Czechoslovak Mathematical Journal, 25 (100) 1975, Praha

UNTERMANNIGFALTIGKEITEN REDUKTIVER RÄUME

PETER WINTGEN, Berlin

(Eingegangen am 6. August 1974)

In dieser Arbeit wird der Versuch unternommen, eine Theorie für Untermannigfaltigkeiten homogener Räume, in denen ein invarianter linearer Zusammenhang gegeben ist, zu entwickeln. Zu diesem Zweck werden gewisse Strukturen höherer Ordnung auf den Untermannigfaltigkeiten definiert, die diese bis auf eine Transformation des homogenen Raumes eindeutig bestimmen. Außerdem werden die Integrabilitätsbedingungen für das entsprechende Existenzproblem angegeben. Für Untermannigfaltigkeiten reduktiver Räume lassen sich diese Integrabilitätsbedingungen auf einfache Weise in Krümmung und Windung gewisser Zusammenhänge höherer Ordnung ausdrücken, die den Strukturen invariant zugeordnet sind.

Ein zentrales Hilfsmittel ist die Theorie der oskulierenden Abbildungen, wie sie von E. A. FELDMANN [2] und W. F. POHL [7] entwickelt wurde. Sie wird im einführenden ersten Abschnitt der Arbeit mit einfachen Beweisen kurz dargestellt. Im zweiten Abschnitt werden einige Hilfsformeln zum späteren Gebrauch zusammengestellt. In Abschnitt 3. werden die linearen Isotropiedarstellungen höherer Ordnung definiert und ihre Nützlichkeit an Beispielen demonstriert. Für homogene Räume mit invariantem linearem Zusammenhang lassen sie sich in einfacher Weise durch die gewöhnlichen Isotropiedarstellungen erster Ordnung ausdrücken. In Abschnitt 4. definieren wir die Strukturen höherer Ordnung auf einer Mannigfaltigkeit und zeigen in Verallgemeinerung einer Konstruktion von E. Feldmann [2], daß sie unter gewissen Voraussetzungen Zusammenhänge höherer Ordnung induzieren. In den folgenden Abschnitten benutzen wir diese Strukturen um unsere Hauptsätze für Untermannigfaltigkeiten zu formulieren und zu beweisen. Im letzten Abschnitt behandeln wir den Spezialfall, daß sich die Isotropiegruppe eines reduktiven Raumes als Invarianzgruppe eines kovarianten Tensors beschreiben läßt.

In der ganzen Arbeit verwenden wir Ideen und Techniken, die von den Prager Geometern, insbesondere von L. BOČEK, M. KOČANDRLE und O. KOWALSKI, entwickelt wurden. Ihnen habe ich auch für verschiedene Anregungen und Hinweise zu danken.

---

*) Diese Arbeit wurde durch zwei Studienaufenthalte im Februar 1972 und im Frühjahrssemester 1974 an der Math. Phys. Fakultät der Karls-Universität Prag gefördert.

1. TANGENTIALBÜNDEL HÖHERER ORDNUNG

Es seien X^n eine reelle differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C_∞, $C_\infty(X)$ der Ring reellen Funktionen auf X und O_x sei das Ideal der Funktionen, die im Punkt $x \in X^n$ verschwinden. Durch

$$J_x^k(X) = O_x/O_x^{k+1}$$

wird die Menge der k-Jets von Funktionen mit der Quelle x und dem Ziel $o \in R$ definiert. Die zu $f \in O_x$ gehörende Restklasse wird mit $j_x^k(f)$ bezeichnet. Wir können $J_x^k(X)$ als Vektorraum über R auffassen. Den dualen Raum $T_x^k(X^n) = J_x^k(X^n)^*$ nennt man den *Tangentialraum k-ter Ordnung von X^n im Punkt x.* Wir können jedes Element $Z \in T_x^k(X^n)$ als Linearform auf $C_\infty(X)$ auffassen, die auf O_x^{k+1} verschwindet:

$$Z(f) = \langle Z, j_x^k(f - f(x))\rangle\,; \quad f \in C_\infty(X)\,.$$

Die Einbettungen $O_x \subset O_x^2 \subset \dots$ induzieren Projektionen

$$\dots \to J_x^k(X) \to J_x^{k-1}(X) \to \dots \to J_x^1(X) = T_x^*(X)$$

und Einbettungen

$$T_x(X) = T_x^1(X) \subset \dots \subset T_x^{k-1}(X) \subset T_x^k(X) \subset \dots$$

In lokalen Koordinaten, welche in einer Umgebung von x definiert sind, können wir eine Funktion $f \in C_\infty(X^n)$ nach Potenzen von $y^i - x^i$ entwicken. Wir setzen zur Abkürzung $\partial_i = \partial/\partial x^i$, $\partial_{ij} = \partial^2/\partial x^i\,\partial x^j$ u. s. w. und erhalten

$$f(y) = f(x) + \sum_i \partial_i f(x)\,(y^i - x^i) + \dots + \frac{1}{k!}\sum_{i_1\dots i_k} \partial_{i_1\dots i_k} f(x)\,(y^{i_1} - x^{i_1})\dots \\ \dots(y^{i_k} - x^{i_k}) + h(y) \tag{1}$$

mit $h \in O_x^{k+1}$. Die Anwendung von $Z \in T_x^k(X^n)$ auf f ergibt dann

$$Z(f) = \sum_i \xi^i\,\partial_i f(x) + \dots + \sum_{i_1\dots i_k} \xi^{i_1\dots i_k}\,\partial_{i_1\dots i_k} f(x)$$

wofür wir symbolisch

$$Z = \sum_{|r|=1}^{k} \xi^r\,\partial_r \tag{2}$$

schreiben. Die Formel (2) ist die Koordinatendarstellung von Z in der Basis ∂_r, $1 \leqq |r| \leqq k$, von $T_x^k(X^n)$. Daß die ∂_r wirklich eine Basis von $T_x^k(X^n)$ bilden, folgt sofort aus den Relationen

$$\partial_r x^\mu = \delta_r^\mu \tag{3}$$

daß heißt, die Polynom-Jets $j_x^k(x^\mu)$, $1 \leqq |\mu| \leqq k$, liefern die zu ∂_r duale Basis von $J_x^k(X^n)$. (x^μ steht für $x^{i_1}\dots x^{i_s}$, wenn μ das Indexsystem $i_1, \dots, i_s$ ist).

Bei eine Übergang zu anderen Koordinaten bekommen wir die entsprechende lokale Darstellung aus der Kettenregel der Differentialrechnung. Ist $x^i = \varphi^i(x^{i'})$ die Koordinatentransformation mit

$$A^i_{i'_1 \dots i'_k} = \frac{\partial^k \varphi^i}{\partial x^{i'_1} \dots \partial x^{i'_k}},$$

dann ergibt sich

$$\partial_{r'} = \sum_{|r|=1}^{k} A^r_{r'} \partial_r$$

mit

$$(4) \qquad (A^r_{r'}) = \begin{pmatrix} A^i_{i'} & & & \\ A^i_{i'j'} & A^i_{i'} A^j_{j'} & & \mathrm{O} \\ \vdots & * & \ddots & \\ A^i_{i'_1 \dots i'_k} & \dots & A^{i_1}_{i'_1} & \dots A^{i_k}_{i'_k} \end{pmatrix}$$

In dem mit $*$ bezeichnenten Gebiet stehen gewisse Polynome in den A^i_{v}. Die Vereinigung der $T^k_x(X^n)$, $x \in X$, ist somit ein reelles Vektorraumbündel $T^k(X)$ mit der Faserdimension

$$r(n, k) = n + \binom{n+1}{2} + \dots + \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k}{k} - 1\,.$$

Die volle Transformationsmatrix (4) ist recht kompliziert gebaut. Meist kommt man aber mit der folgenden einfachen Regel aus

$$(5) \qquad \partial_{i'_1 \dots i'_k} \equiv A^{i_1}_{i'_1} \dots A^{i_k}_{i'_k} \partial_{i_1 \dots i_k} \bmod T^{k-1}(X^n)\,.$$

Zum Beispiel folgt unmittelbar aus (5): Durch

$$\varepsilon_k(\partial_{i_1 \dots i_k}) = \partial_{i_1} \circ \dots \circ \partial_{i_k}$$

wird ein linearer Isomorphismus ε_k von $T^k_x(X)/T^{k-1}_x(X)$ auf die k-te symmetrische Potenz $\overset{k}{\bigcirc} T_x(X)$ des Tangentialraums $T_x(X)$ definiert, der nicht von den Koordinaten abhängt. Durch Nullsetzen auf $T^{k-1}_x(X)$ erhalten wir somit eine Epimorphie

$$\varepsilon_k : T^k_x(X) \to \overset{k}{\bigcirc} T_x(X)$$

und es ergibt sich eine exakte Sequenz

$$(6) \qquad o \to T^{k-1}(X) \to T^k(X) \to \overset{k}{\bigcirc}\, T(X) \to o$$

von Vektorraumbündeln und Morphismen über X.

Eine differenzierbare Abbildung $f : X \to Y$ induziert durch $\langle f^{(k)}Z, j^k\varphi\rangle = \langle Z, j^k(\varphi \circ f)\rangle$ das *k-te Differential* $f^{(k)} : T^k(X) \to T^k(Y)$ von f, so daß das folgende Diagramm komutativ wird:

$$\begin{array}{ccccccccc} o' & \to & T^{k-1}(X) & \to & T^k(X) & \to & \overset{k}{\bigcirc}\, T(X) & \to & o \\ & & \big\downarrow {\scriptstyle f^{(k-1)}} & & \big\downarrow {\scriptstyle f^{(k)}} & & \big\downarrow {\scriptstyle \overset{k}{\bigcirc}\, \mathrm{d}f} & & \\ o & \to & T^{k-1}(Y) & \to & T^k(Y) & \to & \overset{k}{\bigcirc}\, T(Y) & \to & o\,. \end{array}$$

Satz 1.1 (W. F. Pohl [7]) *Jeder lineare Zusammenhang auf X^n induziert für $k = 2, 3, \ldots$ eine Splitterung der Sequenz* (6):

$$o \longrightarrow \overset{k}{\bigcirc}\, T(X) \xrightarrow{\delta_k} T^k(X) \xrightarrow{\omega_k} T^{k-1}(X) \longrightarrow o\,.$$

Diese Splitterung kann dadurch charakterisiert werden, daß für jedes $x_0 \in X$

$$\omega_k(\partial_{i_1 \ldots i_k})|_{x_0} = 0 \tag{8}$$

in Normalkoordinaten mit dem Zentrum x_0 gilt, sie stimmt für affin verwandte Zusammenhänge überein.

Beweis. Da die Splitterung durch ω_k und damit durch (8) eindeutig bestimmt ist, brauchen wir nur die Existenz zu zeigen. Ist X^n der affine Raum mit dem kanonischen flachen Zusammenhang, so setzen wir einfach

$$\omega_k\Big(\sum_{|r| \leqq k} \xi^r\, \partial_r\Big) = \sum_{|r| < k} \xi^r\, \partial_r \tag{9}$$

wobei die ∂_r Differentiationen nach den affinen Punktkoordinaten bezeichnen. Die Linearität der affinen Koordinatentransformationen sichert die Invarianz der Definition (9). Im allgemeinen Fall wird ω_k durch Kommutativität des folgenden Diagramms definiert ($x_0 \in X$ beliebig)

$$\begin{array}{ccc} T_0^k(T_{x_0}(X^n)) & \underset{\approx}{\xrightarrow{\exp_{x_0}^{(k)}}} & T_{x_0}^k(X^n) \\ \big\downarrow {\scriptstyle \omega_k} & & \big\downarrow {\scriptstyle \omega_k} \\ T_0^{k-1}(T_{x_0}(X^n)) & \underset{\approx}{\xrightarrow{\exp_{x_0}^{(k-1)}}} & T_{x_0}^{k-1}(X^n)\,. \end{array}$$

In Normalkoordinaten gilt $\exp_{x_0} = \mathrm{id}$ und ω_k hat die Koordinatendarstellung (9), insbesondere gilt (8). Die letzte Behauptung ist trivial, da die Konstruktion nur vom Exponential des Zusammenhangs Gebrauch macht.

Bemerkung 1.2. Man kann durch Symmetrisierung zu jedem Zusammenhang einen affin verwandten Zusammenhang ohne Torsion finden. Die Beziehung zwischen den symmetrischen Zusammenhängen und den Splitterungen der Sequenz

$$o \to T(X) \to T^2(X) \to \overset{2}{\bigcirc}\, T(X) \to o$$

ist bijektiv. Ist $\omega : T^2(X) \to T(X)$ eine Faserepimorphie, so erhält man mit $\nabla_X Y = \omega(XY)$ die kovariante Ableitung eines symmetrischen Zusammenhangs, der ω nach Satz 1.1 erzeugt (vgl. z. B. [2]).

Durch Verknüpfung $P_k = \omega_2 \circ \ldots \circ \omega_k$ bekommen wir eine Vektorraumbündelepimorphie über X

$$P_k : T^k(X) \to T(X)\,. \tag{10}$$

Ist $f : Y^m \to X^n$ eine differenzierbare Abbildung, dann definieren wir durch $D^k f = P_k \circ f^{(k)}$ $(D^1 f = \mathrm{d}f)$ die *k-te oskulierende Abbildung von f*. Sie setzt das Differential von f auf $T^k(Y)$ fort. Im Gegensatz zum Differential hängt sie aber von dem auf X^n gegebenen linearen Zusammenhang ab. Wir definieren außerdem durch

$$S_y^k(f) = D_y^k(f)\,(T_y^k(Y))$$

den *k-ten Schmiegraum* von f im Punkt $f(y)$ und nennen $N_y^k = T_x(X)/S_y^k(f)$, $x = f(y)$ den *k-ten Normalraum* von f in y. Den Unterraum $S_y^{k+1}(f)/S_y^k(f)$ von N_y^k bezeichnen wir mit H_y^k. Dann definieren wir die *k-te Fundamentalform* $\alpha^k(f)$ von f im Punkt $y \in Y$ so, daß das folgende Diagramm mit exakten Zeilen kommutativ wird:

$$\begin{array}{ccccccccc} o & \to & T_y^{k-1}(Y) & \to & T_y^k(Y) & \to & \overset{k}{\bigcirc}\, T_y(Y) & \to & o \\ & & \downarrow{\scriptstyle D_y^{k-1}f} & & \downarrow{\scriptstyle D_y^k f} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_y^k(f)} & & \\ o & \to & S_y^{k-1}(f) & \to & S_y^k(f) & \to & H_y^{k-1} & \to & o\,. \end{array} \tag{11}$$

Eine leichte Diagrammjagd zeigt, daß $\alpha_y^k(f)$ existiert und eindeutig bestimmt ist. Für $\alpha^k(X_1 \circ \ldots \circ X_k)$, $X_i \in T_y(Y)$, werden wir auch $\alpha^k(X_1, \ldots, X_k)$ schreiben.

Wenn $D^k f$ konstanten Rang hat, dann können wir das Normalbündel k-ter Ordnung von f bilden

$$N_f^n = \bigcup_y T_{f(y)}(X)/S_y^k\,.$$

Die $(k+1)$-te Fundamentalform α^{k+1} fassen wir dann als Vektorbündelmorphismus

$$\alpha^{k+1} : \overset{k+1}{\bigcirc}\, T(Y) \to N_f^k$$

oder als symmetrische $(k+1)$-Form auf Y mit Werten im k-ten Normalbündel von f auf.

In dieser Arbeit nennen wir $f : Y \to X$ *k-stabil*, wenn $D^k f$ fasersurjektiv ist.

2. DIFFERENTIATION VON TANGENTIALVEKTOREN k-TER ORDNUNG NACH EINEM PARAMETER

Es sei $f : M \to X$ eine differenzierbare Abbildung und

$$u \in M \to Z_u \in T^k_{f(u)}(X)$$

ein Lift von f in das Bündel $T^k(X)$. Für jeden Tangentialvektor $A \in T_{u_0}(M)$ definieren wir *die Ableitung von Z nach A* als das Element $AZ \in T^{k+1}_{f(u_0)}(X)$, welches jeder Funktion F auf X den Wert

$$(AZ)(F) = A(Z_u F)$$

zuordnet. Hierbei betrachten wir $Z_u f$ als Funktion von u, die wir nach A differenzieren.

Ist $Z = \sum_{|r| \leqq k} \xi^r(u)\, \partial_r$ eine Koordinatendarstellung von Z in lokalen Koordinaten x^i von X und $A = du/dt|_{t=0}$, dann gilt

$$(AZ)\, F = \frac{d}{dt} \{\sum_r \xi^r(u)\, \partial_r F(x(t))\}\ ; \quad \text{mit } x(t) = f(u(t)) =$$

$$= \sum_r \dot{\xi}^r\, \partial_r F + \sum_{r,i} \xi^r\, \partial_{ri} F \dot{x}^i\,.$$

Das heißt, AZ hat die Koordinatendarstellung

(1)
$$AZ = \sum_{|r| \geqq k} \dot{\xi}^r\, \partial_r + \sum_{|s| \geqq k} \xi^r \dot{x}^i\, \partial_{ri}\,.$$

Beispiel 1. $M = X$, $f = \mathrm{id}_X$. Für jeden Schnitt Z von $T^k(X)$ und jeden Vektor $A \in T_{x_0}(X)$ können wir $AZ \in T^{k+1}_{x_0}(X)$ bilden und jedes $W \in T^{k+1}_{x_0}(X)$ läßt sich als Linearkombination solcher Elemente schreiben. Ist $\varphi : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung, dann gilt

(2)
$$\varphi^{(k+1)}(AZ) = A\varphi^{(k)}(Z)\,.$$

Beispiel 2. $f(u) = x_0$. Ein Lift von f ist hier eine Vektorwertige Funktion $u \to Z_u \in$ $\in T^k_{x_0}(X)$ und AZ ist die gewöhnliche Ableitung von Z nach A.

Beispiel 3. Es sei (G, X) eine Links-Transformationsgruppe. Wir schreiben für $l_g^{(k)}Z$ einfach gZ. Für $A \in T_q(G)$ und $Z \in T^k_x(X)$ setzen wir

(3)
$$A * Z = A(gZ) \in T^{k+1}_{qx}(X)$$

und erhalten so eine bilineare Abbildung

$$T_q(G) \times T^k_x(X) \to T^{k+1}_{qx}(X)\,.$$

Sind $g(u)$ und Z_u differenzierbare Abbildungen von M in G bzw. $T^k(X)$ und $A \in T_{u_0}(M)$ ein Tangentialvektor von M, dann gilt die Produktregel

(4) $$A(gZ) = \mathrm{d}g(A) * Z + gAZ\,,$$

welche man leicht unter Benutzung lokaler Koordinaten von X beweist. Für das $*$-Produkt gelten außerdem die folgenden Regeln

(5) $$(L_g A) * Z = g(A * Z)\,, \quad (R_g A) * Z = A * (aZ)\,,$$

welche unmittelbar aus der Definition folgen.

Ist $H_{x_0} = \{h,\, hx_0 = x_0\}$ die Isotropiegruppe eines festen Punktes $x_0 \in X$, so können wir die Darstellungen

$$\iota_k : H_{x_0} \to GL(T_x^{k_0}(X))$$

durch $\iota_k(h) = l_h^{(k)}$ definieren. Für jedes Element E der Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ von H_{x_0} gilt dann

(6) $$\mathrm{d}\iota_k(E)\, Z = E * Z\,,$$

da hier die Situation von Beispiel 2 vorliegt.

3. ISOTROPIEDARSTELLUNGEN HÖHERER ORDNUNG

Es sei $X = G/H$ ein homogener Raum und H die Isotropiegruppe eines festen Punktes $x_0 \in X$. Für jedes $k = 1, 2, \ldots$ ist mit $\iota_k(h) = l_h^{(k)}$ die *lineare Isotropiedarstellung k-ter Ordnung*

(1) $$\iota_k : H \to GL(T_{x_0}^k(X))$$

von H über dem Raum $T_{x_0}^k(X)$ *definiert.* Es ist anzunehmen, daß die Darstellungen (1) auch für $k > 1$ bei der differentialgeometrischen Untersuchung homogener Räume wichtig sind. Wir geben hier zwei Beispiele.

3.1. Ein Hauptsatz für Untermannigfaltigkeiten (nach L. Boček [1]). Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Die Vereinigung der Vektorräume Hom . . $(T_u^k(M), T_{x_0}^k(X))$, $u \in M$, bildet ein Vektorraumbündel E_k über M. Die Wirkung von H auf $T_{x_0}^k(X)$, welche durch die Isotropiedarstellung k-ter Ordnung definiert ist, induziert eine Wirkung auf E_k. Den entsprechenden Faktorraum bezeichnen wir mit Σ_k. Σ_k ist ein (im allgemeinen nicht mehr differenzierbares) stetiges Faserbündel auf M.

Ist nun eine differenzierbare Abbildung $f : M \to X$ gegeben, dann induziert diese einen globalen Schnitt $\sigma_k(f)$ in Σ_k, der in dem Sinne differenzierbar ist, daß er lokal durch differenzierbare Schnitte in E_k repräsentiert werden kann. Solche Schnitte bekommt man mit Hilfe lokaler Lifts von f in die Gruppe G. Es sei $g : U \in M \to G$ eine lokale Abbildung mit $g(u)\, x_0 = f(u)$, dann setzen wir

$$\varphi_u^k = g(u)^{-1} f_u^{(k)}$$

und $\sigma_k(f)_u$ sei dann die zu φ_u^k gehörende Äquivalenzklasse. Es ist das Hauptergebnis der Arbeit [1], daß f unter gewissen Voraussetzungen durch $\sigma_k^{(f)}$ bis auf G-Äquivalenz charakterisiert ist. Diese Voraussetzungen sind: Wenn $E = o$ das einzige Element von $\mathfrak{h}$ mit $d\iota_k(E)$ Im $\varphi_k = \{o\}$ ist, dann sagen wir, in $u \in M$ ist die Bedingung B_k für f erfüllt. Ist dann die Wirkung von G auf X effektiv, M zusammenhängend und für jedes $u \in M$ die Bedingung B_{k-1} für f erfüllt, so gibt es zu jeder Abbildung $f' : M \to X$ mit $\sigma_k(f') = \sigma_k(f)$ ein Element $g_0 \in G$ mit $f' = l_{g_0} \circ f$. Umgekehrt werden in [1] auch die Bedingungen angegeben, die ein Schnitt σ in Σ_k erfüllen muß, damit es eine Abbildung $f : M \to X$ der einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M in X mit $\sigma_k(f) = \sigma$ gibt.

Bemerkung 1. Der Begriff „Isotropiedarstellung k-ter Ordnung" tritt in [1] nicht explizit auf.

Bemerkung 2. Es ist klar, daß es nur dann Abbildungen mit der Eigenschaft B_k geben kann, wenn das Differential der Isotropiedarstellung k-ter Ordnung von $X = G/H$ injektiv ist. Wenn auf X ein G-invarianter linearer Zusammenhang gegeben ist, dann sind die k-stabilen Abbildungen wohldefiniert (vgl. Abschnitt 1). Es läßt sich leicht zeigen, daß die k-stabilen Abbildungen die Bedingung B_k erfüllen.

3.2. Invariante Zusammenhänge. Die G-invarianten symmetrischen linearen Zusammenhänge auf $X = G/H$ entsprechen den G-invarianten Splitterungen von

$$o \to T(X) \to T^2(X) \to \overset{2}{\bigcirc}\, T(X) \to o$$

(vgl. Abschnitt 1) und diese stehen in eineindeutiger Beziehung zu den H-invarianten Zerlegungen

$$T_{x_0}^2(X) = V \oplus W$$

mit $V = T_{x_0}(X)$. Insbesondere ergibt sich das folgende Kriterium für die Existenz eines invarianten linearen Zusammenhanges in der zweiten Isotropiedarstellung: *Auf X existiert genau dann ein G-invarianter linearer Zusammenhang, wenn $T_{x_0}(X)$ ein H-invariantes Komplement in $T_{x_0}^2(X)$ besitzt.*

In diesem Fall lassen sich die Isotropiedarstellungen ι_k sehr einfach beschreiben. Zunächst gibt die mehrmalige Anwendung von Satz 1.1 eine G-invariante Isomorphie der Vektorraumbündel

$$T^k(X) \approx T(X) \oplus (\overset{2}{\bigcirc}\, T(X)) \oplus \ldots \oplus (\overset{k}{\bigcirc}\, T(X)).$$

Insbesondere ergibt sich in x_0 eine H-invariante Zerlegung

$$T^k_{x_0}(X) = V \oplus (\overset{2}{\odot} V) \oplus \ldots \oplus (\overset{k}{\odot} V)$$

mit $V = T_{x_0}(X)$. Wegen Formel (1.5) ist die Einschränkung von ι_k auf die i-te symmetrische Potenz $\overset{i}{\odot} V$ von V die gewöhnliche Tensordarstellung von $\iota = \iota_1$. Es ergibt sich also die Zerlegung

$$\iota_k = \iota \oplus (\overset{2}{\odot} \iota) \oplus \ldots \oplus (\overset{k}{\odot} \iota).$$

4. ZUSAMMENHÄNGE UND G-STRUKTUREN HÖHERER ORDNUNG

Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und in $T^k(M)$ sei ein Unterbündel λ der Kodimension n gegeben. Wir bezeichnen mit E_λ das Faktorbündel $T^k(M)/\lambda$ und mit $P_\lambda(M)$ das zu E_λ assoziierte Hauptfaserbündel, dessen Elemente wir als lineare Isomorphien der Fasern von E_λ auf R^n interpretieren. $G \subset GL(n, \mathrm{R})$ sei eine abgeschlossene Untergruppe der linearen Gruppe.

Definition 4.1. Einen Zusammenhang Γ auf $P_\lambda(M)$ nennen wir *linearen Zusammenhang k-ter Ordnung vom Typ n auf M*. Ist eine Reduktion Q von $P_\lambda(M)$ auf die Gruppe G gegeben, so nennen wir das Paar (λ, Q) eine *verallgemeinerte G-Struktur k-ter Ordnung vom Typ n* (kurz (G, k, n)-*Struktur*) *auf M*.

Für $k = 1$, $n = 0$, bekommen wir die gewöhnlichen linearen Zusammenhänge und G-Strukturen.

Es sei nun wie oben ein Unterbündel $\lambda \subset T^k(M)$ gegeben mit $k \geqq 2$. Wir haben natürliche Projektion $P : T^k(M) \to E_\lambda$ die jedem $Z \in T^k_u(M)$ seine Restklasse $\{Z\} = Z + \lambda_u$ zuordnet. Wir wollen voraussetzen, daß die Einschränkung von P auf $T^{k-1}(M)$ surjektiv ist. P induziert dann eine Isomorphie

$$(1) \qquad E_\lambda \approx T^{k-1}(M)/\lambda^{k-1}\,; \quad \lambda^{k-1} = \lambda \cap T^{k-1}(M).$$

Satz 4.2. *Es sei $\lambda \subset T^k(M)$ ein Unterbündel, so daß $P : T^{k-1}(M) \to E_\lambda$ surjektiv ist. Außerdem soll für jedes Vektorfeld X auf M und jeden Schnitt Z von λ^{k-1} der Schnitt XZ in λ liegen,*

$$(2) \qquad \Gamma\, T(M)\, \Gamma\lambda^{k-1} \subset \Gamma\lambda.$$

Es gibt dann genau einen linearen Zusammenhang auf E_λ, dessen kovariante Ableitung der Bedingung

$$(3) \qquad \nabla_X\{Z\} = \{XZ\}$$

für jedes Vektorfeld X auf M und jeden Schnitt Z in $T^{k-1}(M)$ genügt.

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar, da $P : T^{k-1}(M) \to E_\lambda$ fasersurjektiv ist und sich daher jeder Schnitt W von E_λ in der Gestalt $\{Z\}$ mit $Z \in \Gamma\, T^k(M)$ schreiben läßt. Wenn $W = P(Z_1)$ mit $Z_1 \in \Gamma\, T^{k-1}(M)$ gilt, dann haben wir $Z - Z_1 \in \Gamma \lambda^{k-1}$ und folglich $X(Z - Z_1) \in \Gamma\lambda$. Daher gilt $\{XZ\} = \{XZ_1\}$ und deshalb ist $\nabla_X\{Z\}$ durch (3) wohldefiniert. Offenbar hat ∇ die Eigenschaften einer kovarianten Differentiation. Ist zum Beispiel F eine reelle Funktion auf M, dann gilt

$$X(FZ) = X(F)\, Z + F \,.\, XZ$$

und daher

$$\nabla_X(F\{Z\}) = A(F)\,\{Z\} + F\,\nabla_X\{Z\}\,.$$

Der wichtige Spezialfall, daß λ in $T^k(M)$ zu $T^{k-1}(M)$ komplementär ist, wurde von E. Feldmann [2] behandelt. Hier ist die Bedingung (2) trivial erfüllt und λ ist gleichwertig mit einer Splitterung der Sequenz (1.6). Der entsprechende Zusammenhang auf $T^{k-1}(M)$ hat die leicht zu beweisenden Eigenschaften

$$\nabla_X Z = XZ \tag{4}$$

$$R(X, Y)\, Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z = o \tag{5}$$

für Vektorfelder X, Y auf M und jeden Schnitt Z von $T^{k-1}(M)$.

Umgekehrt gibt es zu jedem Zusammenhang auf $T^{k-1}(M)$, der den Bedingungen (4), (5) genügt, genau eine Splitterung

$$T^k(M) = T^{k-1}(M) \oplus \lambda\,,$$

die diesen Zusammenhang gemäß Satz 4.2 erzeugt. (Feldmann nennt solche Zusammenhänge Dissections $(k-1)$-ter Ordnung. Im Fall $k = 2$ haben wir (4), (5) durch das Verschwinden der Torsion zu ersetzen).

Wir stellen nun einige zum größten Teil wohlbekannte Tatsachen für die Krümmungstheorie der linearen Zusammenhänge k-ter Ordnung vom Typ n zusammen. Dabei wollen wir voraussetzen, daß $P : T(M) \to E_\lambda$ injektiv ist, so daß wir $T(M)$ mit dem entsprechenden Unterbündel in E_λ identifizieren können.

Es sei also ein Zusammenhang auf $P_\lambda(M)$ gegeben. Wir bezeichnen mit ω die Zusammenhangsform und mit ∇ die kovariante Ableitung auf E. Außerdem sei mit $\pi : P_\lambda \to M$ die Bündelprojektion von P_λ bezeichnet und die kanonische Form $\vartheta : P_\lambda \to R^n$ sei durch

$$\vartheta(X) = b\, \mathrm{d}\pi(X)\,; \quad X \in T_b(P_\lambda) \tag{6}$$

definiert. $\Omega = \mathrm{D}\omega$, $\Theta = \mathrm{D}\vartheta$ $(\mathrm{D}\alpha = \mathrm{d}\alpha \circ \mathrm{pr}_h)$ bezeichnen Krümmungs- und Windungsform. Die Morphismen $R : \Gamma\, T(M) \oplus \Gamma\, T(M) \to \mathrm{Hom}\,(\Gamma E_\lambda, \Gamma E_\lambda)$, $T :$ $: \Gamma\, T(M) \to \Gamma E_\lambda$ der Krümmung und Windung sind durch

$$R(X, Y)\, Z = [\nabla_X \,.\, \nabla_Y]\, Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{7}$$

und

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \tag{8}$$

definiert. Ist $b_\iota : U_\iota \to P_\lambda$ ein lokaler Schnitt von P_λ und bezeichnen $\omega_\iota = b_\iota^* \omega$, $\vartheta_\iota = b_\iota^* \vartheta$, $\Omega_\iota = b_\iota^* \Omega$, $\Theta_\iota = b_\iota^* \Theta$ die zugehörigen lokalen Formen, so ergeben sich die Beziehungen:

$$\omega_\iota = \nabla \circ b_\iota^{-1} - d\,, \quad \vartheta_\iota = b_\iota\,, \quad \Omega_\iota = b_\iota \circ R \circ b_\iota^{-1}\,, \quad \Theta_\iota = b_\iota \circ T\,.$$

Die erste Gleichung zum Beispiel bedeutet ausführlich geschrieben

$$\omega_\iota(X)\, V = \nabla_X(b_\iota^{-1} V) - \mathrm{d}V(X)$$

für jedes Vektorfeld X auf U_ι und jede R^n-wertige Funktion V, auf die wir die (n, n)-Matrix $\omega_\iota(X) \in \mathfrak{gl}(n, R)$ anwenden. Es gelten schließlich die Strukturgleichungen von E. Cartan:

$$\mathrm{d}\vartheta = -\omega \wedge \vartheta + \Theta \tag{9}$$

$$\mathrm{d}\omega = -\omega \wedge \omega + \Omega\,. \tag{10}$$

Die hier angeführten Fakten ordnen sich in die Theorie der „soldered“ Vektorbündel, welche $T(M)$ als Unterbündel enthalten, von O. Kowalski [6] ein.

Definition 4.3. Eine (G, k, n)-Struktur (Q, λ) heißt *von spezieller Art*, wenn $T(M) \to E_\lambda$ injektiv und $T^{k-1}(M) \to E_\lambda$ surjektiv ist. Gilt (2), so nennen wir den durch (3) definierten Zusammenhang den *kanonischen Zusammenhang von* (Q, λ) und (Q, λ) heiße *normal*, wenn Q mit dem kanonischen Zusammenhang verträglich ist (d. h. die Einschränkung von ω auf Q ist $\mathfrak{g}$-wertig bzw. Q ist gegenüber den Parallelverschiebungen invariant).

5. UNTERMANNIGFALTIGKEITEN AFFIN ZUSAMMENHÄNGENDER HOMOGENER RÄUME

In diesem Abschnitt sollen folgende Voraussetzungen gelten: Es sei $X = G/H$ der Faktorraum einer Lieschen Gruppe G nach einer abgeschlossenen Untergruppe H. Mit $\pi(g) = gH$ bezeichnen wir die kanonische Projektion von G auf X und die Wirkung von G auf X sei durch

$$l_g(x) = gx = \pi(ga)\,; \quad x = \pi(\mathrm{a})$$

erklärt und effektiv. X sei zusammenhängend und es sei auf X ein G-invarianter linearer Zusammenhang gegeben.

Bekanntlich folgt aus diesen Voraussetzungen, daß die Isotropiedarstellung $\iota_1 : H \to \mathrm{GL}(T_{x_0}(X))$, $x_0 = \pi(e)$, treu ist. Das werde der Vollständigkeit halber kurz bewiesen: Ist $\iota_1(h)$ die identische Abbildung von $T_{x_0}(X)$, dann definieren wir F als die Menge aller Punkte $x \in X$ mit $\mathrm{d}l_h \mid T_x(X) = \mathrm{id}$. F ist nicht leer, abgeschlossen und offen. Die letzte Behauptung folgt aus der Invarianz der Exponentialabbildung des Zusammenhangs:

$$l_h \circ \exp_x = \exp_{hx} \circ \mathrm{d}l_h .$$

Also gilt $F = X$, $l_h = \mathrm{id}_X$ und somit $h = e$.

$P(X)$ sei das Reperbündel von X, dessen Bündelprojektion wir ebenfalls mit π bezeichnen. Wir fixieren ein Element $z_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ von $P(X)$ und definieren eine Einbettung von G in $P(X)$ durch $\iota(g) = gz_0$. Außerdem wollen wir die Identifikation

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = T_{x_0}(X) = R^n$$

vornehmen (die erste sei durch $\mathrm{d}\pi$ und die zweite durch z_0 definiert).

Bemerkung 5.1 Durch obige Festlegungen ergibt sich eine gewisse Willkür in den folgenden Betrachtungen. Sie reduziert sich im Wesentlichen darauf, daß wir unter den G-invarianten H-Strukturen mit $\iota(G)$ eine herausgreifen.

Der Zusammenhang induziert Projektionen $P_k : T^k(X) \to T(X)$ für jedes $k = 2, 3, \ldots$, die mit der Wirkung von G vertauschbar sind:

$$\mathrm{d}l_g \circ P_k = P_k \circ l_g^{(k)} . \tag{1}$$

(Dies folgt aus der Invarianz der Exponentialabbildung). Wegen $P_k \mid T^{k-1}(X) = P_{k-1}$ werden wir P für alle P_k schreiben. Wir definieren noch eine b'lineare Abbildung $\beta : \mathfrak{g} \times \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ durch $\beta(E, A) = P(E * A)$ (vgl. Beispiel 2.3). Für $E \in \mathfrak{h}$ und $h \in H$ gelten die Beziehungen

$$\beta(E, A) = \mathrm{d}\iota_1(E)\, A \tag{2}$$

$$\beta(\mathrm{Ad}(h)\, E, A) = h\beta(F, h^{-1}A) \tag{3}$$

(vgl. (2.5), (2.6)). Außerdem gilt

$$\beta(E, P(Z)) = P(E * Z) \tag{4}$$

für $E \in \mathfrak{g}$, $Z \in T_{x_0}^k(X)$. Diese letzte Formel beweist man leicht mit Hilfe von Normalkoordinaten mit dem Zentrum x_0.

Es sei nun eine $(k-1)$-stabile Immersion $f : M \to X$ gegeben. Diese induziert auf folgende Weise eine (H, k, n)-Struktur spezieller Art auf M (vgl. Def. 4.3). Zunächst sei $\lambda = \mathrm{Ker}\, D^k f$. Wie in Abschnitt 4 setzen wir $E_\lambda = T^k(M)/\lambda$ und bezeichnen mit P_λ das zu E_λ assoziierte Hauptfaserbündel, welches aus den linearen Isomorphien der Fasern von E_λ auf R^n besteht. $\mathrm{D}^k f$ verschwindet auf λ und induziert daher eine Faserisomorphie $E_\lambda \to T(X)$ und eine Bündelhomomorphie

$$f' : P_\lambda \to P(X)\,.$$

Ist $Z \in T_u^k(M)$, so bezeichnen wir wieder mit $\{Z\}$ die entsprechende Restklasse in E_λ. Liegt $b \in P_\lambda$ ebenfalls in der Faser über u. so gilt

$$f'(b)\,\mathrm{D}^k f(Z) = b\{Z\}\,.$$

Wir setzen nun $Q = f'^{-1}(G)$ und erhalten so eine (H, k, n)-Struktur (λ, Q) auf M. Im folgenden Diagramm stehen die steigenden Pfeile für Einbettungen und die fallenden für Projektionen.

$$\begin{tikzcd}
P^\lambda \arrow[rrr, "f'"] \arrow[ddd] & & & P(X) \arrow[ddd] \\
& Q \arrow[ul] \arrow[r] \arrow[dl] & G \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& & & \\
M \arrow[rrr, "f"'] & & & X
\end{tikzcd}$$

Wir wollen zeigen, daß f durch (λ, Q) bis auf G-Äquivalenz eindeutig bestimmt ist. Zu diesem Zweck dient der folgende Hilfssatz. Es sei $\omega_0 : T(G) \to \mathfrak{g}$ die kanonische Form der Gruppe G und $\omega = f'^*\omega_0$ die durch $f : Q \to G$ aus ω_0 induzierte $\mathfrak{g}$-wertige 1-Form auf Q.

Hilfssatz 5.2. *Es sei $b_\iota : U_\iota \to Q$ ein lokaler Schnitt von Q, A ein Vektorfeld auf U_ι und Z ein Schnitt in $T^{k-1}(U_\iota)$, dann gilt für $\omega_\iota = b_\iota^*\omega$:*

(5) $$\pi\,\omega_\iota(A) = b_\iota(A)$$

(6) $$b_\iota\{AZ\} = A\,b_\iota\{Z\} + \beta(\omega_\iota(A),\ b_\iota\{Z\})\,.$$

Beweis. Wir definieren mit $\iota(g_\iota) = f'(b_\iota)$ einen lokalen Lift g_ι von f in G. Es gilt $\omega_\iota = g_\iota^*\omega_0 = g_\iota^{-1}\,\mathrm{d}g_\iota$ und

(7) $$b_\iota\{Z\} = \iota(g_\iota)\,D^k f(Z) = g_\iota^{-1} D^k f(Z)\,.$$

(5) folgt leicht aus (7) und $\pi g^{-1}\,\mathrm{d}g_\iota = g_\iota^{-1}\,\mathrm{d}f$. Um (6) zu zeigen, setzen wir $V = g_\iota^{-1} f^{(k)}(Z)$ und wenden (2.4) an. Es ergibt sich wegen $A(g_\iota V) = A f^{(k)}(Z)$

$$A f^{(k)}(Z) = \mathrm{d}g_\iota(A) * g_\iota^{-1} f^{(k)}(Z) + g_\iota A g_\iota^{-1} f^{(k)}(Z)\,.$$

Nach Anwendung von g_ι^{-1} auf diese Gleichung erhalten wir unter Berücksichtigung von (2.2) und (2.5)

(8) $$g_\iota^{-1} f^{(k+1)}(AZ) = \omega_\iota(A) * g_\iota^{-1} f^{(k)}(Z) + A g_\iota^{-1} f^{(k)}(Z)\,.$$

Wenden wir darauf P an und beachten (1), (4) und (7), so erhalten wir gerade (6), womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Satz 5.3. *Es sei* $f : M \to X$ *eine* $(k-1)$*-stabile Immersion.* f *induziert durch* $\lambda = \operatorname{Ker} \mathrm{D}^k f$, $Q = f'^{-1}(G)$ *eine* (H, k, n)*-Struktur spezieller Art auf* M. *Ist* M *zusammenhängend, dann ist* f *durch* (λ, Q) *bis auf* G*-Äquivalenz eindeutig bestimmt. Umgekehrt gibt es zu jeder* (H, k, n)*-Struktur* (λ, Q) *spezieller Art auf* M *eine* $(k-1)$*-stabile Immersion* f *von* M *in* X, *die diese Struktur* (λ, Q) *induziert, wenn* M *einfach zusammenhängend ist und* (λ, Q) *folgende Eigenschaft hat: Es gibt eine Familie von lokalen Schnitten* b_ι *von* Q *deren Definitionsbereiche* U_ι *ganz* M *überdecken und* $\mathfrak{g}$*-wertige* 1*-Formen* ω_ι *auf* U_ι *die* (5), (6) *und*

$$\mathrm{d}\omega_\iota = -\tfrac{1}{2}[\omega_\iota, \omega_\iota] \tag{9}$$

erfüllen.

Beweis. Es seien f und $\tilde{f}$ zwei $(k-1)$-stabile Immersionen, die dieselbe (H, k, n)-Struktur (Q, λ) erzeugen. Wir benutzen einen lokalen Schnitt $b_\iota : U \to Q$ um lokale Lifts g_ι und $\tilde{g}_\iota$ von f bzw. $\tilde{f}$ durch $\iota(g_\iota) = f'(b_\iota)$ bzw. $\iota(\tilde{g}_\iota) = \tilde{f}'(b_\iota)$ zu definieren. Wir setzen $\alpha_\iota = \omega_\iota - \tilde{\omega}_\iota$ mit $\omega_\iota = g_\iota^{-1}\,\mathrm{d}g_\iota$, $\tilde{\omega}_\iota = \tilde{g}_\iota^{-1}\,\mathrm{d}\tilde{g}_\iota$ und zeigen, daß α_ι verschwindet: Aus (5) folgt $\pi\alpha_\iota = o$, das heißt, α_ι ist $\mathfrak{h}$-wertig. Aus (6) und (2) folgt weiter, daß α_ι verschwinden muß und daher $\omega_\iota = \tilde{\omega}_\iota$ gilt. Wenn wir ohne Beschränkung U_ι als zusammenhängend voraussetzen, dann können wir aus dieser Gleichung schließen, daß sich die beiden Lifts nur um eine Linkkstranslation L_a von G unterscheiden und es gilt $\tilde{f}(u) = a_\iota f(u)$ für $u \in U_\iota$. Ist $U_\varkappa$ eine andere offene Menge mit $f(u) = a_\varkappa f(u)$ für $u \in U_\varkappa$ und gilt $U_\iota \cap U_\varkappa \neq \emptyset$ dann gilt $a_\varkappa = a_\iota$. Für $u \in U_\varkappa \cap U_\iota$ gilt nämlich $a_\iota^{-1} a_\varkappa \mathrm{D}^k f = \mathrm{D}^k f$ woraus die Behauptung folgt, da f $(k-1)$-stabil ist. Wir haben also $\tilde{f} = a_\iota f$ auf $U_\varkappa \cap U_\iota$ und weiter auf ganz M, da M zusammenhängend ist.

Es sei nun umgekehrt eine (H, k, n)-Struktur (λ, Q) spezieller Art auf M mit der genannten Eigenschaft vorgegeben. Wir setzen U_ι als einfach zusammenhängend voraus. Wegen (7) gibt es eine Abbildung $g_\iota : U_\iota \to G$ mit $g_\iota^{-1}\,\mathrm{d}g_\iota = \omega_\iota$. Wir setzen $f_\iota = \pi g_\iota$ und bezeichnen mit (λ_ι, Q_ι) die von f_ι erzeugte Struktur auf U_ι. Wir wollen zeigen, daß diese Struktur mit der Einschränkung von (λ, Q) auf U_ι übereinstimmt. Dazu betrachten wir die Abbildung $\varphi_\iota = g_\iota^{-1}\,\mathrm{D}^k f_\iota$ von $T^k(U_\iota)$ in $T_{x_0}(X)$. Offenbar sind λ_ι und Q_ι durch φ_ι eindeutig bestimmt. Andererseits gilt wie im Beweis von Hilfssatz 5.2

$$\varphi_\iota(A) = \pi\,\omega_\iota(A) \tag{10}$$

$$\varphi_\iota(AZ) = A\,\varphi_\iota(Z) + \beta(\omega_\iota(A), \varphi_\iota(Z)) \,. \tag{11}$$

Aus (10) und (11) können wir rekursiv schließen, daß φ_ι durch ω_ι eindeutig bestimmt ist und insbesondere $\varphi_\iota(Z) = b_\iota\{Z\}$ gilt, woraus unsere Behauptung folgt. Ist M einfach zusammenhängend, dann können wir f_ι mit den üblichen Fortsezungsschlüssen (Monodromieprinzip) auf ganz M fortsetzen.

Beispiel 5.4. Wir betrachten den folgenden einfachen Spezialfall: $X = \mathrm{A}^n$ sei der affine Raum mit dem kanonischen flachen Zusammenhang und G eine Untergruppe der affinen Gruppe $\mathrm{A}(n)$. Ist dann f eine $(k-1)$-stabile Immersion von M in A^n, so können wir als Lift die Abbildung $g_\iota(u) = t_{x_0 f(u)}$, Parallelverschiebung von x_0 nach $f(u)$, nehmen. Die Bedingungen (5), (6), (9) reduzieren sich auf die einzige Gleichung

$$(12) \qquad b_\iota\{AZ\} = A\, b_\iota\{Z\}$$

für den entsprechenden globalen Schnitt b_ι in Q. Um das einzusehen, identifizieren wir die Lie-Algebra $\mathfrak{A}(n)$ von $\mathrm{A}(n)$ mit $\mathrm{R}^n \otimes \mathrm{gl}(n, \mathrm{R})$. Für $X = (A, E) \in \mathfrak{A}(n)$ und $B \in \mathrm{R}^n$ ergibt sich nach einer leichten Rechnung (vgl. auch den nächsten Abschnitt)

$$\beta(X, E) = EB\,.$$

Dir Form $\omega_\iota = (\alpha, \gamma)$ mit $\alpha(A) = b_\iota(A)$ und $\gamma(A) = o$, $A \in T(U)$, genügt wegen (12) den Bedingungen (5), (6). Die Gleichung (9) läßt sich komponentenweise in der Gestalt

$$\mathrm{d}\alpha + \alpha \wedge \gamma = o\,, \quad \mathrm{d}\gamma + \gamma \wedge \gamma = o$$

schreiben. Die zweite Gleichung ist trivial erfüllt und die erste folgt leicht aus (12):

$$2\,\mathrm{d}\alpha(A, B) = A\, b_\iota(B) - B\, b_\iota(A) - b_\iota[A, B] = o\,.$$

6. UNTERMANNIGFALTIGKEITEN REDUKTIVER RÄUME

Es sei $X = G/H$ ein homogener Raum mit den gleichen Voraussetzungen (und Identifikationen) wie im letzten Abschnitt. Außerdem wollen wir voraussetzen, daß die H-Struktur $\iota(G) \subset P(X)$ mit dem invarianten Zusammenhang verträglich ist, das heißt, X ist ein reduktiver Raum. Die Einschränkung der Zusammenhangsform ω auf G ist also $\mathfrak{g}$-wertig. Der Horizontalraum $\mathfrak{m} = \mathrm{Ker}\,\omega$ in $T_e(G)$ ist ein $\mathrm{Ad}(H)$-invariantes Komplement zu $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$ und es gilt

$$(1) \qquad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}\,.$$

Zur Theorie der reduktiven Räume vgl. etwa [4], wo man auch den Beweis der folgenden Tatsache findet: Die Kurven

$$(2) \qquad x(t) = \exp(tE)\, x_0\,, \quad E \in \mathfrak{m}$$

sind Geodätische, bezogen auf den affinen Parameter t.

Wegen $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \approx \mathfrak{m}$ können wir $\mathfrak{m}$ mit $T_{x_0}(X)$ identifizieren. Es gilt dann

$$(3) \qquad \beta(\mathfrak{m}.\ \mathfrak{m}) = \{o\}\,.$$

Zum Beweis benutzen wir Normalkoordinaten x^i mit dem Zentrum x_0. Für $T =$

$= t^i \partial_i$ ist die Kurve $x(t) = \exp(tT)\,x_0$ durch $x^i(t) = (tt^i)$ gegeben und wir erhalten für $S = s^j \partial_j$

$$T * S = t^i s^j \partial_{ij}$$

und $\beta(T, S) = P(T * S) = o$.

Ist $A = (A_1, A_2)$ die Komponentenzerlegung von $A \in \mathfrak{g} = \mathfrak{m} \otimes \mathfrak{h}$, so ergibt sich

$$\beta(A, S) = A_2 S\,. \tag{4}$$

(Wir identifizieren hier und im folgenden H mit $\iota_1(H) \subset GL(\mathfrak{m})$ und $\mathfrak{h}$ mit $d\iota_1(\mathfrak{h}) \subset \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$).

Die kanonische Form $\omega_0 : T(G) \to \mathfrak{g} = \mathfrak{m} \otimes \mathfrak{h}$ besitzt die Komponentendarstellung $\omega_0 = (\vartheta, \omega)$, wobei ϑ und ω die Einschränkungen von kanonischer Form und Zusammenhangsform auf G sind.

Es sei nun $f : M \to X$ eine $(k - 1)$-stabile Immersion und (λ, Q) die zugehörige (H, k, n)-Struktur auf M. Die durch ω auf P^μ induzierte Zusammenhangsform bezeichnen wir ebenfalls mit ω und ϑ sei die kanonische Form von P^μ. Die Gleichungen (5.5) und (5.6) lassen sich dann in der Gestalt

$$\vartheta_\iota(A) = b_\iota(A) \tag{5}$$

$$b_\iota\{AZ\} = A\, b_\iota\{Z\} + \omega_\iota(A)\, b_\iota\{Z\} \tag{6}$$

schreiben. Aus (5.6) oder (6) folgt, daß λ der Bedingung (4.2) genügt. Wir haben daher nach Satz 4.2 den kanonischen Zusammenhang auf P_λ, für dessen kovariante Ableitung nach (4.3) und (6) gilt:

$$b_\iota \nabla_A\{Z\} = A\, b_\iota\{Z\} + \omega_\iota(A)\,\{b_\iota Z\}\,.$$

ω_ι ist also die zum kanonischen Zusammenhang gehörende lokale Zusammenhangsform, d. h., der durch f aus dem invarianten Zusammenhang von X induzierte Zusammenhang stimmt mit dem kanonischen Zusammenhang der normalen (H, k, n)-Struktur (λ, Q) überein. Die Komponentenzerlegung der Gleichung (5.9) ergibt unter Berücksichtigung der Strukturgleichungen (4.9), (4.10) und (1)

$$\Theta_\iota = [\vartheta_\iota, \vartheta_\iota]_{\mathfrak{m}} \tag{7}$$

$$\Omega_\iota = [\vartheta_\iota, \vartheta_\iota]_{\mathfrak{f}} \tag{8}$$

wobei wir mit $[\cdot]_{\mathfrak{m}}$ und $[\cdot]_{\mathfrak{f}}$ die entsprechenden Projektionen auf $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{h}$ bezeichnen. Die Gleichungen (7) und (8) sind gleichwertig mit

$$\Theta = [\vartheta, \vartheta]_{\mathfrak{m}} \tag{9}$$

$$\Omega = [\vartheta, \vartheta]_{\mathfrak{f}} \tag{10}$$

Wir können nun Satz 5.3 wie folgt spezialisieren:

Satz 6.1. *Es sei $f : M \to X$ eine $(k-1)$-stabile Immersion in den reduktiven Raum X. Durch $\lambda = \operatorname{Ker} D^k f$, $Q = f'^{-1}(G)$ wird auf M eine normale (H, k, n)-Struktur induziert. Für die Windungs- und die Krümmungsform des kanonischen Zusammenhangs gelten auf Q die Gleichungen* (9), (10). *Ist M zusammenhängend, so ist f durch (λ, Q) bis auf G-Äquivalenz eindeutig bestimmt. Ist M einfach zusammenhängend, so gibt es zu jeder normalen (H, k, n)-Struktur, für die* (9), (10) *auf Q gelten, eine $(k-1)$-stabile Immersion, die diese Struktur erzeugt.*

Bemerkung 6.2. Wenn der invariante Zusammenhang von X symmetrisch ist bzw. $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$ gilt, dann wird aus (9)

$$\Theta = o\,. \tag{11}$$

Im Fall $X = \mathrm{A}^n$, $G \subset \mathrm{A}(n)$ ist (11) sogar trivial erfüllt, denn es gilt wegen (5), (6)

$$A\,\vartheta_\iota(B) - B\,\vartheta_\iota(A) = -\omega_\iota(A)\,\vartheta_\iota(B) + \omega_\iota(B)\,\vartheta_\iota(A) - \vartheta_\iota([A, B])$$

wofür wir auch kürzer

$$\mathrm{d}\vartheta_\iota = -\omega_\iota \wedge \vartheta_\iota$$

schreiben können. Die Integrabilitätsbedingungen (9), (10) reduzieren sich in diesem Fall also auf

$$\Omega = o\,. \tag{12}$$

7. REDUKTIVE RÄUME MIT INVARIANTEM TENSORFELD

Wir wollen die Voraussetzungen und Identifikationen des letzten Abschnitts beibehalten und zusätzlich noch eine Annahme machen: Auf $\mathrm{R}^n = T_{x_0}(X)$ sei ein q-fach kovarianter Tensor gegeben, der die Isotropiegruppe $H \subset \mathrm{GL}(n, \mathrm{R})$ in folgendem Sinne charakterisiert: $g \in \mathrm{GL}(n, \mathrm{R})$ liegt genau dann in H, wenn $g^* t_0 = t_0$ gilt.

S_i sei der Unterraum aller Vektoren A von R^n, für die $t_0(\ldots, \underset{(i)}{A}, \ldots)$ identisch verschwindet und $S = \bigcap_{i=1,\ldots,q} S_i$ nennen wir den Nullraum von t_0. Wir setzen weiter voraus, daß der Nullraum trivial ist

$$S = \{o\}\,.$$

Wir definieren auf ganz X das G-invariante Tensorfeld t durch

$$t_x = g^* t_0\,, \quad g x_0 = x\,.$$

Ist $f : M \to X$ eine $(k-1)$-stabile Immersion, dann können wir auf $T^k(M)$ für jedes $k = 1, 2, \ldots$ durch

$$\tau = \mathrm{D}^k f^* t \tag{1}$$

ein differenzierbares Tensorfeld definieren, d. h., einen Schnitt im Bündel $\overset{q}{\otimes}\, T^k(M)^*$. Auf E_λ definieren wir das Tensorfeld τ' durch

$$\tau'(\{Z_1\}, \ldots, \{Z_q\}) = \tau(Z_1, \ldots, Z_q) \tag{2}$$

oder $\tau' = f'^* t$. Die Elemente von Q sind durch

$$b^* t_0 = \tau'_{\pi(b)} \tag{3}$$

charakterisiert (π Bündelprojektion von P_λ). Anders ausgedrückt: τ'_u hat bezüglich b dieselben Komponenten wie t_0 bezüglich z_0. Deshalb gilt: Jeder Zusammenhang, der mit Q verträglich ist, für den ist auch τ' parallel. Insbesondere gilt dies für den kanonischen Zusammenhang. Wir haben daher für jedes Vektorfeld A auf M und Schnitte $Z_1, \ldots, Z_q$ von $T^{k-1}(M)$:

$$A\,\tau'(\{Z_1,\} \ldots, \{Z_q\}) = \sum_{i=1}^{q} \tau'(\{Z_1\}, \ldots, \{AZ_i\}, \ldots, \{Z_q\}) \tag{4}$$

wofür wir auch

$$A\,\tau(Z_1, \ldots, Z_q) = \sum_{i=1}^{q} \tau(Z_1, \ldots, AZ_i, \ldots, Z_q) \tag{5}$$

schreiben können.

λ ist die Vereinigung der Nullräume von τ und Q ist nach (3) ebenfalls durch τ eindeutig bestimmt. Daher ist die $(k-1)$-stabile Abbildung f nach Satz 5.3 durch τ bis auf G-Äquivalenz eindeutig bestimmt, wenn M zusammenhängend ist.

Es sei nun umgekehrt auf der einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M ein Schnitt τ des Bündels $\overset{q}{\otimes}\, T^k(M)^*$ gegeben, der den folgenden Bedingungen genügt:

I. Für jedes Vektorfeld A auf M und beliebige Schnitte $Z_1, \ldots, Z_q$ von $T^{k-1}(M)$ gilt (5).

II. Die Vereinigung der Nullräume von τ ist ein Unterbündel λ der Kodimension n von $T^k(M)$. Die kanonische Projektion $T^k(M) \to E_\lambda = T^k(M)/\lambda$ ist injektiv auf $T(M)$ und surjektiv auf $T^{k-1}(M)$.

Wir bezeichnen wieder mit P_λ das zu E_λ assoziierte Hauptfaserbündel und mit τ' den durch τ auf E_λ induzierten Tensor und fordern weiter:

III. Es existiert ein Element $b_0 \in P_\lambda$ mit

$$b_0^* t_0 = \tau_u\,, \quad u = \pi(b)\,. \tag{6}$$

Aus I, II, III folgt bereits, daß die Menge Q aller $b \in P_\lambda$, die (3) erfüllen, eine normale (H, k, n)-Struktur (λ, Q) auf M definiert. Bevor wir das beweisen, formulieren wir noch die letzte Bedingung für τ:

IV. Für die Windungs- und die Krümmungsform des kanonischen Zusammenhangs gelten auf Q die Gleichungen (6.9), (6.10).

Es sei nun A ein Vektorfeld auf M und Z ein Schnitt in $\lambda \cap T^{k-1}(M)$. Wir haben zu zeigen, daß AZ in λ liegt. Es seien $Z_1, \ldots, Z_{q-1}$ Schnitte in $T^{k-1}(M)$. Wegen (5) gilt

$$\tau(Z_1, \ldots, \underset{(i)}{AZ}, \ldots, Z_{q-1}) = o \tag{7}$$

für $1 \leqq i \leqq q - 1$. Wir können $AZ = Z' + Z''$ mit $Z' \in \Gamma\, T^{k-1}(M)$ und $Z'' \in \Gamma\lambda$ setzen (Bedingung II). Aus (7) folgt $Z' \in \Gamma\lambda$ und daher gilt $AZ \in \Gamma\lambda$. Es sei nun ∇ die kovariante Ableitung des kanonischen Zusammenhangs. Aus (5) folgt für jedes Vektorfeld A auf M und beliebige Schnitte V_i, $i = 1, \ldots, q$, in E_λ

$$A\, \tau'(V_1, \ldots, V_q) = \sum_{i=1}^{q} \tau'(V_1, \ldots, \nabla_A V_i, \ldots, V_q) \tag{8}$$

und (8) besagt gerade, daß τ' parallel bezüglich des kanonischen Zusammenhangs ist. Auf horizontalen Wegen in P_λ sind die Komponenten von τ' konstant, das heißt, die Menge Q ist gegenüber den Parallelverschiebungen invariant. Um einzusehen, daß Q eine Reduktion des Bündels P_λ auf die Gruppe H ist, zeigen wir, daß es zu jedem $u_1 \in M$ eine Umgebung U_ι und einen Schnitt $b_\iota : U_\iota \to P_\lambda \mid U_\iota$ gibt, dessen Bild in Q liegt. Dazu verbinden wir u_1 mit u_0 durch einen Weg $u(t)$ und verschieben das Element b_0 (aus Bedingung III) parallel nach u_1. Wir erhalten ein Element b_1 in $\pi^{-1}(u_1)$. Um u_1 wählen wir eine kugeldiffeomorphe Umgebung U_ι und definieren $b_\iota(u)$ durch radiale Parallelverschiebung von u_1 nach u.

Wenn die Bedingungen I–IV erfüllt sind, können wir Satz 6.1 anwenden und erhalten eine $(k - 1)$-stabile Abbildung $f : M \to X$ die (λ, Q) erzeugt. Da aber τ durch (λ, Q) eindeutig bestimmt ist, gilt $\tau = D^k f^* t$. Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen:

Satz 7.1. *Es sei $f : M \to X$ eine $(k - 1)$-stabile Immersion. Durch $\tau = D^k f^* t$ induziert f einen globalen Schnitt in $\overset{q}{\otimes}\, T^k(M)^*$ für den die Eigenschaften* I–IV *gelten. f ist bis auf G-Äquivalenz eindeutig durch τ bestimmt, wenn M zusammenhängend ist. Ist M einfach zusammenhängend und gibt es auf M ein Schnitt τ in $\overset{q}{\otimes}\, T^k(M)^*$, der die Eigenschaften* I–IV *hat, dann existiert eine $(k - 1)$-stabile Immersion $f : M \to X$ mit $D^k f^* t = \tau$.*

Bemerkung 7.2. Satz 7.1 wurde für den Fall $X = A^n$, $G \subset A(n)$ schon von M. Kočandrle [3] bewiesen. O. Kowalski [5] gab einen besonders durchsichtigen Beweis des Satzes von M. Kočandrle an, der sich auf die Integrabilitätsbedingung (5.11) stützt.

Wir betrachten nun den wichtigen Spezialfall, daß $t_0 = \langle\, , \rangle$ eine euklidische Metrik ist. Wir haben dann $H = O(n)$ und X ist eine homogene Riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung. Es sei $f : M \to X$ eine k-stabile Immersion.

Wir setzen voraus, daß die oskulierenden Abbildungen $D^i f$, $i = 1, \ldots, k$, konstanten Rang haben. Die Fundamentalformen

$$(9) \qquad \alpha^i : \overset{i}{\bigcirc} T(M) \to N_f^{i-1}$$

sind dann wohldefiniert (vgl. Abschnitt 1). Wir setzen aus formalen Gründen $\alpha^1 = df$ und definieren die i-te metrische Grundform β_i durch

$$(10) \qquad \beta_i(X_1, \ldots, X_i, Y_1, \ldots, Y_i) = \langle \alpha^i(X_1, \ldots, X_i), \alpha^i(Y_1, \ldots, Y_i) \rangle$$

für Vektorfelder $X_1, \ldots, X_i, Y_1, \ldots, Y_i$ auf M. Die Tensoren β_i lassen sich folgendermaßen durch τ ausdrücken: Wir setzen

$$(11) \qquad X_1 \ldots X_i = Z_1 + Z_2\,; \quad Y_1 \ldots Y_i = W_1 + W_2$$

wobei Z_1, W_1 Schnitte von $T^{i-1}(M)$ sind und Z_2, W_2 zu $T^{i-1}(M)$ in jedem Punkt von M τ-orthogonal sind. Es gilt dann offenbar

$$(12) \qquad \beta_i(X_1, \ldots, X_i, Y_1, \ldots, Y_i) = \tau(Z_2, W_2)\,.$$

Einem Hinweis von M. Kočandrle folgend (vgl. die Bemerkung am Schluß der Arbeit [3]), wollen wir zeigen, daß sich auch umgekehrt τ aus den β_i eindeutig bestimmen läßt:

Auf $T(M)$ gilt nach Definition $\tau(X, Y) = \beta_1(X, Y)$. Sind X, Y, Z drei Vektorfelder, so gilt nach (5)

$$Z\,\beta_1(X, Y) = \tau(ZX, Y) + \tau(X, ZY)\,.$$

Vertauschen wir X, Y, Z zyklisch und addieren die Gleichungen alternierend, dann erhalten wir

$$(13) \qquad \tau(Y, XZ) = \tfrac{1}{2}(Z\beta_1(X, Y) + X\beta_1(Y, Z) - Y\beta_1(X, Z) + \\ + \beta_1(X, [Y, Z]) - \beta_1(Z, [X, Y]) + \beta_1(Y, [X, Z]))\,.$$

Gleichung (13) zeigt, daß der τ-Annullator von $T(M)$ in $T^2(M)$ durch β_1 bestimmt ist. Für die Vektorfelder X_1, X_2, Y_1, Y_2 können wir gemäß (11)

$$X_1 X_2 = Z_1 + Z_2\,; \quad Y_1 Y_2 = W_1 + W_2$$

setzen und erhalten

$$(14) \qquad \tau(X_1 X_2, Y_1 Y_2) = \beta_1(Z_1, W_1) + \beta_2(X_1, X_2, Y_1, Y_2)\,.$$

τ ist also auf $T^2(M)$ durch β_1, β_2 bestimmt.

Wir zeigen nun, daß der τ-Annullator von $T^i(M)$ in $T^{i+1}(M)$ bereits durch die Einschränkung von τ auf $T^i(M)$ bestimmt ist. Dazu seien X, Y, Z Vektorfelder und V, W Schnitte in $T^{i-1}(M)$. Es gilt dann nach (5)

$$X\,\tau(YW, ZV) = \tau(XYW, ZV) + \tau(YW, XZV)\,. \tag{15}$$

In dieser Gleichung wenden wir 6 mal die Permutation

$$\begin{pmatrix} 12345 \\ 23154 \end{pmatrix}$$

auf die Buchstaben X, Y, Z, V, W an und addieren die 6 Gleichungen mit dem Signum der Permutation versehen. Es ergibt sich für $2\tau(XYW, ZV)$ eine Summe von Ausdrücken der Gestalt $\pm\tau(AW, BV)$, wobei A bzw. B eines der Vektorfelder X, Y, Z, $[X, Z]$, $[X, Y]$, $[Y, Z]$ ist. Damit ist die Behauptung gezeigt und wir sehen außerdem, daß sich Funktionen der Gestalt $\tau(AV, W)$ mit $A \in \Gamma\, T(M)$, $V, W \in \Gamma\, T^i(M)$ schon mit $\tau \mid T^i(M)$ berechnen lassen. Analog zu (14) können wir schließlich $\tau(X_1, \ldots, X_{i+1}, Y_1, \ldots, Y_{i+1})$ mit Hilfe von $\tau \mid T^i(M)$ und β_{i+1} berechnen.

Folgerung 7.3. *Die k-stabile Abbildung $f : M \to X$ ist durch die metrischen Grundformen $\beta_1, \ldots, \beta_k$ bis auf G-Äquivalenz eindeutig bestimmt.*

Bemerkung 7.4. Die obigen Betrachtungen behalten ihre Gültigkeit, wenn wir die euklidische Metrik t_0 durch eine pseudoeuklidische ersetzen. Wir haben uns dann aber auf Immersionen mit nicht isotropen Schmiegräumen zu beschränken.

Literatur

[1] *L. Boček:* Untermannigfaltigkeiten von homogenen Räumen. Czech. Math. Journal *21* (*96*) (1971), 1—4.

[2] *E. Feldmann:* The Geometry of Immersions I. Trans. Amer. Math. Soc. *120* (1965), 185—224.

[3] *M. Kočandrle:* Differential Geometry of Submanifolds in affine space with tensor structure. Czech. Math. Journal *17* (*92*) (1967), 434—446.

[4] *S. Kobayashi, K. Nomizu:* Foundations of Differential Geometry. Interscience New York 1963 u. 1969.

[5] *O. Kowalski:* A characterisation of osculating maps. Spisy přírodov. fak. Univ. J. E. Purkyně v Brně T *4* (1968), 175—186.

[6] *O. Kowalski:* Immersions of Riemannian manifolds with a given normal bundle structure. Czech. Math. Journal *21* (*96*) (1971), 136—156.

[7] *W.F.Pohl*: Connexions in the differential geometry of higher order. Trans. Amer. Math. Soc. *125* (1966), 310—325.

Adresse des Autors: 108 Berlin, Unter den Linden 6, DDR (Sektion Mathematik der Humboldt-Universität).