} \mathrm{I}'\ \overline{uv}$. Hierbei ist $\bar{s} \neq \bar{v}$. Man erhält somit $s = [x, y]$, wo $x \in R'$, $y \in R$. Wegen $s \mathrm{I} r_1, r_2$ gilt dann $y = t(x, m_1, k_1) = t(x, m_2, k_2)$ und x ist der einzige Punkt dieser Eigenschaft.

(b) Es seien $m_1, m_2 \in R$ und $k_1, k_2 \in R'$ mit $\bar{m}_1 \neq \bar{m}_2$ gegeben. Erklären wir gemäß P'_2 die Geraden $r_1 = \langle m_1, k_1 \rangle = m_1 q_1$, $r_2 = \langle m_2, k_2 \rangle = m_2 q_2$. Wegen $\bar{m}_1 \neq \bar{m}_2$ gilt $\bar{r}_1 \neq \bar{r}_2$ und wir können $s = r_1 \sqcap r_2$ setzen. Damit ergibt sich $\bar{s} = \bar{v}$ und folglich gilt $s = [x, y]$ mit $x, y \in R'$. Wegen $s \mathrm{I} r_1, r_2$ ergibt sich $y = t(x, m_1, k_1) = t(x, m_2, k_2)$.

2. (a) Seien $m_1, k_1, m_2 \in R$ und $k_2 \in R'$. Erklären wir gemäß P'_1 die Gerade $r_1 = \langle m_1, k_1 \rangle = p_1 q_1$ und gemäß P'_2 die Gerade $r_2 = \langle m_2, k_2 \rangle = m_2 q_2$, dann ist $\bar{r}_1 \neq \bar{r}_2$ und wir können $s = r_1 \sqcap r_2$ setzen. Folglich ist $\bar{s}$ non $\mathrm{I}'\ \overline{uv}$ und mithin $s = [x, y]$ mit $x, y \in R$. Wegen $s \mathrm{I} r_1, r_2$ gilt $y = t(x, m_1, k_1)$, $x = t(y, m_2, k_2)$. Seien $m_1, k_1 \in R$ und $m_2, k_2 \in R'$. Gemäß P'_1 ergibt sich $r_1 = \langle m_1, k_1 \rangle = p_1 q_1$ und gemäß P'_3 $r_2 = \langle m_2, k_2 \rangle = m_2 q_2$. Danach ist $\bar{r}_1 \neq \overline{uv}$, $\bar{r}_2 = \overline{uv}$ und deshalb $\bar{r}_1 \neq \bar{r}_2$. Somit gilt $s = r_1 \sqcap r_2$ mit $\bar{s} \mathrm{I}'\ \overline{uv}$, $\bar{s} \neq \bar{v}$ und so ergibt sich $s = [x, y]$, wo $x \in R'$, $y \in R$. Wegen $s \mathrm{I} r_1, r_2$ gilt $y = t(x, m_1, k_1)$, $x = t(y, m_2, k_2)$.

(b) Seien $m_1 \in R$ und $m_2, k_1, k_2 \in R'$. Gemäß P'_2 folgt $r_1 = \langle m_1, k_1 \rangle = m_1 q_1$ und gemäß P'_3 ist $r_2 = \langle m_2, k_2 \rangle = m_2 q_2$. Danach ist $\bar{r}_1 \neq \overline{uv}$, $\bar{v} \mathrm{I}' \bar{r}_1$, $\bar{r}_2 = \overline{uv}$ und es gilt $\bar{r}_1 \neq \bar{r}_2$. Wird $s = r_1 \sqcap r_2$ gesetzt, dann erhält man $\bar{s} = \bar{v}$ und $s = [x, y]$ mit $x, y \in R'$. Wegen $s \mathrm{I} r_1, r_2$ gilt $y = t(x, m_1, k_1)$, $x = t(y, m_2, k_2)$.

ad K''_4 (a) Seien $x_1, y_1, y_2 \in R$, $x_2 \in R'$ und setzen wir $s_1 = [x_1, y_1]$, $s_2 = [x_2, y_2]$. Nach P_1 gilt $\bar{s}_1$ non $\mathrm{I}'\ \overline{uv}$, nach P_2 gilt $\bar{s}_2 \mathrm{I}'\ \overline{uv}$, $\bar{s}_2 \neq \bar{v}$ und mithin $\bar{s}_1 \neq \bar{s}_2$. Wird $r = s_1 s_2 = \langle m, k \rangle$ gesetzt, dann ist $\bar{r} \neq \overline{uv}$, $\bar{v}$ non $\mathrm{I}' \bar{r}$ und daher $m, k \in R$. Wegen $s_1, s_2 \mathrm{I} r$ gilt $y_1 = t(x_1, m, k)$, $y_2 = t(x_2, m, k)$.

(b) Seien $y_1, y_2 \in R$, $x_1, x_2 \in R'$ mit $\bar{y}_1 \neq \bar{y}_2$ und setzen wir $s_1 = [x_1, y_1]$, $s_2 = [x_2, y_2]$. Nach P_2 folgt $\bar{s}_1, \bar{s}_2 \, \mathrm{I}' \, \overline{uv}$ und $\bar{s}_1 \neq \bar{v}$, $\bar{s}_2 \neq \bar{v}$. Wegen $\bar{y}_1 \neq \bar{y}_2$ folgt $\bar{s}_1 \neq \bar{s}_2$. Wird $r = s_1 s_2 = \langle m, k \rangle$ gesetzt, dann ergibt sich $\bar{r} = \overline{uv}$ und $m, k \in R'$. Es gilt $x_1 = t(y_1, m, k)$, $x_2 = t(y_2, m, k)$, denn $s_1, s_2 \, \mathrm{I} \, r$.

(c) Seien $x_1, y_1 \in R$, $x_2, y_2 \in R'$ und setzen wir $s_1 = [x_1, y_1]$, $s_2 = [x_2, y_2]$. Nach P_1 gilt $\bar{s}_1$ non $\mathrm{I}' \, \overline{uv}$ und nach P_3 $\bar{s}_2 = \bar{v}$. Deshalb ist $\bar{s}_1 \neq \bar{s}_2$ und man kann $r = s_1 s_2 = \langle m, k \rangle$ setzen. Danach gilt $\bar{r} \neq \overline{uv}$, $\bar{v} \, \mathrm{I}' \, \bar{r}$ und $m \in R$, $k \in R'$. Wegen $s_1, s_2 \, \mathrm{I} \, r$ folgt $x_1 = t(y_1, m, k)$, $y_2 = t(x_2, m, k)$.

(d) Seien $y_1 \in R$, $x_1, y_2, x_2 \in R'$ und setzen wir $s_1 = [x_1, y_1]$, $s_2 = [x_2, y_2]$. Nach P_2 ist $\bar{s}_1 \, \mathrm{I}' \, \overline{uv}$, $\bar{s}_1 \neq \bar{v}$ und gemäß P_3 folgt $\bar{s}_2 = \bar{v}$. Deshalb gilt $\bar{s}_1 \neq \bar{s}_2$ und man kann $r = s_1 s_2 = \langle m, k \rangle$ setzen. Dann ist $\bar{r} = \overline{uv}$ und $m, k \in R'$. Daraus erhält man $x_1 = t(y_1, m, k)$, $x_2 = t(y_2, m, k)$.

(e) Seien y_1, x_1, y_2, x_2 aus R mit $\bar{y}_1 \neq \bar{y}_2$, $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ und bezeichnen wir $s_1 = [x_1, y_1]$, $s_2 = [x_2, y_2]$. So erhalten wir $\bar{s}_1, \bar{s}_2$ non $\mathrm{I}' \, \overline{uv}$. Wegen $\bar{y}_1 \neq \bar{y}_2$ gilt nach P_1, daß $\bar{s}_1 \neq \bar{s}_2$ und somit ergibt sich $r = s_1 s_2 = \langle m, k \rangle$. Dann ist $\bar{r} \neq \overline{uv}$. Wegen $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ gilt $\bar{v} \, \mathrm{I}' \, \bar{r}$ und folglich $m \in R$, $k \in R'$. Es gilt also $x_1 = t(y_1, m, k)$, $x_2 = t(y_2, m, k)$.

Damit ist der Beweis des Satzes 3 beendet.

Satz 4. *Ist $\pi = (B, L, \mathrm{I})$ eine projektive H-Ebene, so ist der erweiterte lokale Ternärring $T = (R, R', t)$ aus Satz 3 ein erweiterter H-Ring ([5], Definition 13).*

Beweis. Wir beweisen, daß in T die Bedingungen (1), (2) von der Definition 13 gelten.

ad (1). Es seien die Elemente m_1, k_1, m_2, k_2 aus Q mit $\bar{m}_1 = \bar{m}_2$, $\bar{k}_1 = \bar{k}_2$ derart gegeben, daß $k_1 \in R \Rightarrow m_1 \in R$, $k_2 \in R \Rightarrow m_2 \in R$. Betrachten wir die Geraden $r_1 = \langle m_1, k_1 \rangle$, $r_2 = \langle m_2, k_2 \rangle$. Dann folgt $\bar{r}_1 = \langle \bar{m}_1, \bar{k}_1 \rangle = \langle \bar{m}_2, \bar{k}_2 \rangle = \bar{r}_2$ und nach Definition 5 besitzen die Geraden r_1, r_2 mindestens zwei verschiedene gemeinsame Punkte $s_1 = [x_1, y_1]$, $s_2 = [x_2, y_2]$. Gilt $r_1 = r_2$, dann haben die Geraden r_1, r_2 alle Punkte gemeinsam und die Bedingung (1) aus der Definition 13, [5] ist offensichtlich befriedigt. Nehmen wir ferner an, es gilt $r_1 \neq r_2$. Danach ist nach der Definition 4 $\bar{s}_1 = \bar{s}_2$, also $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ und $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$.

(a) Nehmen wir an, es gilt $k_1 \in R$. Dann erhält man nach Definition der Menge Q_2, daß $m_1 \in R$. Wegen $\bar{k}_1 = \bar{k}_2$ gilt dann $k_2 \in R$ und auch $m_2 \in R$. Wegen $s_1, s_2 \, \mathrm{I} \, r_1$ und $s_1, s_2 \, \mathrm{I} \, r_2$ gilt

$$\text{(i)} \qquad y_1 = t(x_1, m_1, k_1)\,, \quad y_2 = t(x_2, m_1, k_1)\,,$$
$$y_1 = t(x_1, m_2, k_2)\,, \quad y_2 = t(x_2, m_2, k_2)\,.$$

Aus (i) ergibt sich

$$\text{(ii)} \qquad t(x_1, m_1, k_1) = t(x_1, m_2, k_2)\,, \quad t(x_2, m_1, k_1) = t(x_2, m_2, k_2)\,.$$

Falls $x_1 = x_2$ ist, dann gilt $y_1 = t(x_1, m_1, k_1) = t(x_2, m_1, k_1) = y_2$. Dies ist aber ein Widerspruch, denn nach der Voraussetzung ist $s_1 \neq s_2$. Es gilt also $x_1 \neq x_2$.

(b) Angenommen $k_1 \in R'$, $m_1 \in R$, so erhalten wir auch $k_2 \in R'$, $m_2 \in R$. Wegen $s_1 \mathrm{I} r_1$ gilt entweder $x_1, y_1 \in R$ oder $x_1, y_1 \in R'$. Es gelte $x_1, y_1 \in R$. Wegen $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$ gilt auch $x_2, y_2 \in R$. Dann erhalten wir

(iii) $$x_1 = t(y_1, m_1, k_1), \quad x_2 = t(y_2, m_1, k_1),$$
$$x_1 = t(y_1, m_2, k_2), \quad x_2 = t(y_2, m_2, k_2).$$

Aus (iii) folgt

(iv) $$t(y_1, m_1, k_1) = t(y_1, m_2, k_2), \quad t(y_2, m_1, k_1) = t(y_2, m_2, k_2)$$

mit $y_1 \neq y_2$.

Gilt $x_1, y_1 \in R'$, so ist auch $x_2, y_2 \in R'$. Wegen $s_1, s_2 \mathrm{I} r_1$ und $s_1, s_2 \mathrm{I} r_2$ gelten die Gleichheiten (i) und (ii) für $x_1 \neq x_2$.

(c) Es seien $m_1, k_1 \in R'$, also auch $m_2, k_2 \in R'$. Dann gelten die Gleichheiten (iii) und (iv).

ad (2). Es seien die Elemente x_1, y_1, x_2, y_2 aus Q mit $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$. Durch geeignete Wahl der Bezeichnungen läßt sich $(x_1, y_1) \in Q_1$, d.h. $x_1 \in R \Rightarrow y_1 \in R$ erreichnen. Danach gilt auch $(x_2, y_2) \in Q_1$. Wird $s_1 = [x_1, y_1]$ und $s_2 = [x_2, y_2]$ gesetzt, dann folgt $\bar{s}_1 = \bar{s}_2$. Gemäß der Definition 5 gibt es mindestens zwei verschiedene durch die Punkte s_1, s_2 gehende Geraden $r_1 = \langle m_1, k_1 \rangle$, $r_2 = \langle m_2, k_2 \rangle$. Gilt $s_1 = s_2$, dann jede den Punkt s_1 enthaltende Gerade enthält auch den Punkt s_2 und offensichtlich gilt die Bedingung (2) der Definition 13, [5]. Nehmen wir ferner an, es gilt $s_1 \neq s_2$. Nach der Definition 4 gilt $\bar{r}_1 = \bar{r}_2$, also $\overline{m}_1 = \overline{m}_2$ und $\bar{k}_1 = \bar{k}_2$.

(a) Nehmen wir an, daß $x_1, y_1 \in R$, also auch $x_2, y_2 \in R$. Daraus folgt $\bar{s}_1, \bar{s}_2$ non I' non $\mathrm{I}'\ \overline{uv}$ und es gilt entweder $m_1, k_1 \in R$ oder $m_1 \in R$, $k_1 \in R'$. Es seien $m_1, k_1 \in R$. Dann auch $m_2, k_2 \in R$. Wegen $s_1 \mathrm{I} r_1, r_2$ und $s_2 \mathrm{I} r_1, r_2$ gilt (i). Es seien $m_1 \in R$, $k_1 \in R'$. Dann auch $m_2 \in R$, $k_2 \in R'$ und es gilt (iii).

(b) Nehmen wir an, es gilt $x_1 \in R'$, $y_1 \in R$ und daraus auch $x_2 \in R'$, $y_2 \in R$. Dann erhält man $\bar{s}_1, \bar{s}_2 \mathrm{I}'\ \overline{uv}$ mit $\bar{s}_1 \neq \bar{v}$, $\bar{s}_2 \neq \bar{v}$ und es gilt entweder $m_1, k_1 \in R$ oder $m_1, k_1 \in R'$. Falls $m_1, k_1 \in R$ und $m_2, k_2 \in R$ ist, dann gilt (i). Falls $m_1, k_1 \in R'$ und $m_2, k_2 \in R'$ ist, dann gilt (iii).

(c) Nehmen wir an, es gilt $x_1, y_1 \in R'$, also auch $x_2, y_2 \in R'$. Damit ergibt sich $\bar{s}_1 = \bar{s}_2 = \bar{v}$ und es gilt entweder $m_1 \in R$, $k_1 \in R'$ oder $m_1, k_1 \in R'$. Falls $m_1 \in R$, $k_1 \in R'$ und $m_2 \in R$, $k_2 \in R'$ ist, dann gilt (i). Falls $m_1, k_1 \in R'$ und $m_2, k_2 \in R'$ ist, dann gilt (iii).

III

Seien $T = (R, R', t)$ ein erweiterter lokaler Ternärring, $\mathscr{T} = (R, t \mid R)$ der lokale Ternärring mit vollständigem Ideal R_0 und $\mathscr{T}' = (R/R_0, t')$ der Restklassen-Ternärkörper aus der Definition 12, [5]. Betrachten wir weiter den erweiterten Ternärkörper $\bar{T} = (R/R_0, \{R'\}, \bar{t})$ aus Satz 9, [5], wo $\bar{a} \in R/R_0$ für alle $a \in R$ und $\bar{u} = \{R'\}$ für alle $u \in R'$ gesetzt wird. Setzen wir $\bar{Q} = R/R_0 \cup \{R'\}$, $\bar{Q}_1 = \{(\bar{a}, \bar{b}) \in \bar{Q} \times \bar{Q} \mid b \in \in R' \Rightarrow a \in R'\}$, $\bar{Q}_2 = \{(\bar{a}, \bar{b}) \in \bar{Q} \times \bar{Q} \mid a \in R' \Rightarrow b \in R'\}$. Seien B', L' elementfremde Mengen, ξ' eine bijektive Abbildung der Menge $\bar{Q}_1$ auf B' und η' eine bijektive Abbildung der Menge Q_2 auf L'. Setzen wir $(\bar{x}, \bar{y})^{\xi'} = [\bar{x}, \bar{y}]$ $\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Q}_1$ und $(\bar{m}, \bar{k})^{\eta'} = \langle \bar{m}, \bar{k} \rangle$ $\forall (\bar{m}, \bar{k}) \in \bar{Q}_2$. Definieren wir eine Relation $\mathrm{I}' \subset B' \times L'$ folgenderweise:

1. Ist $k \in R$, dann $[\bar{x}, \bar{y}]\, \mathrm{I}' \langle \bar{m}, \bar{k} \rangle \Leftrightarrow \bar{y} = \bar{t}(\bar{x}, \bar{m}, \bar{k})$.
2. Ist $k \in R'$, dann $[\bar{x}, \bar{y}]\, \mathrm{I}' \langle \bar{m}, \bar{k} \rangle \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{t}(\bar{y}, \bar{m}, \bar{k})$.

Nach Satz 2 ist das Tripel $\pi' = (B', L', \mathrm{I}')$ eine projektive Ebene.

Bezeichnen wir $Q = R \cup R'$, $Q_1 = \{(a, b) \in Q \times Q \mid b \in R' \Rightarrow a \in R'\}$, $Q_2 = = \{(a, b) \in Q \times Q \mid a \in R' \Rightarrow b \in R'\}$. Seien B, L elementfremde Mengen, ξ eine bijektive Abbildung der Menge Q_1 auf B und η eine bijektive Abbildung der Menge Q_2 auf L. Setzen wir $(x, y)^{\xi} = [x, y]$ $\forall (x, y) \in Q_1$, $(m, k)^{\eta} = \langle m, k \rangle$ $\forall (x, y) \in Q_2$ und definieren wir die Inzidenzrelation $\mathrm{I} \subset B \times L$ folgenderweise:

1. Ist $k \in R$ oder $x, k \in R'$ und $m \in R$, dann $[x, y]\, \mathrm{I} \langle m, k \rangle \Leftrightarrow y = t(x, m, k)$.
2. $[x, y]\, \mathrm{I} \langle m, k \rangle \Leftrightarrow x = t(y, m, k)$ in allen in 1 nicht angeführten Fällen.

Satz 5. *Die Inzidenzstruktur $\pi = (B, L, \mathrm{I})$ ist eine projektive Ebene mit Homomorphismus.*

Beweis. Betrachten wir die Abbildung $\varphi : T \to \bar{T}$ aus Bemerkung 6, [5], wo $a^{\varphi} = \bar{a}$ für alle $a \in Q$ gilt. Dann gelten für alle zulässige Elemente a, b, c aus Q die Gleichheiten $[t(a, b, c)]^{\varphi} = \overline{t(a, b, c)} = \bar{t}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \bar{t}(a^{\varphi}, b^{\varphi}, c^{\varphi})$. Definieren wir eine Abbildung $\varkappa : \pi \to \pi'$ folgenderweise: $[x, y]\, \varkappa = [x^{\varphi}, y^{\varphi}] = [\bar{x}, \bar{y}]$, $\langle m, k \rangle\, \varkappa = = \langle m^{\varphi}, k^{\varphi} \rangle = \langle \bar{m}, \bar{k} \rangle$. Dann gilt $B\varkappa = B'$ und $L\varkappa = L'$. Nun zeigen wir, daß $\varkappa$ ein Epimorphismus von π auf π' ist (Definition 2): Es liege $[x, y] \in B$, $\langle m, k \rangle \in L$ mit $k \in R$ vor und es sei $[x, y]\, \mathrm{I} \langle m, k \rangle$. Daraus folgt $y = t(x, m, k)$ und $y^{\varphi} = \bar{t}(x^{\varphi}, m^{\varphi}, k^{\varphi}) = \bar{t}(\bar{x}, \bar{m}, \bar{k})$. Wegen $k \in R$ gilt dann $[\bar{x}, \bar{y}]\, \mathrm{I}' \langle \bar{m}, \bar{k} \rangle$, also $[x, y]\, \varkappa\, \mathrm{I}' \langle m, k \rangle\, \varkappa$. Es sei $[x, y]\, \mathrm{I} \langle m, k \rangle$ mit $x, k \in R'$ und $m \in R$. Dann gilt $y = = t(x, m, k)$ und folglich $\bar{y} = \bar{t}(\bar{x}, \bar{m}, \bar{k})$. Da $\bar{T}$ ein erweiterter Ternärkörper ist, es gilt $y \in R'$ gemäß 11.4, [5] und folglich auch $\bar{x} = \bar{t}(\bar{y}, \bar{m}, \bar{k})$. Hieraus ergibt sich dann $[x, y]\, \varkappa\, \mathrm{I}' \langle m, k \rangle\, \varkappa$. Es gelte schließlich $[x, y]\, \mathrm{I} \langle m, k \rangle \Rightarrow x = t(y, m, k)$. So erhalten wir $k \in R'$ und $\bar{x} = \bar{t}(\bar{y}, \bar{m}, \bar{k})$, also $[\bar{x}, \bar{y}]\, \mathrm{I}' \langle \bar{m}, \bar{k} \rangle$. Es gilt demnach $[x, y]\, \varkappa\, \mathrm{I}'$ $\mathrm{I}' \langle m, k \rangle\, \varkappa$.

Nun beweisen wir, daß in π die Bedingungen (1) und (2) von der Definition 4 befriedigt sind.

ad (1) Seien $p = [a, b]$, $q = [c, d]$ solche Punkte aus B, für welche $p\varkappa \neq q\varkappa$, d.h. entweder $\bar{a} \neq \bar{c}$ oder $\bar{b} \neq \bar{d}$ gilt. Nehmen wir an, daß $p, q \, \mathrm{I} \, \langle m, k \rangle$ ist.

1. Es sei $\bar{a} \neq \bar{c}$.

a) Seien a, b, c, d aus R und es sei $k \in R'$. Wegen $b, d \in R$ gilt $a = t(b, m, k)$, $c = t(d, m, k)$ und folglich $\bar{a} = \bar{t}(\bar{b}, \bar{m}, \bar{k})$, $\bar{c} = \bar{t}(\bar{d}, \bar{m}, \bar{k})$. Da $\bar{T}$ ein erweiterter Ternörkörper ist, erhält man nach 11.3, [5] $\bar{a} = \bar{m} = \bar{c}$, was auf einen Widerspruch führt. Es sei $k \in R$. Demnach ist $b = t(a, m, k)$, $d = t(c, m, k)$. Da $\mathscr{T}$ ein lokaler Ternärring ist, gibt es nach K_4', [5], Definition 6, ein einziges die vorgehenden Gleichheiten befriedigendes Paar $(m, k) \in R \times R$.

b) Sei $a \in R'$. Damit ergibt sich $c \in R$ und nach Definition der Menge Q_1 ist auch $d \in R$.

α) Es sei $b \in R'$ und nehmen wir an, daß $k \in R$ ist. Nach Definition der Menge Q_2 folgt daraus $m \in R$ und es gilt $b = t(a, m, k)$. So ergibt sich $\bar{b} = \bar{t}(\bar{a}, \bar{m}, \bar{k})$ und aus 11.2, [5] folgt $m \in R'$ und daraus $k \in R'$. Dies ist aber ein Widerspruch. Nehmen wir an, daß $k \in R'$ ist. Ist m aus R', so folgt $c = t(d, m, k)$, also $\bar{c} = \bar{t}(\bar{d}, \bar{m}, \bar{k})$. Nach 11.3, [5] ist $c \in R'$, also wieder ein Widerspruch. So erhält man $m \in R$. Wegen $a \in R'$ gilt $b = t(a, m, k)$ und wegen $c \in R$ gilt $c = t(d, m, k)$. Gemäß K_4'' (c) aus Definition 12, [5] gibt es ein einziges Paar (m, k) dieser Eigenschaft.

β) Es sei $b \in R$. Nehmen wir an, daß $k \in R'$ und $m \in R$ gilt. Daraus ergibt sich $b = t(a, m, k)$ und folglich $\bar{b} = \bar{t}(\bar{a}, \bar{m}, \bar{k})$. Nach 11.4, [5] ergibt sich $b \in R'$, also ein Widerspruch. Gilt $k, m \in R'$, so folgt $c = t(d, m, k)$, $\bar{c} = \bar{t}(\bar{d}, \bar{m}, \bar{k})$ und daher $c \in R'$, was wieder ein Widerspruch ist. Nehmen wir also an, daß $k \in R$. Hieraus folgt $b = t(a, m, k)$ und $d = t(c, m, k)$. Nach K_4'' (a) aus Definition 12, [5] gibt es ein einziges Paar (m, k) dieser Eigenschaft.

c) Gilt $c \in R'$, so führen wir den Beweis durch Vertauschung der Bezeichnungen analog zu b).

2. Nehmen wir an, daß $\bar{a} = \bar{c}$ und folglich $\bar{b} \neq \bar{d}$ gilt.

a) Sei $a \in R$, woraus auch $c \in R$ und $b, d \in R$ folgt. Ist $k \in R$, dann gilt $b = t(a, m, k)$, $d = t(c, m, k)$ und man erhält $\bar{b} = \bar{t}(\bar{a}, \bar{m}, \bar{k}) = \bar{t}(\bar{c}, \bar{m}, \bar{k}) = \bar{d}$, also ein Widerspruch. Es sei $k \in R'$. Wegen $a, c \in R$ gilt $a = t(b, m, k)$, $c = t(d, m, k)$. Gemäß K_4'' (e), [5] gibt es ein einziges Paar (m, k) dieser Eigenschaft.

b) Nehmen wir an, daß $a \in R'$ gilt, woraus auch $c \in R'$ folgt.

α) Es seien $b, d \in R$. Ist $k \in R$, dann ist auch $m \in R$ und es gilt $b = t(a, m, k)$, $d = t(c, m, k)$. Wegen $\bar{b} = \bar{t}(\bar{a}, \bar{m}, \bar{k})$, $\bar{d} = \bar{t}(\bar{c}, \bar{m}, \bar{k})$ gilt $\bar{b} = \bar{m} = \bar{d}$ nach 11.2, [5], was ein Widerspruch ist. Es seien $k \in R'$, $m \in R$. Hieraus folgt $b = t(a, m, k)$, $\bar{b} = \bar{t}(\bar{a}, \bar{m}, \bar{k})$ und $b \in R'$, also wieder ein Widerspruch. Nehmen wir also an, daß $k, m \in R'$ gilt. Dann ist $a = t(b, m, k)$ und $c = t(d, m, k)$. Nach K_4'' (b) gibt es ein einziges Paar (m, k) dieser Eigenschaft.

β) Es seien $b \in R$, $d \in R'$. Nehmen wir an, es liege $k \in R$, d.h. auch $m \in R$ vor. Dann gilt $b = t(a, m, k)$, $d = t(c, m, k)$ und nach 11.2, [5] folgt $\bar{b} = \bar{m} = \bar{d}$, also ein Widerspruch. Gilt $k \in R'$, $m \in R$, so ergibt sich $b = t(a, m, k)$, $\bar{b} = \bar{t}(\bar{a}, \bar{m}, \bar{k})$, also $b \in R'$. Dies ist wieder ein Widerspruch. Falls $k, m \in R'$ ist, dann gilt $a = t(b, m, k)$, $c = t(d, m, k)$. Nach K_4'' (d), [5] gibt es ein einziges Paar (m, k) dieser Eigenschaft.

ad (2) Seien $p = \langle a, b \rangle$, $q = \langle c, d \rangle$ Geraden aus L mit $p\varkappa \neq q\varkappa$ und nehmen wir an, daß $[x, y] \mathrm{I}\, p, q$ gilt.

1. Seien $b \in R$, $d \in R'$. Aus Definition der Menge Q_2 folgt $a \in R$. Nehmen wir an, daß $y \in R'$. Damit ergibt sich auch $x \in R'$. Wegen $b \in R$ gilt $y = t(x, a, b)$ und $\bar{y} = \bar{t}(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b})$. Nach 11.2, [5] folgt dann $\bar{y} = \bar{a}$, d.h. $a \in R'$. Dies ist aber ein Widerspruch. Sei $y \in R$. Dann ist $y = t(x, a, b)$. Gilt $c \in R'$, dann ergibt sich $x = t(y, c, d)$. Ist $c \in R$, so $x \in R$ und es gilt auch $x = t(y, c, d)$. Gemäß K_3'' 2(a) aus Definition 12, [5] gibt es ein einziges Paar (x, y) dieser Eigenschaft.

2. Es sei $\bar{a} \neq \bar{c}$.

a) Nehmen wir an, daß $b, d \in R$ ist. Damit auch $a, c \in R$ und es gilt $y = t(x, a, b)$, $y = t(x, c, d)$. Falls $x \in R'$, so gilt nach 11.2, [5] $\bar{t}(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b}) = \bar{a} = \bar{t}(\bar{x}, \bar{c}, \bar{d}) = \bar{c}$ und wir erhalten einen Widerspruch. Demnach ist $x \in R$. Da $\mathscr{T}$ ein lokaler Ternärring ist, gibt es nach K_3', [5] ein einziges Element $x \in R$, wo $t(x, a, b) = t(x, c, d)$. Daraus folgt dann $y = t(x, a, b)$ mit $y \in R$.

b) Es seien $b, d \in R'$.

α) Nehmen wir an, daß $c \in R'$. Wegen $\bar{a} \neq \bar{c}$ gilt $a \in R$. Ist $x \in R$, so folgt $x = t(y, c, d)$ und nach 11.3, [5] erhält man $\bar{x} = \bar{c}$, d.h. $x \in R'$, was auf einen Widerspruch führt. Nehmen wir an, daß $x \in R'$, dann ergibt sich $y = t(x, a, b)$, $x = t(y, c, d)$. Nach K_3'' 2(b), [5] gibt es ein einziges Paar (x, y) dieser Eigenschaft.

β) Nehmen wir an, daß $a, c \in R$ ist. Hieraus folgt $x \in R'$ und es gilt $y = t(x, a, b)$, $y = t(x, c, d)$. Nach K_3'' 1(b) gibt es ein einziges $x \in Q$ mit $t(x, a, b) = t(x, c, d) = y$.

3. Es sei $\bar{a} = \bar{c}$ und folglich $\bar{b} \neq \bar{d}$. Ist etwa $b \in R'$, dann $d \in R$ und man erhält Fall 1. Nehmen wir also an, daß $b, d \in R$. Dann auch $a, c \in R$ und es gilt $y = t(x, a, b)$, $y = t(x, c, d)$. Nach K_3'' 1(a) gibt es ein einziges Paar (x, y) dieser Eigenschaft.

Satz 6. *Ist $T = (R, R', t)$ ein erweiterter H-Ternärring, dann ist die projektive Ebene $\pi = (B, L, \mathrm{I})$ mit Homomorphismus aus Satz 5 eine projektive H-Ebene.*

Beweis. Mittels der Definition 13, [5] beweisen wir die Gültigkeit der Bedingungen (1) und (2) von der Definition 5.

ad (1) Seien $p = [a, b]$, $q = [c, d]$ Punkte aus B mit $p\varkappa = q\varkappa$. Dann gilt $\bar{a} = \bar{c}$, $\bar{b} = \bar{d}$. Nehmen wir an, daß $a, b \in R$, d.h. auch $c, d \in R$. Nach (2) (a) aus Definition 13, [5] gibt es entweder zwei verschiedene Paare $(m_i, k_i) \in R \times R$ derart, daß

$b = t(a, m_i, k_i)$, $d = t(c, m_i, k_i)$ gilt oder $(m_i, k_i) \in R \times R'$, wo $a = t(b, m_i, k_i)$, $c = t(d, m_i, k_i)$. Bezeichnen wir $r_1 = \langle m_1, k_1 \rangle$, $r_2 = \langle m_2, k_2 \rangle$, dann gilt $r_1 \neq r_2$ und $p, q \mathrm{I} r_1$; $p, q \mathrm{I} r_2$. Ganz ähnlich behandelt man die Fälle $a \in R'$, $b \in R$ und $a, b \in R'$.

ad (2) Seien $p = \langle a, b \rangle$, $q = \langle c, d \rangle$ Geraden aus L mit $p\varkappa = q\varkappa$. Damit folgt $\bar{a} = \bar{c}$, $\bar{b} = \bar{d}$. Nach (1) aus Definition 13, [5] gibt es verschiedene Elemente x_1, x_2 aus Q, wo $t(x_i, a, b) = t(x_i, c, d)$ für $i \in \{1, 2\}$. Wird $y_i = t(x_i, a, b)$ gesetzt, so erhält man nach Satz 11, [5] $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ und $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$. Danach gilt entweder $[x_1, y_1] \mathrm{I} p, q$; $[x_2, y_2] \mathrm{I} p, q$ oder $[y_1, x_1] \mathrm{I} p, q$; $[y_2, x_2] \mathrm{I} p, q$.

Literatur

[1] *Bacon, Ph. Y.:* Coordinatized H-planes. Diss. Univ. Florida, 1974.

[2] *Jemelčenkov, E. P.:* PH-ternar Jelmslevovoj projektivnoj ploskosti. Smolenskij matematičeskij sborník, t. 4, 1973, 93—101.

[3] *Klingenberg, W.:* Projektive und affine Ebenen mit Nachbarelementen. Math. Z., *60,* 1954, 384—406.

[4] *Klingenberg, W.:* Projektive Geometrien mit Homomorphismus. Math. Annalen, Bd. *132,* 1956, 180—200.

[5] *Machala, F.:* Erweiterte lokale Ternärringe. Czech. Math. Journal *27* (*102*), 1977, 560—572.

[6] *Pickert, G.:* Projektive Ebenen. Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955.

[7] *Stevenson, F. W.:* Projective planes. W. H. Freeman, San Francisco, 1972.

Anschrift des Verfassers: 771 46 Olomouc, Leninova 26, ČSSR (Přírodovědecká fakulta UP).