Czechoslovak Mathematical Journal

Zdeněk Hustý

Algebraische Theorie der Transformation der linearen Differentialgleichungen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 25 (1975), No. 2, 317,318–319,320–329

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101324

Czechoslovak Mathematical Journal, 25 (100) 1975, Praha

ALGEBRAISCHE THEORIE DER TRANSFORMATION DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

(Eingegangen am 25. Mai 1972)

VORBEMERKUNGEN

Anstatt "homogene lineare Differentialgleichung" sagen wir kurz "Gleichung". Es sei s eine natürliche Zahl. Mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen wir im folgenden diese Spaltenvektoren von der Dimension s: $w_s(y)$ hat Komponenten $y^{(k-1)}$, $k = 1, 2, \ldots, s$, wo y eine $(s-1)$-mal stetig differenzierbare Funktion bedeutet. $\varrho_s(\alpha_k)$ hat Komponenten α_k, $k = 1, 2, \ldots, s$. $e_s^k(\alpha)$ hat k-te Komponente α und die übrigen Komponenten sind gleich Null, $e_s(\alpha) = e_s^s(\alpha)$. Einen Zeilenvektor kennzeichnen wir durch ein hochgestelltes T, z. B. $e_s(\alpha)^T = [0, \ldots, 0, \alpha]$. Das Symbol a_{ik} oder $\{A\}_{ik}$ bedeutet das allgemeine Element der Matrix A. Mit dem Symbol $a_{k\cdot}$ oder $\{A\}_{k\cdot}$ bezw. $a_{\cdot k}$ oder $\{A\}_{\cdot k}$ bezeichnen wir den Zeilenvektor bzw. den Spaltenvektor der Matrix A. Die kvadratische Matrix $I_s^{(j)}(a_k)$, $0 \leqq j \leqq s-1$, der Ordnung s, bei der alle Elemente, die außerhalb der j-ten unteren Diagonale stehen, gleich Null sind, heißt die j-te Diagonalmatrix. Sie hat also in k-ter Spalte und in j-ter Diagonale das Element a_k, d. h. $\{I_s^{(j)}(a_k)\}_{ik} = a_k$ für $k = 1, 2, \ldots, s-j$; $i = k + j$, $\{I_s^{(j)}(a_k)\}_{ik} = 0$ für $i \neq k + j$, $i, k = 1, 2, \ldots, s$. $I_s^{(0)}(a_k)$ ist die Diagonalmatrix diag $[a_1, \ldots, a_s]$ und wir schreiben statt $I_s^{(0)}(a_k)$ kurz $I_s(a_k)$. Ferner $I_s(1)$ ist die Einheitsmatrix der Ordnung s, die wir auch kurz mit I_s bezeichnen werden. Bekanntlich gilt für die Multiplikation dieser Matrizen die Formel $I_s^{(j)}(a_k)\, I_s^{(r)}(b_k) = I_s^{(j+r)}(c_k)$ mit $c_k = a_{k+r} b_k$. Ferner ist $W_s(y) = [w_s(y_1), w_s(y_2), \ldots, w_s(y_s)]$ die Wronskische Matrix von s Funktionen.

Wir werden uns mit der Gleichung n-ter Ordnung ($n \geqq 2$) im reellen Gebiet von der Gestalt

$$\text{(a)} \qquad y^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a_i(x)\, y^{(n-i)}(x) = 0$$

beschäftigen. Wir setzen voraus, daß alle brauchbare Ableitungen der Funktionen, die in unseren Betrachtungen vorkommen, in einem Intervall stetig sind. Mit dem

Symbol $r_s(a)$ bezeichnen wir den Zeilenvektor, dessen Komponenten die Koeffizienten der Gleichung (a) in dieser Anordnung $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{n+1-s}$ bilden, d. h. $r_s(a) = [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{n+1-s}]$. Speziell der Vektor $r_{n+1}(a)$ mit $a_0 = 1$ ist der Zeilenvektor, dessen Komponenten alle Koeffizienten der Gleichung (a) bilden. Dieser Vektor wird der Vektor der Koeffizienten von (a) — kurz der Vektor von (a) — genannt. Ist

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{bmatrix}$$

eine infache Frobeniussche Matrix der Ordnung n, so können wir das System

$$(0.1) \qquad w_n(y)' = I_n\left[\binom{n}{n-k}\right]^{-1} A_n I_n \left[\binom{n}{n+1-k}\right] w_n(y) = 0$$

auf die Gestalt

$$(0.2) \qquad \boxed{\begin{array}{c} w_{n-1}(y') \\ \hline y^{(n)} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} w_{n-1}(y') \\ \hline -r_n(a)\, I_n \left[\binom{n}{n+1-k}\right] w_n(y) \end{array}}$$

umformen. Die Gleichung (0.2) ist offensichtlich erfüllt dann und nur dann, wenn $y(x)$ eine Lösung der Gleichung

$$(0.3) \qquad y^{(n)} + r_n(a)\, I_n \left[\binom{n}{n+1-k}\right] w_n(y) = 0$$

darstellt, d. i. wenn $y(x)$ eine Lösung von (a) ist. Die Gleichung (0.3) läßt sich dann als Skalarprodukt zwei Vektoren in der Form

$$(0.4) \qquad r_{n+1}(a)\, I_{n+1} \left[\binom{n}{n+1-k}\right] w_{n+1}(y) = 0$$

schreiben, wo $r_{n+1}(a)$ der Vektor von (a) ist. Anstatt der Gleichung (0.1) bzw. (0.3) kann man die Matrizenschreibweise

$$(0.1') \qquad W_n(y)' = I_n\left[\binom{n}{n-k}\right]^{-1} A_n I_n \left[\binom{n}{n+1-k}\right] W_n(y)$$

bzw.

$$(0.3') \qquad e_n(1)^T\, W_n(y)' + r_n(a)\, I_n\left[\begin{pmatrix} n \\ n+1-k \end{pmatrix}\right] W_n(y) = 0$$

benutzen, wo $W_n(y)$ die Wronskische Matrix n-Lösungen von (a) darstellt.

Bei der Forschung verschiedener Eigenschaften von (a) kann man eine geeignete Schreibweise ausnützen. Z. B. die Form (0.1) eignet sich für das Studium der unhomogenen Gleichung. Die unhomogene Gleichung nimmt die Gestalt

$$(0.5) \qquad w_n(z)' = I_n\left[\begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}^{-1}\right] A_n I_n\left[\begin{pmatrix} n \\ n+1-k \end{pmatrix}\right] w_n(z) + e_n\,[f(x)]$$

und wir machen für eine Lösung von (0.5) den Ansatz $w_n(z) = W_n(y)\, y_n[c_k(x)]$, wo $W_n(y)$ die Wronskische Matrix eines Fundamentalsystems von (0.1) darstellt. Dann erhalten wir leicht durch die Variation der Konstanten die Formel

$$w_n(z) = W_n(y) \int_{x_0}^{x} W_n^{-1}(y)\, e_n[f(t)]\,\mathrm{d}t + y_n(c_k)\,,$$

$$c_k = \text{Konst.}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Zum Ausbau der Transformationstheorie eignet sich die Gleichung (0.4).

1. TRANSFORMATION

1.0 Der kürzeren Schreibweise halber verzichten wir in (0.4) auf die Indizes $n + 1$, denn im diesen Abschnitt alle Matrizen die Ordnung $n + 1$ und alle Vektoren die Dimension $n + 1$ besitzen werden.

Weiterhin gehen wir bei der Transformation von der Originalgleichung

$$(\mathrm{a}) \qquad r(a)\, I\left[\begin{pmatrix} n \\ n+1-k \end{pmatrix}\right] w(y) = 0$$

aus. In Übereinstimmung mit der klassischen Theorie gewinnen wir aus (a) mit dem Ansatz

$$(1) \qquad y(x) = u(x)\, z[T(x)]\,, \quad t = T(x)\,, \quad u(x) \neq 0 \neq T'(x) \quad \text{in} \quad I\,,$$

die Gleichung

$$(\bar{\mathrm{a}}) \qquad r(\bar{a})\, I\left[\begin{pmatrix} n \\ n+1-k \end{pmatrix}\right] w(z) = 0$$

die wir das Bild von (a) der Koordinaten $T(x)$, $u(x)$ nennen – kurz Bildgleichung.

Also aus der Originalgleichung (a) erhalten wir durch Substitution (1) die Bildgleichung (ā) und gleichzeitig aus dem Originalvektor $r(a)$ den Bildvektor $r(\bar{a})$.

1.1 Transformationsmatrizen. Für die Definition der Matrizen, die den Originalvektor $r(a)$ auf den Bildvektor $r(\bar{a})$ transformieren, werden die Formeln

$$z[T(x)]^{(i-1)} = \sum_{\nu=1}^{i} \varphi_{\nu-1}^{i-1}[\zeta(v)]\, v^{2(1-\nu)} z^{(\nu-1)}(t)\,, \quad v(x) = |T'(x)|^{-1/2}\,, \quad \zeta(v) = \frac{v'}{v}\,; \tag{1}$$

$$[u(x)\, Z(x)]^{(i-1)} = u \sum_{\nu=1}^{i} \binom{i-1}{i-\nu} \chi_{i-\nu}[\zeta(u)]\, Z(x)^{(\nu-1)}\,, \quad \zeta(u) = \frac{u'}{u} \tag{2}$$

angewandt, s. [1; (2, 1.4), (2, 2.2)]. Die Funktionen φ, χ sind gewisse verallgemeinerte Polynome mit Dimension, die der Differenzgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} &\varphi_j^i(\zeta) = \varphi_j^{i-1}(\zeta) - 2(i-j)\,\zeta\varphi_{j-1}^{i-1}(\zeta) + [\varphi_{j-1}^{i-1}(\zeta)]'\,, \\ &\varphi_0^i = 1\,, \quad i = 0, 1, \ldots, \quad \varphi_s^s = 0\,, \quad s = 1, 2, \ldots, \\ &\chi_j(\zeta) = \zeta\chi_{j-1}(\zeta) + \chi_{j-1}(\zeta)'\,, \quad \chi_0(\zeta) = 1 \end{aligned} \tag{3}$$

entsprechen, s. [1; (2,1.6), (2,2.3)]. Der untere Index gibt die Nummer der Dimension. Die Gleichungen (3) kann man zur Beweisführung einiger Eigenschaften der Polynome φ, χ mit Hilfe der vollständigen Induktion anwenden. Aus (3) folgt z. B.

$$\begin{aligned} &\varphi_1^{i-1}(\zeta) = \binom{i-1}{2}(-2\zeta)\,, \quad \varphi_2^{i-1}(\zeta) = \binom{i-1}{3}[(3i-8)\,\zeta^2 - 2\zeta']\,, \\ &\chi_1(\zeta) = \zeta\,, \quad \chi_2(\zeta) = \zeta' + \zeta^2\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Vermöge der Polynome φ, χ definieren wir die unteren regulären Dreiecksmatrizen $(n+1)$-ter Ordnung $X[\zeta(u)]$, $\Phi[\zeta(v)]$ folgendermaßen:

$$\{X[\zeta(u)]\}_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{für } i-k < 0\,, \\ \binom{i-1}{i-k}\chi_{i-k}[\zeta(u)] & \text{für } i-k \geqq 0\,, \end{cases}$$

$$\{\Phi[\zeta(v)]\}_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{für } i-k < 0 \\ \varphi_{i-k}^{i-1}[\zeta(v)] & \text{für } i-k \geqq 0 \end{cases}$$

mit $\det X = \det \Phi = 1$.

Gemäß der Formel (1) bzw. (2) gilt

$$(5)\qquad w\{z[T(x)]\} = \Phi[\zeta(v)]\, I[v^{2(1-k)}]\, w(z)$$

bzw.

$$(6)\qquad w[u(x)\, Z(x)] = u\, X[\zeta(u)]\, w(Z)\,.$$

Aus (5), (6) folgen leicht diese Formeln:

$$(7)\qquad \begin{aligned} w\{u(x)\, z[T(x)]\} &= u\, X[\zeta(u)]\, \Phi[\zeta(v)]\, I[v^{2(1-k)}]\, w(z)\,,\\ w\{u[T(x)]\, z[T(x)]\} &= u\, \Phi[\zeta(v)]\, I[v^{2(1-k)}]\, X[\zeta(u)]\, w(z)\,. \end{aligned}$$

1.2 Bildgleichung und Bildvektor. Mit Hilfe der Formel (7) können wir die Bildgleichung ($\bar{\text{a}}$) in der Form

$$(\bar{\text{a}}_1)\qquad uv^{-2n}\, r(a)\, I\left[\binom{n}{n+1-k}\right] X[\zeta(u)]\, \Phi[\zeta(v)]\, I[v^{2(n+1-k)}]\, w(z) = 0$$

schreiben. Ein Vergleich von ($\bar{\text{a}}$), ($\bar{\text{a}}_1$) ergibt die Beziehung zwischen dem Originalvektor $r(a)$ und dem Bildvektor $r(\bar{a})$ in der Form

$$(1)\qquad r(\bar{a}) = r(a)\, I\left[\binom{n}{n+1-k}\right] X[\zeta(u)]\, \Phi\, [\zeta(v)]\, I\left[v^{2(n+1-k)}\binom{n}{n+1-k}^{-1}\right].$$

Daraus folgt für die $(n+1-r)$-te Komponente des Vektors $r(\bar{a})$ die Formel

$$(2)\qquad \bar{a}_r = r(a)\, I\left[\binom{n}{n+1-k}\right] X[\zeta(u)]\, \varphi_{\cdot n+1-r}[\zeta(v)]\, v^{2r}\binom{n}{r}^{-1},$$

wo $\varphi_{\cdot n+1-r}[\zeta(v)]$ die $(n+1-r)$-te Spalte von $\Phi[\zeta(v)]$ darstellt. Für $r = 1$ nimmt die Gleichung (2) mit Berücksichtigung von 1.1(4) – d. h. siehe die Formel (4) des Abs. 1.1 – die Gestalt

$$(3)\qquad \bar{a}_1 = v^2[a_1 + \zeta(u) - (n-1)\,\zeta(v)]\,.$$

1.3 Halbkanonische Bilder und Vektoren. Ist $\bar{a}_1 = 0$, so nennen wir das Bild ($\bar{\text{a}}$) halbkanonisch und seinen Vektor den halbkanonischen Vektor. Vermöge von (3) erhalten wir das halbkanonische Bild durch die Wahl

$$(1)\qquad \zeta(u) = -a_1 + (n-1)\,\zeta(v)\,,$$

davon durch die Integration folgt $u(x)$ in der Form

$$u(x) = cv^{n-1} \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} a_1\, \mathrm{d}s\right\},\quad c = \text{Konst.}$$

Gilt also (1), so schreiben wir das halbkanonische Bild von (a) in der Gestalt

$$\text{(A)} \qquad r(\bar{A})\, I\left[\binom{n}{n+1-k}\right] w(z) = 0\,.$$

Den halbkanonischen Vektor $r(\bar{A})$ erhalten wir aus 1.2(1), wo wir $X[-a_1 + (n-1)\,\zeta(v)]$ statt $X[\zeta(u)]$ schreiben. Weil die Matrix X die folgenden Eigenschaften

$$X(\alpha + \beta) = X(\alpha)\, X(\beta) = X(\beta)\, X(\alpha)\,, \quad X(k\alpha) = X(\alpha)^k\,, \quad k \text{ ganz}\,,$$

besitzt, läßt sich der halbkanonische Vektor $r(\bar{A})$ folgendermaßen schreiben:

$$\text{(2)} \qquad r(\bar{A}) = r(a)\, I\left[\binom{n}{n+1-k}\right] X(-a_1)\, X[\zeta(v)]^{n-1}\,.$$

$$.\, \Phi[\zeta(v)]\, I\left[v^{2(n+1-k)}\binom{n}{n+1-k}^{-1}\right].$$

1.4 Hauptbild und Hauptvektor. Das halbkanonische Bild von (a)

$$\text{(A)} \qquad r(A)\, I\left[\binom{n}{n+1-k}\right] w(Z) = 0$$

der Koordinaten x, $\exp\{-\int_{x_0}^{x} a_1\, ds\}$ nennen wir das Hauptbild von (a) und seinen Vektor, der durch die Formel

$$\text{(1)} \qquad r(A) = r(a)\, I\left[\binom{n}{n+1-k}\right] X(-a_1)\, I\left[\binom{n}{n+1-k}^{-1}\right]$$

gegeben ist, den Hauptvektor von (a). Aus (1) folgt für die $(n+1-r)$-te Komponente A_r des Hauptvektors die Beziehung

$$\text{(2)} \qquad A_r = \sum_{v=0}^{r} \binom{r}{v} a_v\, \chi_{r-v}(-a_1)\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n\,,$$

mit $A_0 = 1$, $A_1 = 0$, $A_2 = a_2 - a_1^2 - a_1'$ usw. Die Funktionen (2) nennen wir die Hauptkoeffizienten von (a).

Bemerkung. Die Gleichung (1) läßt sich in der Gestalt

$$r(A) = r(a)\, \bar{X}(-a_1)$$

schreiben. Die Matrix $\bar{X}(-a_1) = \left\| \binom{n+1-k}{i-k} \chi_{i-k}(-a_1) \right\|$ erhält man aus $X(-a_1)$ durch Stürzen um die Nebendiagonale.

Setzen wir (1) in 1.3(2), so erhalten wir den halbkanonischen Vektor $r(\bar{A})$ in der Form

$$(3)\quad r(\bar{A}) = r(A)\, I\left[\binom{n}{n+1-k}\right] X[\zeta(v)]^{n-1}\, \Phi[\zeta(v)]\, I\left[v^{2(n+1-k)}\binom{n}{n+1-k}^{-1}\right].$$

1.5. Reduzierte halbkanonische Bilder und Vektoren. Den halbkanonischen Vektor

$$r(\mathfrak{A}) = r(a)\, I\left[\binom{n}{n+1-k}\right] X(-a_1)\, I\left[\binom{n+1}{n+2-k}^{-1}\right]$$

nennen wir den reduzierten Hauptvektor und seine Komponenten, die durch die Formel

$$(1)\qquad \mathfrak{A}_r = \frac{1}{n+1}\sum_{v=0}^{r}\binom{r+1}{v}(r+1-v)\, a_v\, \chi_{r-v}(-a_1)\,, \quad r = 0, 1, 2, \ldots, n\,,$$

mit

$$\mathfrak{A}_0 = \frac{1}{n+1}\,, \quad \mathfrak{A}_1 = 0\,, \quad \mathfrak{A}_2 = \frac{3}{n+1}(a_2 - a_1^2 - a_1')$$

usw., gegeben sind, die reduzierten Hauptkoeffizienten.

Wenn wir das halbkanonische Bild von (a) in der reduzierten Form

$$(\bar{\mathfrak{A}})\qquad r(\bar{\mathfrak{A}})\, I\left[\binom{n+1}{n+2-k}\right] w(z) = 0$$

schreiben, so erhalten wir für seinen Vektor, den wir auch den reduzierten halbkanoischen Vektor nennen, die Formel

$$(2)\qquad r(\bar{\mathfrak{A}}) = r(\mathfrak{A})\, I\left[\binom{n+1}{n+2-k}\right] X[\zeta(v)]^{n-1}\,.$$
$$.\,\Phi[\zeta(v)]\, I\left[v^{2(n+1-k)}\binom{n+1}{n+2-k}^{-1}\right].$$

Daraus folgt die $(n-1)$-te Komponente des Vektors $r(\bar{\mathfrak{A}})$ mit Berücksichtigung von 1.1(4) die Gleichung

$$(3)\qquad \bar{\mathfrak{A}}_2 = v^4[\zeta'(v) + \zeta^2(v) + \mathfrak{A}_2]\,.$$

Bemerkung. Ein Vergleich von 1.4(2) und (1) ergibt die Beziehung zwischen den Hauptkoeffizienten und den reduzierten Hauptkoeffizienten von (a) in der Form $\mathfrak{A}_r = (r + 1)/(n + 1)\, A_r$, $r = 0, 1, \ldots, n$. Ein Vergleich von 1.4(3) und (2) ergibt dieselbe Beziehung zwischen $\bar{\mathfrak{A}}_r$ und $\bar{A}_r$.

1.6. Kanonische Bilder und Vektoren. Ist $\bar{\mathfrak{A}}_2 = 0$, so nennen wir das Bild $(\bar{\mathfrak{A}})$ kanonisch und seinen Vektor den kanonischen Vektor. Vermöge von 1.5(3) ist der Vektor 1.5(2) kanonisch, wenn

(1) $$\zeta'(v) + \zeta^2(v) + \mathfrak{A}_2 = 0$$

gilt, d. h. wenn $v(x)$ eine Lösung der Gleichung $v'' + \mathfrak{A}_2 v = 0$ darstellt. Gilt also (1), so lassen sich die Matrizen X und Φ als Polynommatrizen schreiben, und zwar die Matrix X läßt sich als eine Polynommatrix des ersten Grades in der Form

(2) $$X[\zeta(v)] = H(\mathfrak{A}_2) + Q^{(1)}(\mathfrak{A}_2)\,\zeta(v)$$

darstellen, wo $H(\mathfrak{A}_2) = \left\| \binom{i-1}{i-k} h_{i-k}(\mathfrak{A}_2) \right\|$, $Q^{(1)}(\mathfrak{A}_2) = \left\| \binom{i-1}{i-k} q_{i-k}(\mathfrak{A}_2) \right\|$ vertauschbare untere Dreiecksmatrizen sind. Die Elemente von H, $Q^{(1)}$ sind wieder Polynome mit Dimension, die das System

$$h_j = -\mathfrak{A}_2 q_{j-2} + (h_{j-1})', \quad q_j = h_j + (q_{j-1})', \quad h_0 = q_0 = 1$$

befriedigen. $H(0)$ ist die Einheitsmatrix, $Q^{(1)}(0)$ ist die erste Diagonalmatrix $I^{(1)}(k)$. Die Matrix Φ ist eine Polynommatrix des Grades $n - 1$ von der Gestalt

(3) $$\Phi[\zeta(v)] = \sum_{\nu=0}^{n-1} F^{(\nu)}(\mathfrak{A}_2)\,\zeta^{\nu}(v),$$

wo $F^{(\nu)}(\mathfrak{A}_2) = \left\| f_{i-k-\nu}^{i-1,\nu}(\mathfrak{A}_2) \right\|$ eine untere Dreiecksmatrix, deren alle Elemente oberhalb der ν-ten Diagonale gleich Null sind, darstellt. Die übrigen von Null verschiedenen Elemente von $F^{(\nu)}(\mathfrak{U}_2)$ sind wieder Polynome mit Dimension, die als Lösungen der Differenzengleichung

$$f_{j-\nu}^{i,\nu} = f_{j-\nu}^{i-1,\nu} - (2i - 2j + \nu - 1) f_{j-\nu}^{i-1,\nu-1} - (\nu + 1)\,\mathfrak{A}_2 f_{j-\nu-2}^{i-1,\nu+1} + (f_{j-\nu-1}^{i-1,\nu})'$$

gegeben sind. $F^{(\nu)}(0)$ ist die ν-te Diagonalmatrix

$$(-1)^{\nu}\,\nu!\, I^{(\nu)}\left[\binom{k+\nu-1}{\nu}\binom{k+\nu-2}{\nu}\right], \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, n - 1 .$$

Wenn wir das kanonische Bild von (a) in der Form

$$(\bar{\alpha}) \qquad r(\bar{\alpha})\, I\left[\binom{n+1}{n+2-k}\right] w(z) = 0$$

schreiben, so erhalten wir für seinen kanonischen Vektor aus 1.5(2) mit dem Ansatz (2), (3) die Beziehung

$$(4) \quad r(\bar{\alpha}) = r(\mathfrak{A})\, I\left[\binom{n+1}{n+2-k}\right] \sum_{\nu=0}^{n-3} G^{(\nu)}(\mathfrak{A}_2)\, \zeta^{\nu}(v)\, I\left[v^{2(n+1-k)} \binom{n+1}{n+2-k}^{-1}\right],$$

wo die untere Dreiecksmatrix $G^{(\nu)}(\mathfrak{A}_2)$ durch die Formel

$$G^{(\nu)}(\mathfrak{A}_2) = \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{n-1}{\mu} H(\mathfrak{A}_2)^{n-1-\mu}\, Q^{(1)}(\mathfrak{A}_2)^{\mu}\, F^{(\nu-\mu)}(\mathfrak{A}_2), \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-3$$

definiert ist.

1.7. Kanonische Bilder kanonischer Originalgleichungen. Ist die Originalgleichung (a) kanonisch, d. i. besitzt sie die Form

$$(\alpha) \qquad r(\alpha)\, I\left[\binom{n+1}{n+2-k}\right] w(y) = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0,$$

so ist der reduzierte Hauptkoeffizient $\mathfrak{A}_2$ gleich Null. Die Matrix $G^{(\nu)}(0)$ hat die Gestalt

$$G^{(\nu)}(0) = \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{n-1}{\mu} I^{n-1-\mu}\, I^{(1)}(k)^{\mu}\, (\nu-\mu)!\, I^{(\nu-\mu)}\left[\binom{k+\nu-\mu-1}{\nu-\mu}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\binom{k+\nu-\mu-2}{\nu-\mu}\right] = \nu!\, I^{(\nu)}\left[\binom{k+\nu-1}{\nu}\binom{n-k}{\nu}\right]$$

und der kanonische Vektor ist von der Form

$$(1) \qquad r(\bar{\alpha}) = r(\mathfrak{A}) \sum_{\nu=0}^{n-3} \nu!\, I^{(\nu)}\left[\binom{n+2-k}{\nu}\binom{n-k}{\nu} v^{2(n+1-k)}\right] \zeta^{\nu}(v).$$

Daraus folgt für $(n+1-r)$-te Komponente $\bar{\alpha}_r$ des Vektors $r(\bar{\alpha})$ die Gleichung

$$(2) \qquad \bar{\alpha}_r = v^{2r} \sum_{\nu=0}^{r-3} \nu!\, c_{\nu}^{r} \alpha_{r-\nu}\, \zeta^{\nu}(v), \quad r = 3, 4, \ldots, n$$

mit

$$c_\nu^r = \binom{r+1}{\nu}\binom{r-1}{\nu}. \tag{3}$$

Damit haben wir Bilder, halbkanonische und kanonische Bilder der Gleichung (a) beschrieben.

2. BESTIMMUNG DER KANONISCHEN INVARIANTEN

Die Gleichungen 1.6(7) und (1) bilden die Ausgangsgleichungen für die Bestimmung der Fundamentalinvarianten von der Gleichung (a). Im zweiten Abschnitt geben wir bloß die Bestimmung der kanonischen Invarianten an. Die kanonischen Invarianten sind die Invarianten bei der Transformation der kanonischen Gleichungen auf die kanonischen Gleichungen.

Es sei die Gleichung

$$r(\beta)\, I\left[\binom{n+1}{n+2-k}\right] w(z) = 0\,, \quad \beta_1 = \beta_2 = 0 \tag{β}$$

ein kanonisches Bild von (α) der Koordinaten $T(x)$, $u(x)$, die den Gleichungen 1.3(1), 1.6(1) mit $v = |T'|^{-1/2}$, $\mathfrak{A}_2 = 0$ entsprechen. Wie schon erwähnt, muß die Beziehung

$$\beta_r[T(x)] = v^{2r} \sum_{\nu=0}^{r-3} \nu!\, c_\nu^r \alpha_{r-\nu} \zeta^\nu\,. \quad r = 3, 4, \dots, n \tag{1}$$

gelten, s. 1.7(2). Also wählen wir r fest. Im diesen Abschnitt werden alle Matrizen und Vektoren ohne Indizes die Ordnung und die Dimension s besitzen, wo $s > 2r + 1$ eine natürliche Zahl ist. Gemäß den Transformationsformeln für die Vektoren $w(y)$ gilt mit Benutzung von (1) die Gleichung

$$w\{\beta_r[T(x)]\} = \Phi[\zeta(v)]\, I[v^{2(1-k)}]\, w(\beta_r) = \sum_{\nu=0}^{r-3} \nu!\, c_\nu^r v^{2r} \,.\, \zeta^\nu X(\zeta)^{2r-\nu} w(\alpha_{r-\nu})\,, \tag{2}$$

wo $\zeta(\zeta^\nu) = -\nu\zeta$ mit $\zeta' = -\zeta^2$ zu nehmen ist. Aus (2) folgt

$$w(\beta_r) = I[v^{2(r+k-1)}]\, \Phi[\zeta(v)]^{-1} \sum_{\nu=0}^{r-3} \nu!\, c_\nu^r \zeta^\nu X(\zeta)^{2r-\nu} w(\alpha_{r-\nu})\,. \tag{3}$$

Wenn wir die Matrizen Φ^{-1}, X durch die Polynommatrizen ersetzen, erhalten wir mit Rücksicht auf $\mathfrak{A}_2 = 0$ nach Umformung die Relation

$$w(\beta_r) = I\,[v^{2(r+k-1)}]\sum_{j=0}^{s-1}\zeta^j\, j!\, I\left[\binom{k-1}{j}\right].$$

$$\cdot\sum_{\nu=0}^{r-3}\zeta^\nu \nu!\, c_\nu^r\, I^{(j)}\left[\binom{2r+k+j-2-\nu}{j}\right] w(\alpha_{r-\nu})\,,$$

woraus die Beziehung

$$\beta_r^{(i-r)} = v^{2i}\sum_{j=0}^{i-r}\zeta^j j!\binom{i-r}{j}\sum_{\nu=0}^{r-3}\zeta^\nu \nu!\, c_\nu^r\binom{i+r-\nu-1}{j}\alpha_{r-\nu}^{i-r-j} =$$

$$= v^{2i}\sum_{\mu=1}^{i-2}\zeta^{\mu-1}\sum_{\nu=\max\{0,r-i+\mu\}}^{\min\{\mu-1,r-3\}} c_\nu^r(\mu-\nu-1)!\,\nu!\binom{i-r}{\mu-\nu-1}.$$

$$\cdot\binom{i+r-\nu-1}{\mu-\nu-1}\cdot\alpha_{r-\nu}^{i-r-\mu+\nu+1}$$

für $(i-r+1)$-te Komponente des Vektors $w(\beta_r)$ folgt, $r \leqq i \leqq s+r-1$.

Setzen wir

$$\bar{\delta}_{\mu k} = \sum_{\nu=\max\{0,k-\mu\}}^{\min\{k-1,i-\mu-2\}} c_\nu^{k+2}(\mu+\nu-k)!\,(k-1-\nu)!\,. \tag{4}$$

$$\cdot\binom{i-k-2}{\mu+\nu-k}\binom{i+2+\nu}{\mu+\nu-k}\alpha_{3+\nu}^{(i-2-\mu-\nu)}\,,\quad \mu, k = 1, 2, \ldots, i-2\,,$$

so können wir den Zeilenvektor $\varrho_{i-2}[\beta_{k+2}^{(i-k+2)}]^T$ der Dimension $i-2$ als Produkt des Zeilenvektors $\varrho_{i-2}(\zeta^{k-1})^T$ und der Matrix $\bar{\Delta}_{i-2} = \|\bar{\delta}_{\mu k}\|$ schreiben, d. i.

$$\varrho_{i-2}[\beta_{k+2}^{(i-k+2)}]^T = \varrho_{i-2}[\zeta^{k-1}]^T\,\bar{\Delta}_{i-2}\,. \tag{5}$$

Die Gleichung (5) können wir noch umformen. Wir definieren die Matrix $\Delta_{i-2} = \|\delta_{\mu k}\|$ folgendermaßen: ihre erste Zeile erhalten wir, wenn wir von der ersten Zeile der Matrix $\bar{\Delta}_{i-2}$ das v^{-2i}-fache des Vektors $\varrho_{i-2}[\beta_{k+2}^{(i-k-2)}]^T$ subtrahieren, d. i.

$$\{\Delta_{i-2}\}_{1.} = \{\bar{\Delta}_{i-2}\}_{1.} - v^{-2i}\varrho_{i-2}[\beta_{k+2}^{(i-k-2)}]\,.$$

Daraus folgt für die Elemente der ersten Zeile von Δ_{i-2} mit Rücksicht auf (4) die Beziehung

$$\delta_{1k} = \alpha_{k+2}^{(i-k-2)} - v^{-2i}\beta_{k+2}^{(i-k-2)}\,,\quad k = 1, 2, \ldots, i-2\,. \tag{6}$$

Übrige Zeilen der Matrix Δ_{i-2} sind gleich wie die Zeilen der Matrix $\bar{\Delta}_{i-2}$.

Dann können wir die Gleichung (5) in der Gestalt

$$\varrho_{i-2}[\zeta^{k-1}]^T \Delta_{i-2} = 0$$

schreiben. Daraus folgt, daß auch ein Spaltenvektor $\varrho_{i-2}(d_{2+k}^i)$ existiert, der die Gleichung

$$\Delta_{i-2}\varrho_{i-2}(d_{2+k}^i) = 0$$

befriedigt. Diese Gleichung können wir in der Form

$$\{\Delta_{i-2}\}_{\mu.}\, \varrho_{i-2}(d_{2+k}^i) = 0\,, \quad \mu = 1, 2, \ldots, i-2 \tag{7}$$

schreiben, d. i. als Skalarprodukt der Zeilenvektoren der Matrix Δ_{i-2} mit dem Vektor $\varrho(d_{2+k}^i)$.

Wählen wir in (7) $\mu = 2$, so erhalten wir mit Rücksicht auf (4) nach der kurzen Berechnung für die Komponenten des Vektors $\varrho(d_{2+k}^i)$ die Beziehung

$$d_{2+k}^i = (-1)^{k-1}\binom{i-3}{k-1}\binom{i+k}{k-1} d_3^i / c_{k-1}^{2+k}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, i-2\,.$$

Durch eine passende Wahl von d_3^i erhalten wir alle Komponenten des Vektors $\varrho_{i-2}(d_{k+2}^i)$. Z. B. mit dem Ansatz

$$d_3^i = (-1)^{i-1}\, c_{i-3}^i \Big/ \binom{2i-2}{i-3}$$

gewinnen wir die Formel

$$d_{2+k}^i = (-1)^{i-k}\binom{i+1}{k+3}\binom{i+k}{k+1}\Big/\binom{2i-2}{i-1}\,, \quad d_i^i = 1\,, \quad k = 1, 2, \ldots, i-2\,.$$

Mit dem Ansatz

$$d_3^i = (-1)^{i-1}\binom{i+1}{i-1}\binom{i+1}{i-3}$$

erhalten wir die Gleichung

$$d_{2+k}^i = (-1)^{i-k}\binom{i+1}{k+3}\binom{i+k}{k+1}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, i-2\,. \tag{8}$$

Für $\mu = 1$ folgt aus (7) mit Rücksicht auf (6) die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{i-2} d_{2+k}^i\left(\alpha_{k+2}^{(i-k-2)} - v^{-2i}\beta_{k+2}^{(i-k-2)}\right) = 0\,. \tag{9}$$

Bezeichnen wir

$$\vartheta_i(\alpha_3, \ldots, \alpha_i) = \sum_{k=1}^{i-2} d^i_{2+k} \alpha^{(i-k-2)}_{k+2} . \tag{10}$$

Dann können wir statt (9) die Gleichung

$$\vartheta_i\{\beta_3[T(x)], \ldots, \beta_i[T(x)]\}\, v^{-2i} = \vartheta_i(\alpha_3, \ldots, \alpha_i) \tag{11}$$

schreiben. Die Funktion $\vartheta_i(\alpha_3, \ldots, \alpha_i)$ ist gemäß (10) ein Polynom mit Dimension i, der Ordnung $i - 3$ und vom ersten Grad. Laut (11) schließen wir, daß die Funktion (10) die i-te kanonische Invariante ist.

Setzen wir z. B. (8) in (10), erhalten wir nach Umformung die Formel

$$\vartheta_i(\alpha_3, \ldots, \alpha_i) = \sum_{\nu=0}^{i-3} (-1)^\nu \binom{i+1}{\nu} \binom{2i-2-\nu}{i-1} \alpha^{(\nu)}_{i-\nu} .$$

Die Beschreibung der Form von Fundamentalinvarianten mit Hilfe der Gleichung 1.6(4) und der kanonischen Invarianten bringt schon keine größere Schwierigkeiten mehr.

Literatur

[1] *Z. Hustý:* Über Transformation und Äquivalenz homogener linearer Differentialgleichungen von höheren als der zweiten Ordnung. Czechoslovak Math. J. I. Teil T. *15* (*90*) 1965, 479—502; II. Teil T. *16* (*91*) 1966, 1—13; III. Teil T. *16* (*91*) 1966, 161—186.

[2] *F. Brioschi:* Les invariants des équations differentielles linéaires. Acta mathematica 14 (1890—91), 233—248.

[3] *L. Schlezinger:* Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Band II/1, Leipzig 1897.

Author's address: 602 00 Brno, Hilleho 6, ČSSR (Vysoké učení technické).